

Б. П. КВАСНЮК

К СОСТАВЛЕНИЮ ВИДОИЗМЕНЕННЫХ ТИПОВЫХ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТРИЛАТЕРАЦИИ

Рассмотрим правила составления видоизмененных типовых условных уравнений [4] в цепи треугольников, имеющей несколько твердых дирекционных углов сторон, соединяющих

определяемые пункты. Возьмем цепь треугольников (рис. 1), в которой заданы исходные пункты A, B и дирекционные углы $\alpha_{A,I}, \alpha_{III,IV}, \alpha_{VI,VII}, \alpha_{B,X}$. Пусть приближенные координаты определяемых пунктов вычисляются по измеренным сторонам и заданным дирекционным углам так, чтобы стороны $s_6, s_{13}, s_{16}, s_{17}$ и s_{18} были избыточными.

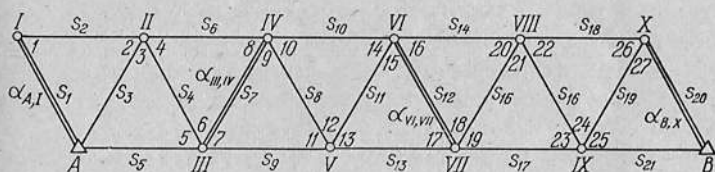


Рис. 1. Цепь треугольников с твердыми дирекционными углами $\alpha_{A,I}, \alpha_{III,IV}, \alpha_{VI,VII}$ и $\alpha_{B,X}$.

Стороне s_6 соответствует видоизмененное типовое условное уравнение, которое легко составить, пользуясь правилами, данными в работе [4].

Условное уравнение стороны s_{13} имеет вид:

$$-v_{13} + \cos 17 v_{12} - a_{11} v_{11} + a_{10} v_{10} - a_9 v_9 + a_8 v_8 - [a_8 \cos 9 + a_{10} \cos (9+10)] v_7 + l_{13} = 0, \quad (1)$$

а коэффициенты вычисляют:

$$a_{11} = \frac{\sin (\alpha_{V,VII} - \alpha_{IV,VI})}{\sin 14}, \quad a_{10} = \frac{\sin (\alpha_{V,VII} - \alpha_{V,VI})}{\sin 14};$$

$$a_9 = T_{9-11} a_{11} + T_{9-13}, \quad a_8 = T_{8-11} a_{11} + T_{8-13}. \quad (2)$$

В уравнение (1) входят поправки сторон, которые необходимы для нахождения координат пунктов V и VII от определяемого III с участием дирекционных углов $\alpha_{III,IV}$ и $\alpha_{VI,VII}$, и поправка избыточной стороны. Уравнение и формулы коэффициентов (2) подчиняются правилам образования уравнения (23) и формул (24) в работе [4], если пункт III (рис. 1) условно считать исходным.

Для стороны s_{16} условное уравнение получают

$$-v_{16} + b_{15} v_{15} - b_{14} v_{14} - b_{15} \cos 18 \cdot v_{12} + b_{19} v_{19} - b_{21} v_{21} - b_{19} \cos 27 \cdot v_{20} + b_{11} v_{11} - b_{10} v_{10} + b_9 v_9 - b_8 v_8 + [b_8 \cos 9 + b_{10} \cos (9+10)] v_7 + b_5 v_5 - b_4 v_4 + b_3 v_3 - b_2 v_2 + b_2 \cos 1 \cdot v_1 + l_{16} = 0, \quad (3)$$

где $b_{15} = T_{15-16}, \quad b_{14} = T_{14-16}; \quad b_{19} = T_{19-16}, \quad b_{21} = T_{21-16}; \quad (4a)$

$$b_{11} = \frac{\sin (\alpha_{IV,VI} - \alpha_{IX,VIII})}{\sin 14}, \quad b_{10} = \frac{\sin (\alpha_{V,VI} - \alpha_{IX,VIII})}{\sin 14}.$$

$$b_9 = T_{9-11} b_{11}, \quad b_8 = T_{8-11} b_{11}; \quad (4б)$$

$$b_5 = \frac{\sin(\alpha_{II,III} - \alpha_{IX,VIII})}{\sin 5}, \quad b_4 = \frac{\sin(\alpha_{A,III} - \alpha_{IX,VIII})}{\sin 5};$$

$$b_3 = T_{3-4} b_4, \quad b_2 = T_{2-4} b_4. \quad (4в)$$

В уравнении (3) участвуют поправки всех сторон, которые использовались для вычисления приближенных координат пунктов VIII, IX от исходных A, B, и поправка v_{16} . Уравнение состоит из трех независимых частей. Первая содержит поправку избыточной стороны s_{16} и поправки сторон $s_{15}, s_{14}, s_{12}, s_{19}, s_{21}, s_{20}$. Знаки коэффициентов этой части и формулы (4а) согласуются с правилами составления типовых условных уравнений сторон и формулами их коэффициентов [2], если пункт VI условно считать исходным.

