УДК 528.283/528.31

В. А. КОВАЛЕНКО

О РАСХОЖДЕНИИ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО АЗИМУТОВ НА СДВОЕННЫХ ПУНКТАХ ЛАПЛАСА

Расхождение прямого и обратного азимутов, полученных из астрономических наблюдений в конечных точках базисной сто-

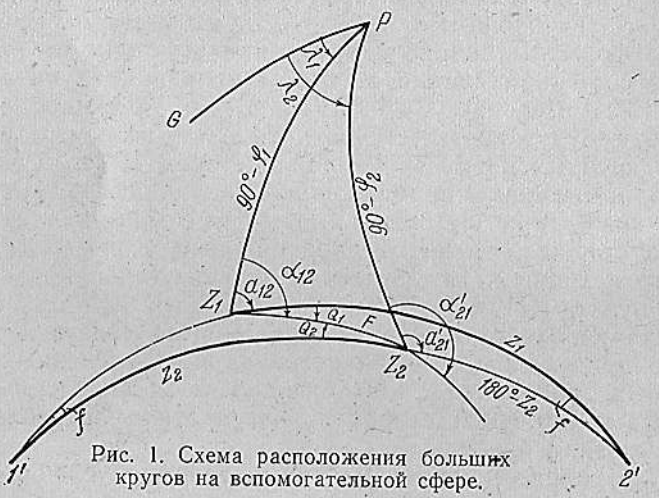

Рис. 1. Схема расположения больших кругов на вспомогательной сфере.

роны (на сдвоенных пунктах Лапласа), принято находить по формуле

$$\Delta a = (a_{12} - a_{21} \pm 180°) - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi_{ср}, \qquad (1)$$

где a_{12} и a_{21} — значения прямого и обратного азимутов, отнесенных к астрономическому меридиану; λ_1 и λ_2 — астрономические долготы первого и второго астропунктов; $\varphi_{ср} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ — средняя широта.

Величина Δa имеет два назначения: характеризует точность астрономических определений азимутов и долгот на пунктах Лапласа (абсолютное значение Δa не должно превышать 2,5″); определяет свободный член азимутального условия базисной стороны, а через него — уравненные поправки в измеренные азимуты и долготы [1]. Считают, что расхождение прямого и обратного азимутов является следствием случайных погрешностей нахождения азимутов и долгот, а также суммарного влияния боковой рефракции вдоль измеряемого направления [2].

При оценке причин, вызывающих появление разности Δa, не принимают во внимание несовпадение вертикальных пло-

скостей, проведенных в первом и втором пунктах через соединяющую их линию. Между тем это расхождение при определенных условиях может привести к изменению Δa на величину, пренебрегать которой нельзя.

Проведем через центр сферы линии, параллельные оси мира, направлениям отвеса и хорде, соединяющей точки наблюдения. На рис. 1: PZ_1, PZ_2 — астрономические меридианы сдвоенных пунктов Лапласа; $1'Z_12'$, $1'Z_22'$ — взаимные вертикалы; f — угол между вертикалами; a_{12} — азимут направления с пункта *1* на пункт *2*; $a'_{21}=a_{12}-180°$, при этом a_{21} — азимут направления с пункта *2* на пункт *1*; z_1, z_2 — измеренные зенитные расстояния, исправленные поправкой за рефракцию; Q_1, Q_2 — углы между вертикалами и дугой Z_1Z_2, отсчитываемые по ходу часовой стрелки от направления на смежный пункт; $a_{12}=a_{12}+Q_1$, $a'_{21}=a'_{21}+Q_2$ — азимуты дуги Z_1Z_2.

Из треугольника PZ_1Z_2 по аналогиям Непера получим:

$$\operatorname{tg}\frac{a_{12}-a'_{21}}{2}=\operatorname{tg}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\,\frac{\sin\varphi_{ср}}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

При разложении в ряд тригонометрических функций разности координат и азимутов члены третьего порядка малости измеряются тысячными долями секунды. Опуская их, находим, что

$$a_{12}-a'_{21}=(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi_{ср} \text{ или } (a_{12}+Q_1)-(a'_{21}+Q_2)=$$
$$=(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi_{ср}.$$

Отсюда $$a_{12}-a'_{21}=(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi_{ср}-(Q_1-Q_2). \qquad (2)$$

Из треугольника $Z_12'Z_2$

$$\operatorname{tg}\frac{Q_1-Q_2}{2}=\operatorname{tg}\frac{f}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(z_1-z_2)}{\cos\frac{1}{2}[180°-(z_1+z_2)]}.$$

Разность $[180°-(z_1+z_2)]$ имеет тот же порядок, что и величины $(\varphi_1-\varphi_2)$ и $(\lambda_1-\lambda_2)$. Применяя разложение в ряд, определяем

$$Q_1-Q_2=f\sin\frac{1}{2}(z_1-z_2). \qquad (3)$$

На основании (2) и (3) формулу для вычисления прямого и обратного азимутов запишем

$$\Delta a=(a_{12}-a_{21}\pm180°)-(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi_{ср}+f\sin\frac{1}{2}(z_1-z_2). \qquad (4)$$

Для оценки третьего члена первой части уравнения (4), который учитывает несовпадение взаимных вертикальных плоскостей, выразим угол f через измеренные величины φ_1, λ_1, a_{12}, z_1 и φ_2, λ_2, a_{21}, z_2. Воспользуемся формулами синуса и косинуса полусуммы и полуразности углов сферического треугольника.

