

О.М. Лопушанський
Національний університет “Львівська політехніка”

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗКЛАДУ ГРАВИТАЦІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗЕМЛІ ЗА ДАНИМИ СУПУТНИКА GOCE

© Лопушанський О.М., 2013

Последние достижения науки в сфере физической геодезии являются проектом Европейского космического агентства – спутник GOCE, который использует метод спутниковой градиентометрии. Гравитационное поле Земли удобно представить как ряд сферических гармонических функций, т.е. для моделирования гравитационного поля существует конечное число параметров – так называемых коэффициентов C_{nm} S_{nm} . Анализируются основные соотношения для определения этих коэффициентов.

The last achievements of the physical geodesy are the project of European Space Agency – the GOCE satellite (Gravity of field and steady – state of Ocean Circulation Explorer) which uses the satellite gradientometry method. The gravitational field of the Earth is represented traditionally as a series of spherical harmonic functions, i.e. to model the gravitational field of the finite number of parameters, the so-called coefficients C_{nm} , S_{nm} . In this paper we analyze the basic relationships for the determination of these coefficients.

Історичні відомості. Постановка проблеми. Вибір алгоритму, який дає змогу визначати гармонічні коефіцієнти геопотенціалу за компонентами тензора гравітаційного градієнта, що вимірюються за сучасним підходом супутникової градиентометрії, став актуальним завданням суттєвого покращення низькочастотної та середньочастотної складових гравітаційного поля опрацюванням даних місії GOCE.

Вперше питання обчислення так званих градієнтів сили тяжіння зацікавило угорського фізика Лоранда Етвеша (1848–1919), який розробив прилад, за допомогою якого розроблено цю теорію, а саме – дослідження сили ваги та рівневої поверхні.

Розроблений Етвешом прилад називають гравітаційним варіометром, або варіометром Етвеша. Внаслідок високої чутливості варіометра до притягання близьких мас він більше застосовувався для геолого-вишукувальних робіт. Хоча і геодезичне застосування вимірів з цього приладу важливе та цікаве. Етвеш використовував варіометр двох типів.

Розглянемо теорію варіометра першого типу (рис. 1), який являє собою прості крутильні ваги: легке горизонтальне коромисло, M_1M_2 підвішене посередині на тонкій нитці AO . На кінцях коромисла прикріплено два тягарці однакової маси M_1 та M_2 . Припустимо, що прилад знаходиться в однорідному полі тяжіння, в якому всі горизонтальні напрями рівноправні.

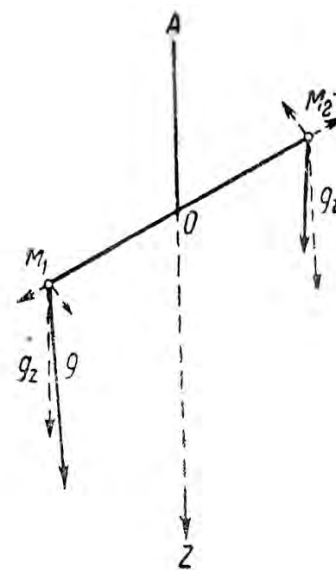


Рис. 1. Схема варіометра першого типу

У неоднорідному полі тяжіння існують напрямки, в яких сила тяжіння збільшується швидше, отже, на коромисло діятиме пара сил, які закрутять нитку так, що положення рівноваги буде досягнуто в іншому азимуті, що відповідатиме певній закрученості нитки.

В аналітичній формі подамо у вигляді векторів силу, що діє на тягарці M_1 та M_2 . Візьмемо систему прямокутних осей координат з початком в точці O . Вісь z спрямуємо вертикально донизу за продовженням нитки AO , вісь x спрямуємо на північ, вісь y – на схід. Розглянемо випадкову точку нашої системи з елементарною масою dm і координатами (x, y, z) . Розкладемо силу тяжіння g , яка діє на точку, на три складові за координатами (x, y, z) , які позначимо як g_x, g_y, g_z . Остання складова, паралельна нитці AO , не може вплинути на поворот системи навколо осі z . Перші дві складові дадуть елементарний момент відносно осі z , що дорівнює

$$dM = (xg_y - yg_x)dm. \quad (1)$$

Повний момент сил, який діє на всі точки системи, дорівнюватиме

$$M = \int (xg_y - yg_x)dm. \quad (2)$$

Поблизу точки O компоненти сили ваги ми можемо представити рядом Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= (g_x)_0 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 z + \dots \\ g_y &= (g_y)_0 + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 z + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

