

УДК 528.41

И. С. ТРЕВОГО

**О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО  
 И СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЙ  
 В ГОРОДСКОЙ И ИНЖЕНЕРНОЙ ПОЛИГОНОМЕТРИИ**

При предвычислении точности полигонометрии, оценке ее точности, для установления весов при ее уравнивании и т. д. надо знать надежные значения коэффициентов случайного  $\mu$  и систематического  $\lambda$  влияний.

Методика определения величин  $\mu$  и  $\lambda$  и их практические значения приводятся в работах известных ученых-геодезистов А. С. Чеботарева, Н. Г. Видуева, Н. Н. Лебедева, Н. А. Кузина, Д. С. Шенна, Б. И. Коськова и др. Величины  $\mu$  и  $\lambda$  можно найти по разности двойных измерений, по линейным невязкам ходов, по продольным невязкам вытянутых ходов. Однако получить надежные результаты этими методами трудно. Не случайно, например, значения  $\mu$  для стальной ленты, установленные разными авторами различными способами, колеблются в пределах от 0,0001 до 0,025 [11]. Рекомендации для расчета точности полигонометрии в разных источниках также не всегда согласуются между собой (табл. 1).

Таблица 1

Значения  $\mu$  и  $\lambda$  для полигонометрии 1-го разряда

Источник	$\mu$	$\lambda$	$\lambda : \mu$
[14]	0,0010	0,000025	1 : 40
[ 9]	0,0005	0,000020	1 : 25
[ 3]	0,0008	0,000020	1 : 40
[ 2]	0,0005	0,000020	1 : 25
[ 5]	—	—	1 : 25—1 : 30

В. И. Акулов [1] предложил определять  $\mu$  для полигонометрических сетей по линейным  $f_S$  и угловым  $f_B$  невязкам замкнутых полигонов

$$\mu^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_1^N \frac{f_S^2}{|S|} - \frac{1}{45\rho^2} \sum_1^N f_B [S] \right) \quad (1)$$

и по невязкам разомкнутых полигонов

$$\mu^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N \left( \frac{f_S^2}{|S| + 16 \cdot 10^{-4} L^2} - \frac{1}{45\rho^2} \sum_1^N f_B^2 \frac{(|S| + L)^2}{|S| + 16 \cdot 10^{-4} L^2} \right), \quad (2)$$

где  $N$  — число ходов в сети,  $S$  — периметр хода,  $L$  — длина замыкающей хода.

Этот способ заслуживает внимания, но, по мнению самого автора, является упрощенным и его можно рекомендовать для установления весов

при раздельном уравнивании. Использовать формулы (1) и (2) для строгого установления весов довольно трудно, поскольку формула (1) не учитывает влияния ошибок опорных пунктов, а они неизбежно будут влиять на поправки углов и сторон. Выражение (2) выведено не строго при  $\lambda = 0,04\mu$ .

Надежность получения значений  $\mu$  можно проконтролировать, если сравнить их со значениями  $\mu'$ , определенными после уравнивания. Обычно  $\mu$  и  $\mu'$  не совпадают, но Ю. И. Маркузе [7] показал, что из этого затруднительного положения можно выйти, применяя метод последовательных приближений.

При установлении веса по известной формуле

$$p_{\beta} = \frac{\mu^2}{m_{\beta}^2} \quad (3)$$

он предлагает в качестве первого приближения брать произвольное значение  $\mu$ , например, из табл. 1. Затем полученное после уравнивания  $\mu'$  подставить в формулу (3) и вновь уравнивать сеть и т. д. Приближения необходимо повторять, пока  $\mu$  и  $\mu'$  не будут совпадать между собой.

Число приближений, естественно, зависит от того, насколько надежно известно  $\mu$  для первого приближения. В работе [7] дается выражение для определения коэффициента систематического влияния  $\lambda$  и рекомендуется также метод приближений. Несмотря на трудоемкость, этот способ может дать хорошие результаты.