Вторую часть уравнения составляют члены с поправками v_{11}, v_{10}, v_9, v_8 и v_7 , третью — с поправками v_5, v_4, v_3, v_2 и v_1 . Знаки коэффициентов каждой части и формулы (4б), (4в) подчиняются правилам, по которым образуются знаки и коэффициенты при поправках сторон $s_{10}, s_8, s_{11}, s_{13}$ и s_{12} (рис. 2 в работе [4]) в видоизмененных типовых условных уравнениях сторон s_4, s_5 и второй части уравнения стороны s_9 . Однако в отличие от указанных избыточных сторон сторона s_{16} (рис. 1) не связана непосредственно с пунктами VII и IV, расположенными на концах сторон с заданными дирекционными углами, и в формулах (4б), (4в) используется $\alpha_{IX,VIII}$ — дирекционный угол избыточной стороны направления на пункт VIII, координаты которого вычисляли с участием сторон s_{10}, s_{11} и s_4, s_5 .

В работе [4] в качестве предварительного условия, исходя из которого формулировали правила образования знаков и коэффициентов, принималось требование: для вычисления коэффициентов вида b_{11}, b_{10} (4б) и b_5, b_4 (4в) должны использоваться дирекционные углы направлений на пункты, расположенные на концах стороны, которая имеет необходимый дирекционный угол. Это условие нуждается в уточнении: для вычисления коэффициентов b_{11}, b_{10} и b_5, b_4 следует брать дирекционные углы необходимых сторон направлений на пункты, расположенные на концах сторон, которые имеют необходимые дирекционные углы, и дирекционный угол избыточной стороны направления на пункт, приближенные координаты которого вычислялись с участием сторон s_{11}, s_{10} и s_5, s_4 . В отдельных случаях это может быть и пункт, расположенный на конце стороны, имеющей необходимый дирекционный угол.

Избыточным сторонам s_{17} и s_{18} соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} & -v_{17} + c_{19}v_{19} - c_{21}v_{21} - c_{19} \cos 27 \cdot v_{20} + \cos(18+19)v_{12} + \\ & + c_{11}v_{11} - c_{10}v_{10} + c_9v_9 - c_8v_8 + [c_8 \cos 9 + c_{10} \cos(9+10)]v_7 + \\ & + c_5v_5 - c_4v_4 + c_3v_3 - c_2v_2 + c_2 \cos 1 \cdot v_1 + l_{17} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где} \quad c_{19} = T_{19-17}, \quad c_{21} = T_{21-17}; \quad (6a)$$

$$c_{11} = \frac{\sin(\alpha_{IV,VI} - \alpha_{IX,VII})}{\sin 14}, \quad c_{10} = \frac{\sin(\alpha_{V,VI} - \alpha_{IX,VII})}{\sin 14};$$

$$c_9 = T_{9-11}c_{11}, \quad c_8 = T_{8-11}c_{11}; \quad (66)$$

$$c_5 = \frac{\sin(\alpha_{II,III} - \alpha_{IX,VII})}{\sin 5}, \quad c_4 = \frac{\sin(\alpha_{A,III} - \alpha_{IX,VII})}{\sin 5};$$

$$c_3 = T_{3-4}c_4, \quad c_2 = T_{2-4}c_4; \quad (6b)$$

$$-v_{18} + \cos(26+27)v_{20} + d_{15}v_{15} - d_{14}v_{14} - d_{15} \cos 18 \cdot v_{12} +$$

$$+ d_{11}v_{11} - d_{10}v_{10} + d_9v_9 - d_8v_8 + [d_8 \cos 9 + d_{10} \cos(9+10)]v_7 +$$

$$+ d_5v_5 - d_4v_4 + d_3v_3 - d_2v_2 + d_2 \cos 1 \cdot v_1 + l_{18} = 0, \quad (7)$$

$$\text{где} \quad d_{15} = T_{15-18}, \quad d_{14} = T_{14-18}; \quad (8a)$$

$$d_{11} = \frac{\sin(\alpha_{IV,VI} - \alpha_{X,VIII})}{\sin 14}, \quad d_{10} = \frac{\sin(\alpha_{V,VI} - \alpha_{X,VIII})}{\sin 14};$$

