

# АПРОКСИМАЦІЯ ПОТЕНЦІАЛУ ПЛАНЕТИ НЕПЕРЕРВНИМИ ФУНКЦІЯМИ

## Вступ

Потенціал планети, зображений в інтегральній формі

$$V = \int \frac{\delta}{r} \delta \tau,$$

на практиці подається в різному вигляді залежно від своєї суті: зовнішній – як лінійна комбінація зовнішніх кульових функцій, внутрішній – як сума внутрішніх кульових функцій. Оскільки потенціал – неперервна функція в усьому просторі, то можна ставити задачу апроксимації  $V$  деякою послідовністю функцій (не обов'язково гармонійних). Відхід

від гармонійності дає змогу будувати алгоритм обчислення  $V$  як всередині планетарного тіла, так і поза ним за допомогою одних і тих же формул. Треба підкреслити, що такий підхід не є новим, наприклад, в [1] наголошується на можливості такої побудови. Нижче наводиться дещо інший підхід до розв'язання цієї проблеми.

## Виклад основного матеріалу

В основі зображень потенціалу є розділення радіус-вектора  $r(Q, P)$  на складові  $r_1(Q)$ ,  $r_2(P)$  (рис. 1).

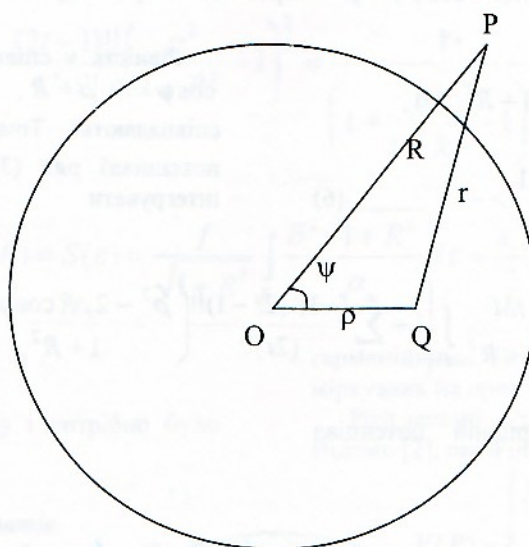


Рис. 1. До розрахунку потенціалу планети

Нехай  $a_e = \text{diam } \rho(Q)$  (для еліпсоїда це найбільша піввісь).

Зведемо  $r(Q, P)$ , на відміну від класичного підходу [2], до вигляду:

$$r(Q, P) = \sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi + R^2} = a_e \sqrt{\left(\frac{\rho}{a_e}\right)^2 - 2\frac{\rho}{a_e} \frac{R}{a_e} \cos \psi + \left(\frac{R}{a_e}\right)^2}. \quad (1)$$

Далі для простоти запису вважатимемо  $a_e = 1$ .

Вираз

$$\frac{1}{r(Q, P)} = \left( \sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1 + 1 + R^2} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \left( \sqrt{1 + \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2}} \right)^{-1} \quad (2)$$

розкладемо в біноміальний ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} \right)^t \right\}, \quad (3)$$

збіжність якого гарантується у результаті виконання нерівності

$$\left| \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} \right| < 1. \quad (4)$$

Зі співвідношення

$$2(1 - \rho^2) + (R - \rho)^2 + 2\rho R(1 + \cos \psi) > 0 \quad (5)$$

отримуємо

$$2 - 2\rho^2 + R^2 - 2\rho R + \rho^2 - 2\rho R + 2\rho R \cos \psi + 1 - 1 = 1 + R^2 - \rho^2 + 2\rho R \cos \psi + 1 \geq 0,$$

або

$$1 + R^2 > \rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1,$$

звідки випливає перша частина нерівності

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} < 1.$$

Другу частину виразу (4) можна одержати, перетворивши

$$(\rho - R)^2 + 2\rho R(1 - \cos \psi) = \rho^2 - 2\rho R + R^2 + 2\rho R - 2\rho R \cos \psi + 1 - 1 > 0$$

так

$$\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1 + 1 + R^2 > 0,$$

тобто

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} > -1 \quad (6)$$

Рівність у співвідношенні (4) можлива для  $\cos \psi = 0, \rho = R$ , тобто коли точки P, Q співпадають. Тому для  $\rho \neq R$  (зовнішній потенціал) ряд (3) збігається і його можна інтегрувати

$$V(P) = -\frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \int_0^\pi \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1 + R^2} \right)^t \right\} \delta \tau, \quad (7)$$

Покажемо, що і внутрішній потенціал зображається формулою (7).