де позначкою $_0$ позначено відповідні величини для початку координат. Але через те, що вісь z напрямлена по вертикалі, тобто по напрямку сили g в точці O , отримуємо

$$(g_x)_0 = (g_y)_0 = 0. \quad (4)$$

Вводячи потенціальну функцію W сили тяжіння, запишемо компоненти в такому вигляді:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (5)$$

Похідні від компонент набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & \frac{\partial g_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial g_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial g_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, & \frac{\partial g_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial g_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial g_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

Після внесення до рівняння (3) вони набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0 z \\ g_y &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 z \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Внесенням цих виразів в рівняння (2) після переведення отримуємо

$$M = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 \int xy dm + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 \int (x^2 - y^2) dm + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 \int xz dm - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 \int yz dm. \quad (8)$$

Зрозуміло, що використання іншої системи координат (x, y, z) призведе до зміни g_x, g_y, g_z .

Спостереження з варіометром дають величину похідних $W_\Delta, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$. Визначимо зміст і значення цих величин [0]. Розпочнемо з двох останніх похідних.

Отже,

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (9)$$

Так само як:

$$W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (10)$$

Ці дві похідні змінюють силу тяжіння в горизонтальній площині: перша – в напрямку осі x , взятої нами на північ, друга – в напрямку осі y , повернутої на схід. Тому ці похідні називаються горизонтальними градієнтами сили тяжіння.

Запишемо повний диференціал прискорення g :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz. \quad (11)$$

Проінтегруємо цей вираз у межах між двома заданими точками (x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) , силу тяжіння та похідні для яких позначимо g_1 та g_2 . Отримаємо:

$$g_2 - g_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial g}{\partial y} dy + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (12)$$

Варіометр не дає похідної $\frac{\partial g}{\partial z}$, тому обмежимося її нормальним значенням. Збільшення z рівносильне зменшенню висоти H , тому що координата z в нас напрямлена донизу. Відповідно:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial H}. \quad (13)$$

Виклад основного матеріалу

Метод супутникової градієнтометрії

З погляду геодезії головним приладом супутника GOCE є триосний електростатичний гравітаційний градієнтометр. Завдяки цьому приладу і реалізовано метод супутникової градієнтометрії.

Основна операція градієнтометра полягає у вимірюванні сил, що діють на “пробну масу”. Контролери забезпечують стабільність “пробної маси” як у лінійному, так і в обертальному русі. Три пари ідентичних акселерометрів формують три “руки градієнтометра”, які встановлено на ультрастабільній структурі. Загальний вигляд градієнтометра показано на рис. 2.

Різниця між вимірними прискореннями кожної пари акселерометрів називається базисними градієнтометричними даними, а половина їх суми становить вимір прискорення (загальний режим вимірювання). Три руки, встановлені ортогонально одна відносно



Рис. 2. Електростатичний градієнтометр

іншої: перша – лежить вздовж траєкторії супутника, друга – перпендикулярна до цієї траєкторії, третя – наближено спрямовується до центру Землі.

Кожна пара має базисну лінію близько 50 см. Кожний акселерометр є тривимірним з двома осями найвищої точності та однією віссю меншої точності. Компоненти градієнтів сили тяжіння визначаються комбінуванням диференційованих прискорень настільки точно, наскільки точно вимірюються пертурбаційні кутові прискорення. Хоча градієнтометр є високоточний, це не дає можливості визначати все поле сили тяжіння в просторовому масштабі з такою самою точністю.