$$d_9 = T_{9-11}d_{11}, \quad d_8 = T_{8-11}d_{11}; \quad (86)$$

$$d_5 = \frac{\sin(\alpha_{II,III} - \alpha_{X,VIII})}{\sin 5}, \quad d_4 = \frac{\sin(\alpha_{A,III} - \alpha_{X,VIII})}{\sin 5};$$

$$d_3 = T_{3-4}d_4, \quad d_2 = T_{2-4}d_4. \quad (8b)$$

Эти примеры позволяют сделать вывод, что при составлении видоизмененных типовых условных уравнений сторон в цепях треугольников, имеющих несколько дирекционных углов связующих сторон, возможны два случая:

1. Приближенные координаты пунктов, расположенных на концах избыточной стороны, вычисляются от одного и того же или двух смежных исходных пунктов.

2. Приближенные координаты указанных пунктов определяются от разных исходных.

В первом случае в уравнение входят поправки сторон цепи треугольников, заключенной между двумя необходимыми дирекционными углами. Такими уравнениями являются уравнения сторон s_8 и s_{13} . Их составляют по тем же правилам, что и уравнения стороны s_9 (рис. 2 в работе [4]) и стороны s_{11} (рис. 3 в работе [4]). Во втором случае уравнение содержит поправки всех необходимых сторон, которые использовались для вычисле-

ния приближенных координат пунктов, расположенных на концах избыточной стороны, от исходных и состоит из независимых друг от друга частей (уравнения сторон s_{16} , s_{17} и s_{18}). Та часть уравнения, в которую входит поправка избыточной стороны, составляется по правилам образования типовых условных уравнений сторон [2]. Части уравнения, соответствующие остальным звеньям треугольников (звенья между $\alpha_{VI, VII}$ и $\alpha_{III, IV}$, $\alpha_{III, IV}$ и $\alpha_{A, I}$), подчиняются правилам образования знаков и формул коэффициентов при поправках сторон s_{10} , s_8 , s_{11} , s_{13} и s_{12} в видоизмененных типовых условных уравнениях (8) и (15), приведенных в работе [4].

Если приближенные координаты пунктов I—VIII (рис. 1) вычисляют от исходных A и $\alpha_{A, I}$ с участием $\alpha_{III, IV}$, а координаты X и IX — от исходных B и $\alpha_{B, X}$, то избыточными будут стороны s_8 , s_{16} , s_{17} и s_{18} и дирекционный угол $\alpha_{VI, VII}$.

Видоизмененное типовое условное уравнение дирекционного угла $\alpha_{VI, VII}$ необходимой стороны записывают

$$-a_{13}v_{13} + a_{12}v_{12} - a_{11}v_{11} + a_{10}v_{10} - a_9v_9 + a_8v_8 - \\ - [a_8 \cos 9 + a_{10} \cos (9+10)]v_7 + \frac{s_{12}}{\rho''} l_{\alpha_{VI, VII}} = 0, \quad (9)$$

где $a_{13} = \operatorname{cosec} 17$, $a_{12} = \operatorname{ctg} 17$; $a_{11} = T_{11-12}a_{12} + \frac{\cos(14+15)}{\sin 14}$,

$$a_{10} = T_{10-12}a_{12} + \frac{\cos 15}{\sin 14}; \quad a_9 = T_{9-11}a_{11} + T_{9-13}a_{13}, \\ a_8 = T_{8-11}a_{11} + T_{8-13}a_{13}. \quad (10)$$

Уравнение (9) имеет более простой вид, чем имело бы типовое условное уравнение, составленное для того же дирекционного угла [1, 2].

В формулу (9) входят только поправки сторон звена треугольников, расположенного между необходимым дирекционным углом $\alpha_{III, IV}$ и избыточным $\alpha_{VI, VII}$, и отсутствуют поправки v_6 , v_4 , v_5 , v_3 и v_1 , которые неизбежно входили бы в типовое условное уравнение дирекционного угла $\alpha_{VI, VII}$. Знаки коэффициентов в (9) и формулы (10) подчиняются правилам составления типового условного уравнения дирекционного угла необходимой стороны [1, 2], если пункт III условно считать исходным. Сравнивая же (9) и (10) с (1) и (2) видим, что выгоднее составлять видоизмененное типовое условное уравнение стороны.

Правила составления видоизмененного условного уравнения дирекционного угла необходимой стороны могут с успехом применяться для составления весовых функций дирекционных углов. В этом случае в весовую функцию [3] будут входить поправки сторон звена треугольников, соединяющего ближайший заданный дирекционный угол с оцениваемым.