Мы решаем задачу определения надежных значений  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$  на основании большого производственного материала. Для этого был собран материал по полигонометрии I-го разряда, проложенной с помощью стальных проволок на территории 64 городов УССР. Общая протяженность 425 ходов (4198 линий) составила 1000 км.

По каждому ходу на основании формулы [14] средней квадратической ошибки конечной точки хода

$$M^2 = \mu^2 [S] + \lambda^2 L^2 + \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} [D^2], \quad (4)$$

где  $D^*$  — расстояние от центра тяжести до вершины хода, составлены 425 уравнений погрешностей вида

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z - l_1 &= v_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z - l_2 &= v_2, \\ \dots & \\ a_{425}x + b_{425}y + c_{425}z - l_{425} &= v_{425}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В выражениях (5)  $a = [S] \cdot 10^{-3}$ ;  $b = L^2 \cdot 10^{-6}$ ;  $c = [D^2] \cdot 10^{-6}$ ;  $x = \mu^2 \times 10^3$ ;  $y = \lambda^2 \cdot 10^6$ ;  $z = (m_{\beta}^2 : \rho^2) \cdot 10^6$ . В качестве свободных членов использовались линейные невязки разомкнутых ходов, опирающихся на твердые и узловые точки  $f_S$ , выраженные в уравнениях (5) через  $l = f_S^2 \cdot 10^3$ .

Для определения искомых величин мы решали систему (5) по способу наименьших квадратов, предварительно преобразовывая свободные члены, иначе, как показали наши исследования, решение системы типа (5), как правило, приводит к невозможным (мнимым) значениям одного или двух неизвестных.

Б. Ф. Крутой и Ю. Г. Соколов [4] сделали попытку аналогичным образом, но с составлением двух уравнений по каждому ходу получить строгие значения  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$  для отдельной сети, без предварительного

\* При вычислении  $[D^2]$  частично использовался метод В. И. Акулова [1].

преобразования свободных членов. При этом все значения неизвестных оказались действительными:  $\mu^k = 0,00031$ ,  $\lambda^k = 0,000032$ ,  $m_{\beta}^k = \pm 3,8''$ .

Это вызвало у нас сомнение, и мы вновь составили и решили нормальные уравнения для примера [4] при строгом соблюдении методики [13]. При этом результаты получились иными и содержали мнимое значение  $\mu = 0,00020 \sqrt{-1}$ ;  $\lambda = 0,000031$ ;  $m_{\beta} = \pm 4,59''$ . Причиной получения неверных значений  $\mu^k$ ,  $\lambda^k$  и  $m_{\beta}^k$  оказалась вычислительная погрешность, допущенная в величине  $[bl]$ . В примере [4]  $[bl] = 212,86$ , а должно быть 241,64.

Получение мнимых значений для заведомо положительных искомым величин объясняется неустойчивостью свободных членов — невязок, которые могут принимать произвольные значения в широком диапазоне от нуля до предельных величин.

Если бы как частный случай для примера [4] удалось бы избежать получения мнимых значений неизвестных, то все же пользоваться ими трудно, так как надежность этих величин в данном случае, как будет показано ниже, довольно низкая.

Для преобразования свободных членов 425 уравнений поправок были разбиты нами на 31 группу по признаку подобия формы хода, числу углов поворота и периметру. Дальше в каждой группе вычислялись средние свободные члены  $l_{cp}$

$$l_{cp} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_{N_0}}{N_0}, \quad (6)$$

где  $N_0$  — число ходов (уравнений) в группе, которые приписывались всем уравнениям групп. Затем система (5) с новыми свободными членами  $l_{cp}$  была решена по способу наименьших квадратов (см. табл. 2, 1-я строка).