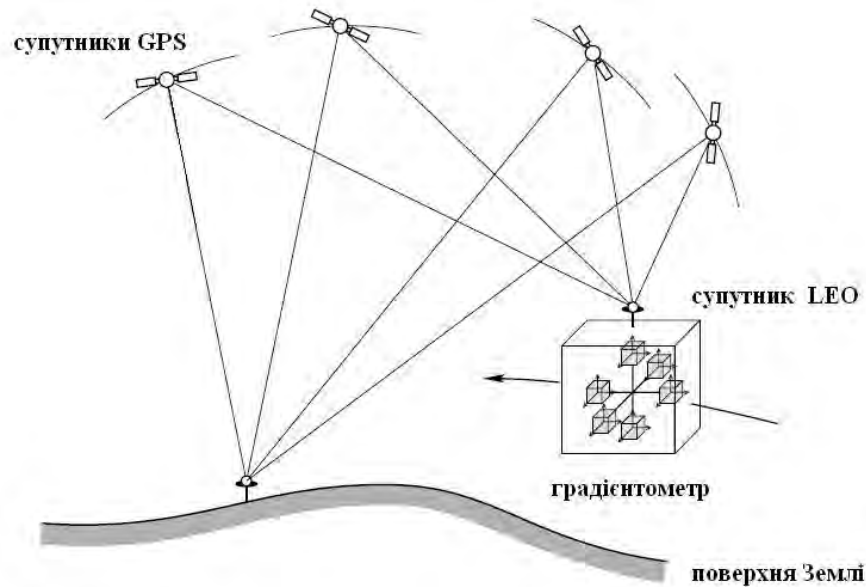


Рис. 3. Визначення положення GOCE за допомогою GPS

Супутникова градієнтометрія (рис. 3) дає змогу вимірювати різниці прискорення компонент сили тяжіння в трьох просторових взаємно ортогональних напрямках шістьма акселерометрами (по два на кожній з трьох осей). Отже, вимірний сигнал відповідає похідним компонентами прискорення сили тяжіння, тобто другим похідним гравітаційного потенціалу. GOCE-градієнтометрія ґрунтується на таких основних залежностях:

Представимо тензор гравітаційного градієнту \mathbf{V} у вигляді матриці:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Тоді тензор сили тяжіння набуде такого вигляду в (правій) земній глобальній системі XYZ:

$$\mathbf{W}_E = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{xz} & W_{yz} & W_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

з елементами в полярній системі r, ϑ, λ :

$$V_{zz}(r, \theta, \lambda) = V_{rr}(r, \theta, \lambda) \quad (16)$$

Основні формули для визначення гармонічних коефіцієнтів

Розташування кожної точки, яку спостерігають, описується її сферичними координатами; сферичні гармоніки у цьому випадку будуть частково представлені через функції Лежандра[0]. Отже, гравітаційний потенціал можна подати так:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_0^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos \theta), \quad (17)$$

де r, θ, λ є сферичними координатами точки; G – гравітаційна константа; M – маса Землі; R – середній екваторіальний радіус Землі; $P_{lm}(\cos \theta)$ – повністю нормалізовані приєднані функції Лежандра; і C_{lm} та S_{lm} повністю нормовані геопотенціальні коефіцієнти.

SGG дані фактично зробили переворот, дозволивши використовувати модель поля сили тяжіння Землі, як апіорну інформацію[0]. Це означає: те, що колись можна було лише обчислити, тепер безпосередньо вимірюється. Внаслідок цього ми зможемо завжди впевнено казати, що наші SGG дані були переопрацьовані. Отже, геопотенціальні коефіцієнти C_{nm} та S_{nm} , встановлені зворотним шляхом, слід вважати поправками до апіорних коефіцієнтів $C_{nm}^{(ref)}$, $S_{nm}^{(ref)}$. Більше того, роздільна здатність спостережуваних SGG даних є обмежена. Отже, є сенс в межах цього способу встановити мінімальний ступінь, що дорівнюватиме нулю та максимальний ступінь L_{\max} коефіцієнтів.

Другі похідні гравітаційного потенціалу обчислюються за рекурентними формулами [0] та [0] і можуть бути представлені в системі LPOF (local pole-oriented frame) зі сферичними координатами (r, θ, λ) , де вісь X напрямлена на Північ, вісь Y– на Захід та вісь Z – догори.

$$\begin{cases} V_r(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{a^2} \sum_0^{L_{\max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \times \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos \theta) \\ V_\theta(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{a} \sum_0^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P'_{lm}(\cos \theta) \sin \theta, \\ V_\lambda(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_0^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times \sum_{m=0}^l m \{-C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos \theta) \end{cases} \quad (18)$$

де вирази для перших і других похідних можна легко обчислити за формулою (17).

