УДК 519.240

*П. Г. ЧЕРНЯГА*

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НЕИЗВЕСТНЫХ В КОМПЛЕКСНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

В статье рассматривается вопрос о том, как влияют ошибки округления результатов наблюдений на неизвестные, определяемые комплексным методом [1, 2].

Пусть дана матрица результатов наблюдений

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1k} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Допустим, что ошибки округления одинаковы и равны 0,5 единиц последнего знака, а также что промежуточные вычисления производятся безошибочно.

Рассматриваем в первую очередь вопрос о том, какие ошибки вызовут в свободных членах $K_{M_l}$ и $K_{D_l}$ систем (2) и (3) [1, 2] ошибки округления результатов наблюдений

$$K_{M_l} = \frac{1}{k}(M_A\bar{\tau} + M_{A_0} + M_B)'(M_A\bar{\tau} + M_{A_0} + M_B)$$

и (2)

$$K_{D_l} = \frac{1}{m}(A\bar{\tau} + A_0 + B)',(A\bar{\tau} + A_0 + B) - \frac{1}{k}(M_A\bar{\tau} + M_{A_0} + M_B)'(M_A\bar{\tau} + M_{A_0} + M_B). \tag{3}$$

Если обозначим предельную ошибку округления через $\alpha$, то среднюю квадратическую ошибку математического ожидания столбцов матрицы (1), учитывая независимость ошибок округления, записываем в виде [3]:

$$\sigma_{m_{l_k}} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3m}}, \tag{4}$$

где $m$ — количество реализаций (количество наблюдений по параметру $\tau$). Зная $\sigma_{m_{l_k}}$, можно определить среднюю квадратическую ошибку $m^2_{l_k}$ и $m_{l_{k-r}} m_{l_k}$,

$$\sigma_{m^2_{l_k}} = \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{3m}} m_{l_k} \tag{5}$$

и

$$\sigma_{m_{l_{k-r}} m_{l_k}} = \pm \alpha \sqrt{\frac{m^2_{l_k} + m^2_{l_{k-r}}}{3m}}. \tag{6}$$

Как известно [4], оценка дисперсий и ковариационных моментов вычисляется по следующим формулам:

$$D_{l_k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_{ik}^2}{m} - m_{l_k}^2; \tag{7}$$

$$K_{l_{k-r}\, l_k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_{i\,(k-r)}\, l_{ik}}{m} - m_{l_{k-r}} m_{l_k}. \tag{8}$$

Тогда средние квадратические ошибки для $D_{l_k}$ и $K_{l_{k-r}\, l_k}$ соответственно будут равны

$$\sigma_{D_{l_k}} = \pm 2\alpha \sqrt{\frac{Q_k + m_{l_k}^2}{3m}}, \tag{9}$$

где

$$Q_k = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_{ik}^2}{m}$$

и

$$\sigma_{K_{l_{k-r}\, l_k}} = \pm \alpha \sqrt{\frac{m_{l_{k-r}}^2 + m_{l_k}^2 + Q_{l_{k-r}} + Q_{l_k}}{3m}}. \tag{10}$$

Учитывая дополнительные условия для однозначного решения систем (2) и (3), переходим к вычислению средних квадратических ошибок неизвестных. Неизвестные любой линейной системы уравнений можно выразить функцией свободных членов.

В общем виде это можно записать так [5]:

$$X = A^{-1} W, \tag{11}$$

где $A^{-1}$ — обратная матрица коэффициентов системы; $W$ — матрица свободных членов; $X$ — матрица неизвестных.

Свободные члены формул (2) и (3) в отношении ошибок округления являются независимыми. Поэтому для определения средних квадратических ошибок неизвестных $x_i$ можно применить формулу [3]:

$$\sigma_{x_i}^2 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_1}\right)^2 \sigma_{w_1}^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_2}\right)^2 \sigma_{w_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_n}\right)^2 \sigma_{w_n}^2 \tag{12}$$

или в матричном виде

$$\Sigma_X = A^{**} \Sigma_W, \tag{13}$$

где $A^{**}$ — матрица, элементы которой есть квадраты элементов обратной матрицы коэффициентов системы; $\Sigma_X$ и $\Sigma_W$ — матрицы-столбцы, элементы которых есть квадраты средних квадратических ошибок соответственно неизвестных и свободных членов.