Для получения видоизмененного типового условного уравнения дирекционного угла избыточной стороны предположим, что приближенные координаты пунктов $I-VI$ (рис. 1) вычисляются от исходных A и $a_{A,I}$ с участием $a_{III,IV}$, а пунктов $X, IX, VIII$ и VII — от B и $a_{B,X}$. Тогда возникают типовые условные уравнения сторон $s_6, s_{12}, s_{13}, s_{14}$ и видоизмененное типовое условное уравнение дирекционного угла $\alpha_{VI,VII}$. Последнее выглядит так:

$$\begin{aligned} & -a_{15}v_{15}+a_{17}v_{17}-a_{18}v_{18}+a_{16}v_{16}-a_{19}v_{19}+a_{21}v_{21}+ \\ & +[a_{19} \cos 27+a_{18} \cos (26+27)]v_{20}-a_{11}v_{11}+a_{10}v_{10}-a_9v_9+ \\ & +a_8v_8-[a_8 \cos 9+a_{10} \cos (9+10)]v_7-a_5v_5+a_4v_4-a_3v_3+ \\ & +a_2v_2-a_2 \cos 1 \cdot v_1+\frac{s_{12}}{\rho''} l \alpha_{VI,VII}=0. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты вычисляют

$$\begin{aligned} a_{15} &= \frac{\cos (18+19)}{\sin 19}; \quad a_{17} = \frac{\cos 18}{\sin 19}; \quad a_{16} = T_{16-15}a_{15}; \\ a_{18} &= T_{18-15}a_{15}; \quad a_{19} = T_{19-16}a_{16}+T_{19-17}a_{17}; \\ a_{21} &= T_{21-16}a_{16}+T_{21-17}a_{17}; \quad a_{11} = \frac{\cos (14+15)}{\sin 14}; \\ a_{10} &= \frac{\cos 15}{\sin 14}; \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} a_9 &= T_{9-11}a_{11}; \quad a_8 = T_{8-11}a_{11}; \\ a_5 &= \frac{\cos (\alpha_{II,III}-\alpha_{VII,VI})}{\sin 5}; \quad a_4 = \frac{\cos (\alpha_{A,III}-\alpha_{VII,VI})}{\sin 5}; \\ a_3 &= T_{3-4}a_4; \quad a_2 = T_{2-4}a_4. \end{aligned} \quad (126)$$

В уравнении (11) участвуют поправки всех необходимых сторон, которые использовались для вычисления приближенных координат пунктов VI и VII , расположенных на концах стороны s_{12} с избыточным дирекционным углом $\alpha_{VI,VII}$. Уравнение состоит из двух частей.

Часть уравнения, которая соответствует звену треугольников, расположенному между $a_{III,IV}$ и $a_{B,X}$ (ближайшими от избыточного $\alpha_{VI,VII}$ необходимыми дирекционными углами), образуется по тем же правилам, что и типовое условное уравнение дирекционного угла избыточной стороны [1, 2].

Вторая часть, соответствующая звену треугольников между необходимым дирекционным углом $\alpha_{A,I}$ и пунктом III , имеет свои особенности. Знаки коэффициентов этой части определяются знаками a_5 и a_4 , которые зависят от дирекционных углов,

входящих в формулы для вычисления a_5 и a_4 (126). Знаменателем формул служит синус угла между сторонами s_5 и s_4 , числителями — косинусы разностей дирекционных углов: для вычисления коэффициента при поправке стороны s_5 используется дирекционный угол парной ей стороны s_4 и избыточный дирекционный угол $\alpha_{VII,VI}$, а в формулу a_4 — дирекционный угол стороны s_5 и $\alpha_{VII,VI}$. Косинус — четная функция, поэтому от перестановки дирекционных углов в разности знак коэффициента не изменится. Знаки a_5 и a_4 зависят от направлений