$$V_{rr}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^3} \sum_{l=0}^{L_{\max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos \theta) \quad (19a)$$

$$V_{r,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^2} \sum_{l=0}^{L_{\max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos \theta) \sin \theta \quad (19б)$$

$$V_{r,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^2} \sum_{l=0}^{L_{\max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l m \{C_{nm} \cos m\lambda - S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos \theta) \quad (19в)$$

$$V_{\theta,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \{P''_{nm}(\cos \theta) \sin^2 \theta - P'_{nm}(\cos \theta) \cos \theta\} \quad (19г)$$

$$V_{\theta,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l m \{C_{nm} \cos m\lambda - S_{nm} \sin m\lambda\} P'_{nm}(\cos \theta) \sin \theta \quad (19е)$$

$$V_{\lambda,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l m^2 \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos \theta) \quad (19е)$$

Перетворення других похідних з LPOF до орбітальної системи виконується таким співвідношенням для трансформації тензорів:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{RVR}^T, \quad (20)$$

де \mathbf{V} – це тензор других похідних в вихідній системі, \mathbf{V}' – тензор других похідних в орбітальній системі, та \mathbf{R} – це матриця поворотів 3×3 , що трансформує тензор з LPOF до орбітальної системи.

Висновки

З усіх підходів найбільш зручним є використання формули (19 а). Ця формула дає найбільше значення за модулем гравітаційного градієнта, забезпечує основні особливості фігури геоїда і найпростіша для визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm} до 250 ступеня і порядку. Алгоритм та методика знаходження гармонічних коефіцієнтів за формулою (19а) відносно нормального поля GRS80 є предметом іншого дослідження.

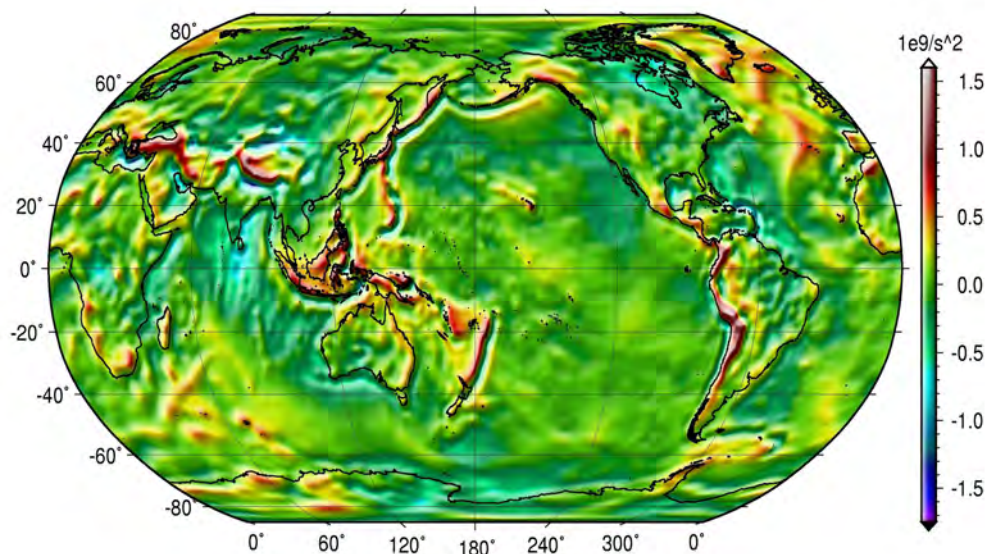


Рис. 4. Результати вимірів градієнта V_{rr} із супутника GOCE відносно системи GRS80

1. Марченко О.М. Власні числа та власні вектори тензора градієнта сили тяжіння // Вісник геодезії та картографії. – 2010. – № 2.
2. Casotto S, Fantino E (2009) Gravitational gradients by tensor analysis with application to spherical coordinates. *Journal of Geodesy*. Vol. 83, 621–634.
3. Eötvös L. (1896) *Studies in the field of gravity and magnetism*. In: “Three fundamental papers of Loránd Eötvös”, Transl. from Hungarian, ELGI Budapest, 1998, p. 83–125.
4. Fantino E, Casotto S (2009) Methods of harmonic synthesis for global geopotential models and their first-, second- and third-order gradients. *Journal of Geodesy*. Vol. 83, 595–619.
5. GOCE Level 2 Product Data Handbook.
6. Lundberg J.B., Schutz B.E. (1988) Recursion formulas for Legendre functions for use with nonsingular geopotential models. *J. Guidance Control Dyn.* 11(1), 31–38.
7. Marchenko A.N. (1998) *Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities*. Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. Lviv, Ukraine, 1998, 210 p.
8. Гофман–Велленгоф Б., Мориц Г. *Физическая геодезия*. – М.: МииГАУК, 2007. – С. 285–286.