Из треугольника PZ_1Z_2: $\cos\frac{\alpha_{12}+\alpha_{21}}{2}=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}F}\times$

$$\times\cos\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2};\quad \sin\frac{\alpha_{12}+\alpha'_{21}}{2}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}F}\sin\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}.$$

Здесь $F=\smile Z_1Z_2$. Пренебрегая членами с третьими степенями малых величин, получаем

$$\varphi_1-\varphi_2=F\cos\alpha_{ср};\quad (\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_{ср}=F\sin\alpha_{ср}. \qquad (5)$$

Из треугольника $Z_12'Z_2$: $\sin\frac{Q_1+Q_2}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(z_1-z_2)}{\sin\frac{1}{2}F}\times$

$\times\sin\frac{f}{2}$, откуда $F\sin\frac{Q_1+Q_2}{2}=f\cos\frac{z_1-z_2}{2}$.

Поскольку $Q_1=\alpha_{12}-a_{12}$, а $Q_2=\alpha'_{21}-a'_{21}$, то $f\cos\frac{z_1-z_2}{2}=$

$=F\sin\left(\frac{\alpha_{12}+\alpha_{21}}{2}-\frac{a_{12}+a'_{21}}{2}\right)=F\sin\alpha_{ср}\cos a_{ср}-F\cos\alpha_{ср}\times$
$\times\sin a_{ср}$.

С учетом уравнений (5) $f\cos\frac{z_1-z_2}{2}=-(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_{ср}\times$
$\times\cos a_{ср}+(\varphi_1-\varphi_2)\sin a_{ср}$.

Таким образом, угол между взаимными вертикалами на сдвоенных пунктах Лапласа определим из выражения

$$f=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)\sin a_{ср}-(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_{ср}\cos a_{ср}}{\cos\frac{1}{2}(z_1-z_2)}, \qquad (6)$$

где $a_{ср}=\frac{a_{12}+a_{21}\pm180^\circ}{2}$.

Если через центр сферы провести линии, параллельные нормалям к поверхности эллипсоида в пунктах *1* и *2*, то на поверхности сферы получим точки $Z_1^г$ и $Z_2^г$ — геодезические зениты (рис. 2). Угол f выразится суммой трех углов: $f=f_\gamma+f_1+f_2$, где f_γ — угол между взаимными нормальными сечениями; f_1 и f_2 — углы между плоскостями вертикального и нормального сечений, возникающие вследствие уклонения отвесных линий в плоскости, перпендикулярной направлению между пунктами. Составляющие угла f могут быть вычислены по следующим приближенным формулам:

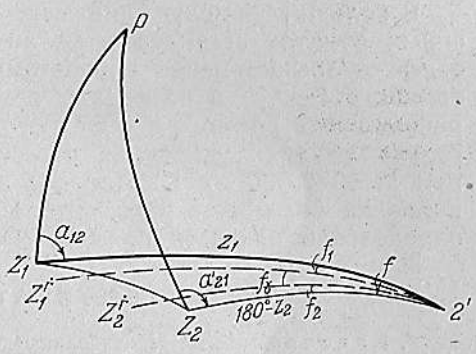

Рис. 2. Составляющие угла f.

$$f_\gamma=e^2(B_1-B_2)\cos^2 B_m \sin A_{12};$$

$$f_i=(\xi_i \sin a_i-\eta_i \cos a_i)\operatorname{cosec} z_i. \qquad (7)$$

Величины в правых частях формул представлены общепринятыми в высшей геодезии обозначениями. Уравнения (7) были использованы в качестве контрольных при нахождении угла f по формуле (6) на пяти сдвоенных пунктах Лапласа в Карпатах. Результаты вычислений приведены ниже:

Базисные стороны	$\xi_2-\xi_1$	$\eta_2-\eta_1$	f_γ	f_1	f_2	$f=f_\gamma+f_1+f_2$	f по (6)
1	−2,64	+2,91	+0,20	+1,79	+0,03	+1,93	+1,91
2	−5,20	+2,79	+0,31	+3,65	−0,06	+3,90	+3,91
3	−0,27	+2,30	+0,58	−1,91	−0,03	−1,36	−1,36
4	+2,56	+0,12	+0,65	−0,08	+2,05	+2,62	+2,62
5	+4,93	−0,49	−0,11	−2,32	+3,40	+0,97	+0,97

Эти данные показывают, что угол f имеет порядок, примерно равный порядку разности составляющих уклонений отвесной линии в конечных точках базисной стороны. Подставим значение f, определяемое формулой (6), в уравнение (4): $\Delta a=(a_{12}-a_{21}\pm 180°)-(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi_{ср}+[(\varphi_1-\varphi_2)\sin a_{ср}-(\lambda_1-\lambda_2)\times\cos\varphi_{ср}\cos a_{ср}]\operatorname{tg}\frac{z_1-z_2}{2}$. Обозначим

$$\delta a_f=[(\varphi_1-\varphi_2)\sin a_{ср}-(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_{ср}\cos a_{ср}]\operatorname{tg}\frac{z_1-z_2}{2}, \qquad (8)$$

тогда $$\Delta a = (a_{12} - a_{21} \pm 180°) - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi_{ср} + \delta a_f. \quad (9)$$

В большинстве случаев изменения уклонений отвеса на сдвоенных пунктах Лапласа вряд ли превышают 5″, а 1/2 ($z_1 - z_2$) — обычно менее 1°, поэтому поправка δa_f получится не больше 0,1—0,3″ и не окажет заметного влияния на величину расхождения прямого и обратного азимутов. Однако во многих горных районах уклонения отвесных линий меняются в среднем от 10 до 30″, а 1/2 ($z_1 - z_2$) достигает 3°. В этих условиях поправка δa_f может превысить 1″ и должна быть учтена при определении разности прямого и обратного азимутов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения. Т. 4. М., Геодезиздат, 1955.
2. Уралов С. С. Общая теория методов геодезической астрономии, М., «Недра», 1973.

Работа поступила 22 января 1976 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.