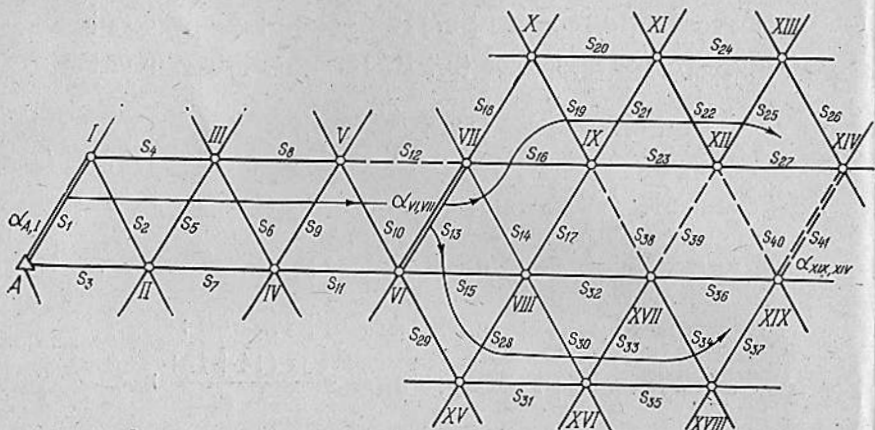


Рис. 2. Составление видоизмененных типовых условных уравнений в сети трилатерации.

дирекционных углов. В формулу (126) входят дирекционные углы необходимых сторон направлений на пункт III (расположенный на конце стороны, имеющей необходимый дирекционный угол) и избыточный дирекционный угол направления на пункт VI (приближенные координаты которого вычисляли с участием сторон s_5 и s_4). Знаки коэффициентов a_5 , a_4 , a_3 , a_2 и при v_1 в (11) подчиняются правилам знаков коэффициентов первой части того же уравнения. Знаки коэффициентов второй части, очевидно, останутся те же, если в (126) все дирекционные углы изменить на 180° , то есть взять $\alpha_{III,II}$, $\alpha_{III,A}$ и $\alpha_{VI,VII}$. Однако если изменить на 180° дирекционные углы только необходимых сторон или же только избыточный дирекционный угол, то знаки a_5 , a_4 , a_3 , a_2 и при v_1 в (11) необходимо поменять на противоположные.

Не приводя больше примеров, отметим, что в видоизмененных типовых условных уравнениях дирекционных углов избыточных сторон число частей, подобных второй части уравнения (11), всегда будет равно числу необходимых дирекционных углов связующих сторон, участвующих в вычислении приближенных координат пунктов, которые расположены на концах избыточной стороны с избыточным дирекционным углом.

В обширных сетях трилатерации могут иметь место случаи, когда приближенные координаты пунктов, расположенных на концах избыточных сторон, вычисляются от одного и того же исходного пункта с участием одного и того же заданного дирекционного угла, но по двум разным цепям треугольников.

Пусть, например, в сети трилатерации (рис. 2) A — исходный пункт, $\alpha_{A, I}, \alpha_{VI, VII}, \alpha_{XIV, XIX}$ — заданные дирекционные углы. Приближенные координаты пунктов вычисляют по цепям треугольников, указанным стрелками. Дирекционные углы $\alpha_{A, I}, \alpha_{VI, VII}$ — необходимые, $\alpha_{XIV, XIX}$ — избыточный. В видоизмененные формулы поправок координат [4] пунктов $VII—XVIII$ войдут составной частью поправки координат пункта VI . Избыточным сторонам $s_{38}, s_{39}, s_{40}, s_{41}$ и дирекционному углу $\alpha_{XIV, XIX}$ будут соответствовать типовые условные уравнения [2], в которых не будет поправок сторон $s_1—s_{11}$ (участвовавших в вычислении приближенных координат пункта VI), а коэффициент при v_{13} будет иметь вид коэффициента при поправке стороны, имеющей дирекционный угол, если пункт VI считать исходным. Если бы в цепях треугольников от пункта VI до пункта XIV и от VI до XIX (или хотя бы в одной из них) имелись необходимые дирекционные углы связующих сторон, то это привело бы к возникновению видоизмененных типовых условных уравнений, подчиняющихся установленным выше правилам. Поправки сторон $s_1—s_{11}$ в этих уравнениях также отсутствовали бы.

Таким образом, видоизмененные типовые условные уравнения сторон и дирекционных углов имеют более простой вид по сравнению с типовыми условными уравнениями. Поэтому при уравнивании сетей трилатерации цепи треугольников для вычисления приближенных координат пунктов следует (по возможности) выбирать так, чтобы стороны с заданными дирекционными углами были связующими. Дирекционные углы связующих сторон выгодно использовать для вычисления приближенных координат, так как это приводит к возникновению видоизмененных типовых условных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кваснюк Б. П. Составление типового условного уравнения в сетях трилатерации для избыточного дирекционного угла. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 9.
2. Кваснюк Б. П. Об уравнении сетей трилатерации по способу условий. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.
3. Кваснюк Б. П. О составлении весовых функций в трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 22.
4. Кваснюк Б. П. Видоизмененные типовые условные уравнения сторон в трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, вып. 25.

Работа поступила 29 декабря 1975 года.
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.