Таблица 2  
Вычисленные значения  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$  для полигонометрии I-го разряда (стальные проволоки)

Число уравнений	$\mu$	$\lambda$	$m_{\beta}$	$\lambda : \mu$
425	$0,00123 \pm 5\%$	$0,000022 \pm 8\%$	$\pm 6,3'' \pm 3\%$	1 : 55
31 ср.	$0,00124 \pm 4\%$	$0,000026 \pm 8\%$	$\pm 5,7'' \pm 4\%$	1 : 48

Показатели точности ходов (2-я строка) найдены путем решения 31 среднегруппового уравнения, полученного путем деления коэффициентов эквивалентных уравнений каждой группы на  $N_0$ . Это потребовало в несколько раз меньше времени на вычисления, чем при решении всех 425 уравнений вместе.

Незначительное расхождение результатов в 1-й и 2-й строках обусловлено некоторым различием ходов, объединенных в группы, поэтому значения  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$  точнее в 1-й строке.

Ошибка  $m_{\beta_2}$ , вычисленная для 425 ходов по [8]:

$$m_{\beta_2} = \pm \sqrt{\left[ \frac{f_{\beta}^2}{n} \right] \left( \frac{1}{N-K} \right)}, \quad (7)$$

где  $K$  — число узловых точек в сети, оказалась  $\pm 6,3''$ , то есть такой же, как в 1-й строке табл. 2.

М. Ф. Безматерных [2], предположив зависимость коэффициентов  $\mu$  и  $\lambda$  от длины хода и приняв  $\lambda = \frac{1}{40}\mu$ , получил формулу

$$\mu = \pm 40 \left( \frac{m_{[S]}}{[S]} \right) \sqrt{\frac{[S]}{1600 + [S]}}, \quad (8)$$

где  $m_{[S]}$  — ошибка линейных измерений в ходе.

На наш взгляд, подобное заключение ошибочно, поскольку  $\mu$  для данного мерного прибора, как правило [14], величина постоянная. На основании формулы (8) еще нельзя утверждать, что  $\mu$  растет с длиной хода, так как с увеличением  $[S]$  растет подкоренное выражение, а отношение  $\frac{m_{[S]}}{[S]}$  должно уменьшаться.

Таблица 3

Величины  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$ , полученные из четырех групп

$[S]$ , км	$N_0$	$\mu$	$\lambda$	$m_{\beta}$	$\lambda : \mu$
до 1,5	85	0,00113 ± 13%	0,000018 ± 45%	± 6,9" ± 11%	1 : 63
1,5—2,0	89	0,00086 ± 20%	0,000026 ± 14%	± 6,4" ± 10%	1 : 33
2,0—2,5	94	0,00114 ± 14%	0,000035 ± 8%	± 6,1" ± 13%	1 : 33
свыше 2,5	156	0,00108 ± 12%	0,000018 ± 18%	± 6,8" ± 5%	1 : 62

Из данных табл. 3, где приведены результаты решения 425 уравнений поправок, развитых после получения  $l_{cp}$  на четыре группы по длинам ходов, видно, что выводы, сделанные в [2], на практике не подтвердились.

Оценка точности выполнена нами по методу Энке с использованием формулы В. А. Романова [10] для  $P_x$

$$P_x = \frac{[cc \cdot 2] \cdot [bb \cdot 1][aa]}{[cc \cdot 1]_b [bb]}$$

где  $[cc \cdot 1]_b = [cc] - \frac{[bc]^2}{[bb]}$ .

Сравнивая табл. 2 и 1, замечаем, что полученный коэффициент  $\mu$  превышает расчетные значения, приведенные в табл. 1, и согласуется с результатом Н. Н. Лебедева [6]. Что же касается коэффициента  $\lambda$ , то он в табл. 2 и 1 практически совпал. Причиной завышения  $\mu$  в табл. 2, очевидно, являются ошибки исходных данных, которые почти целиком входят в  $\mu$ , а  $\lambda$ , как известно [14], зависит в основном от организации работ.