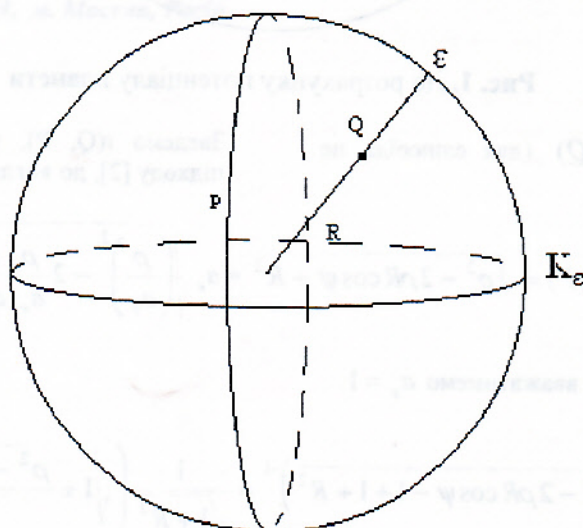


Рис. 2. До розрахунку внутрішнього потенціалу

Для цього оточимо точку P «сферою безпеки»  $K_\epsilon$  (рис. 2) і подамо  $V$  у вигляді

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P), \text{ де}$$

$$V_1(P) = \frac{fM}{\sqrt{1+R^2}} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{K_\varepsilon} \delta \left( \frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1}{1+R^2} \right)^t d\tau \right\}.$$

Масмо

$$V_2(P) = \int_{\tau/K_\varepsilon} \frac{\delta}{r} d\tau$$

$$\frac{\rho^2 - 2\rho R \cos \psi - 1 - R^2 + R^2}{1+R^2} = \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right),$$

звідки

$$V_1(P) = \frac{fM}{1+R^2} \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int_{K_\varepsilon} \delta \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^t d\tau \right\}.$$

Підінтегральний вираз – біноміальний ряд, сума якого є такою

$$1 + \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t \frac{(2t-1)!!}{(2t)!!} \left( \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\rho^2}{1+R^2} - 1 \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{1+R^2}}{\rho}.$$

Отже

$$V_1(P) = S(\varepsilon) = \frac{f}{\sqrt{1+R^2}} \int_{K_\varepsilon} \frac{\delta^2 \sqrt{1+R^2}}{\rho} d\tau = \frac{\varepsilon^2}{2} 3\tau,$$

$$\text{і } V_1(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon) = 0.$$

тобто  $V(P) = V_2(P)$ , в чому і потрібно було переконатись.

#### Аналіз результатів

Отже, за своєю формою зображення (7) дає однакове подання як зовнішнього, так і внутрішнього потенціалу послідовністю неперервних функцій, які не обов'язково є

гармонійними. Перевіримо правильність наших міркувань на прикладі.

Розглянемо однорідну одиничну кулю  $K$ . Відомо [2], що її потенціал є таким:

$$V(P) = \begin{cases} \frac{fM}{r}, & p \in K \\ \frac{3-r^2}{2} fM, & p \notin K \end{cases}$$

Визначимо величини, що входять до (7).

$$D'_{t_1 t_2 t_3} = \int_{\tau} (\rho^2 - 1)^t \zeta^{t_1} \eta^{t_2} \xi^{t_3} d\tau = \frac{3V 2^t t! (t_1 - 1)!! (t_2 - 1)!! (t_3 - 1)!!}{(2t + l + 3)!!}.$$

Тому розклад має такий вигляд:

$$V = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\int (\rho^2 - 1) d\tau}{1+R^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{\int (\rho^2 - 1)^2 d\tau + \int \xi^2 d\tau x^2 + \int \eta^2 d\tau y^2 + \int \xi^2 d\tau z^2}{(1+R^2)^2} + \frac{\int (\rho^2 - 1)^3 d\tau + 3 \int (\rho^2 - 1) (2\xi x + 2\eta y + 2\xi z)^2 d\tau}{(1+R^2)^3}.$$

Знайдемо декілька величини розкладу (7)  $D'_{t_1 t_2 t_3}$ .