Формулу (13) для систем (2) и (3) можно записать в таком виде: для системы (2)

$$\Sigma_{M_A} = A^{**}\, \Sigma_{M_l}, \tag{14}$$

для системы (3)

$$\Sigma_{D_A} = A^{**}\, \Sigma_{D_l}, \tag{15}$$

где

$$A^{**}=\begin{vmatrix}
\frac{A^2_{1\,(p+1)}}{\Delta^2} & \frac{A^2_{2\,(p+1)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{k\,(p+1)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(2k-1)\,(p+1)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{\frac{k(k-1)}{2}\,(p+1)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(u+s)\,(p+1)}}{\Delta^2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{A^2_{1\,(n+q)}}{\Delta^2} & \frac{A^2_{2\,(n+q)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{k\,(n+q)}}{A^2} & \cdots & \frac{A^2_{(2k-1)\,(n+q)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{\frac{k(k-1)}{2}\,(n+q)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(u+s)\,(n+q)}}{\Delta^2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{A^2_{1\,(h+j)}}{\Delta^2} & \frac{A^2_{2\,(h+j)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{k\,(h+j)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(2k-1)\,(h+j)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{\frac{k(k-1)}{2}\,(h+j)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(u+s)\,(h+j)}}{\Delta^2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{A^2_{1\,(g+f)}}{\Delta^2} & \frac{A^2_{2\,(g+f)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{k\,(g+f)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(2k-1)\,(g+f)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{\frac{k(k+1)}{2}\,(g+f)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(u+s)\,(g+f}}{\Delta^2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{A^2_{1(\,u+s)}}{\Delta^2} & \frac{A^2_{2\,(u+s)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{k\,(u+s)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(2k-1)\,(u+s)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A_{\frac{k(k-1)}{2}\,(u+s)}}{\Delta^2} & \cdots & \frac{A^2_{(u+s)\,(u+s)}}{\Delta^2}
\end{vmatrix}$$

$$p=0,1,2,3,\cdots(n-1),\ q=1,2,3,\cdots k;$$

$$j=1,2,3,\cdots\frac{n(n-1)}{2};\ f=1,2,3,\cdots n\cdot k;$$

$$s=1,2,3,\cdots\frac{k(k-1)}{2};$$

$$h=n+q;\quad p+l\leqslant n;\quad g=h+j;\quad q+v\leqslant k;\quad u=g+f;$$

$$l=1,2,3,\cdots(n-1);\quad v=1,2,3,\cdots k.$$

$$\Sigma_{M_A}=\begin{vmatrix}\sigma^2_{m^2_{a_p}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m^2_{\beta_q}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m_{a_p}m_{p-l}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m_{a_p}m_{\beta_q}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m_{\beta_{q+v}}m_{\beta_q}}\end{vmatrix};\ \Sigma_{M_l}=\begin{vmatrix}\sigma^2_{m^2_{l_1}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m^2_{l_k}}\\ \sigma^2_{m_{l_1}m_{l_2}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m_{l_1}m_{l_k}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{m_{l_{k-r}}m_{l_k}}\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix};\ \Sigma_{D_A}=\begin{vmatrix}\sigma^2_{D_{a_p}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{D_{\beta_q}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{K_{a_p}a_{p-l}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{K_{a_p}\beta_q}\\ \vdots\\ \sigma^2_{K_{\beta_{q+v}}\beta_q}\end{vmatrix};\ \Sigma_{D_l}=\begin{vmatrix}\sigma^2_{D_{l_1}}\\ \vdots\\ \sigma^2_{D_{l_k}}\\ \sigma^2_{K_{l_1}l_k}\\ \vdots\\ \sigma^2_{K_{l_1}l_k}\\ \vdots\\ \sigma^2_{K_{l_{k-r}}l_k}\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix}$$

Одновременно используя при решении систем (2) и (3) формулы (14) и (15), мы можем оценить, как влияют ошибки округления результатов наблюдений на неизвестные, определяемые комплексным методом. Оценка неизвестных по (14) и (15) удобна и легко выполняется на ЭЦВМ.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
2. Демидович Б. П. и Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.
3. Хижак Л. С. Комплексный метод исследования результатов наблюдений. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.
4. Хижак Л. С. Черняга П. Г. Разработка некоторых вопросов комплексного метода исследования результатов наблюдений. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.
5. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.



Работа поступила в редколлегию 20 декабря 1972 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.