Результаты табл. 2 вполне надежны. Описанный в статье метод можно рекомендовать для получения коэффициентов  $\mu$  и  $\lambda$  для разных мерных приборов и полигонометрии разных разрядов. Это будет иметь важное значение для расчета точности полигонометрии при установлении весов по формуле (3) перед строгим уравниванием полигонометрии, в том числе и по методу [7]. Надо полагать, что использование величин, найденных предлагаемым методом, в качестве 1-го приближения в способе [7] сократит число приближений.

Полученная нами в табл. 2 и по формуле (8) ошибка измерения угла  $m_{\beta} = \pm 6,3''$ . Инструкция по полигонометрии допускает для 1-го разряда  $m_{\beta}$ , равную  $\pm 5''$ , хотя расчетная величина  $m_{\beta}$  получается равной  $\pm 6,2''$ . Очевидно, на  $m_{\beta}$ , как и на  $\mu$ , влияют ошибки исходных данных. Их можно определить, если будем знать  $\mu_0$  и  $m_{\beta_0}$ , освобожденные от ошибок исходных данных. Для этого  $\mu_0$  и  $m_{\beta_0}$  найдем путем решения уравнений погрешностей, составленных по замкнутым полигонам. Целесообразно получать  $\mu_0$  и  $\lambda$  для разных мерных приборов. В этом случае можно говорить об эффективности применения для данного разряда измерений того или иного мерного прибора, в том числе свето- радиодальномеров. Оценка точности радиодальномерных измерений по ошибкам  $\mu$  и  $\lambda$ , например, встречается у А. Л. Островского [9].

Таким образом, предложенный в статье метод гарантирует надежное получение величины  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $m_{\beta}$  при большом числе уравнений поправок (порядка нескольких сот).

Утверждение в [2] о зависимости коэффициента  $\mu$  от длины хода не подтвердилось на практике (см. табл. 3).

Рекомендации, сделанные в [4], ошибочны.

Приведенные нами в табл. 2 значения рекомендуется использовать при установлении весов перед строгим уравниванием полигонометрии, а соотношение  $\lambda : \mu \approx 1 : 50$  — применять при ее проектировании.

Определение ошибок  $\mu_0$  и  $m_p$ , даст возможность судить о погрешностях исходных данных и о целесообразности применения отдельных мерных приборов для данного класса измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акулов В. И. Установление весов ходов при раздельном уравнивании полигонометрической сети. «Геодезия и картография», № 2, 1968.
2. Безматерных М. Ф. О точности линейных измерений в полигонометрии на территориях городов и промышленных предприятий. Тр. Воронеж. ин-та, 1968.
3. Коськов Б. И. Справочное руководство по съемке городов, М., 1968.
4. Крутой Б. Ф., Соколов Ю. Г. Оценка точности угловых и линейных измерений при уравнивании. Тр. Томского ун-та, 1970.
5. Кузин Н. А., Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской и инженерной полигонометрии. Геодезиздат, М., 1954.
6. Лебедев Н. Н. Курс инженерной геодезии. «Недра», М., 1970.
7. Маркузе Ю. И. К оценке точности по невязкам полигона до и после уравнивания. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 6, 1965.
8. Наставление по предварительной обработке полигонометрии ГУГК, 1967.
9. Островский А. Л. Исследование влияния атмосферы на точность радиодальномерных измерений на всхолмленной местности. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 10, 1969.
10. Романов В. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Углетехиздат, М., 1952.
11. Труньков И. И. К вопросу о точности линейных измерений. Тр. МИИЗ, 40, 1969.
12. Шенн Д. С. Городская полигонометрия. Госстройиздат, М., 1952.
13. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Геодезиздат, М., 1958.
14. Чеботарев А. С. Геодезия, ч. II. Геодезиздат, М., 1962.

Работа поступила 22 апреля 1971 года  
Рекомендована кафедрой геодезии  
Львовского политехнического института.