$$\left. \begin{aligned} D_{000}^1 &= \int (\rho^2 - 1) d\tau = -\frac{6V}{5!!}, & D_{000}^2 &= \int (\rho^2 - 1)^2 d\tau = \frac{3V \cdot 2^2 \cdot 2!}{7!!} \\ D_{200}^0 &= D_{020}^0 = D_{002}^0 = \frac{3V}{5!!}, & D_{000}^3 &= \frac{3V \cdot 2^3 \cdot 3!}{9!!}, & D_{200}^1 &= \int (\rho^2 - 1) \zeta^2 d\tau = -\frac{6V}{7!!} = D_{020}^1 = D_{002}^1 \\ D_{000}^4 &= \frac{3V \cdot 2^4 \cdot 4!}{11!!}, & D_{002}^2 &= \int (\rho^2 - 1) \zeta^2 d\tau = D_{200}^2 = D_{020}^2 = \frac{2^2 \cdot 2}{9!} 3V \\ D_{400}^0 &= D_{040}^0 = D_{004}^0 = \int \xi^4 d\tau = \frac{3V}{35}, & D_{200}^0 &= D_{022}^0 = D_{202}^0 = \frac{1}{35} V \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тоді  $V \approx V_0 + V_1 + V_2 + V_3$ ,

де

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \\ V_1 &= \frac{1}{5(1+r^2)^{3/2}} \\ V_2 &= \frac{3(7r^2+2)}{70(1+r^2)^{5/2}} \\ V_3 &= \frac{2+9r^2}{70(1+r^2)^{7/2}} \\ V_4 &= \frac{(1/33+r^2/6+r^4/8)}{(1+r^2)^{9/2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Обчислимо значення потенціалу в деяких точках. Результати обчислень, наведені в

таблиці, показують правильність наших припущень, а саме – ряд (7) збігається як ззовні,

Значення потенціалу в деяких точках

R \ V	Точне значення V	V <sub>0</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	Σ
$\sqrt{3}$	0,5777	0,065	0,025	0,03079	0,0054	0,56118
$\sqrt{8}$	0,353553	0,3333	0,007407	0,01022	0,00806	0,35176
$\sqrt{0.5}$	1,25	0,8165	0,108866	0,08654	0,08928	1,1779
1	1	0,7071	0,0707	0,00781	0,0231	0,86905

так і на поверхні та всередині кулі, при цьому для збільшення точності необхідно брати більшу кількість його членів розкладу.

Ще одним підтвердженням правильності наведеної методики є визначення V в центрі планети. Для цього формулу (7) подамо у вигляді:

$$V(0) = V_K + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!!}{(2t)!!} \int (\rho^2 - 1)^t d\tau, \quad (10)$$

$$\text{де } \int (\rho^2 - 1)^t d\tau = \frac{3V_K 2^t t! (-1)^t}{(2t+3)!!}, \quad V_K - \text{об'єм кулі.} \quad (11)$$

Тому

$$V(0) = V_K \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^t (2t-1)!! (-1)^t t! 2^t}{(2t)!! (2t+3)!!} \right] = V_K \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)(2t+3)} \right] =$$

$$= \left[ 1 + 3 \sum_{t=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2t+1)} - \frac{1}{(2t+3)} \right) \right] = V_K \left( 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \dots \right) \right) = \frac{3}{2} V_K$$

З виразу (8) видно, що обчислене і точне значення  $V_T(0) = \frac{3}{2} V_K$  збігаються.

#### Висновки

Виникає питання доцільності використання зображення (7), в якому фігурують негармонійні функції. Трактуючи ряд (7) як апроксимацію функції  $V \in R^3$  неперервними функціями, очевидно, можна використати його для обчислень, наприклад, в прямих задачах гравіметрії. Оскільки коефіцієнти розкладу пов'язані з внутрішньою будовою, то, можливо,

мають геофізичний зміст, а тому їх можна використати для вивчення будови планети.

#### Література

1. Петровская М.С. Представление гравитационного потенциала Земли в виде рядов, сходящихся во всем пространстве // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Тр. 1 Орловской конференции. – Киев: Наук. думка. – 1982. – С. 115–120.
2. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

### АППРОКСИМАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

М.М. Фыс, А.Р. Согор, Р.С. Фоца

Построен алгоритм вычисления потенциала внутри планеты и вне её как единого целого с использованием кусочно-непрерывных функций.

### APPROXIMATION OF PLANET POTENTIAL BY CONTINUOUS FUNCTIONS

M.M. Fys, A.R. Sogor, R.S. Fotsa

The internal and external planet potential computation algorithm with use of piecewise-continuous functions is presented.