

## ВПЛИВ СТАНУ ДОСЛІДЖУВАНОЇ СИСТЕМИ НА ДИСПЕРСІЮ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

### EFFECT OF THE STATE OF INVESTIGATED SYSTEM ON THE DISPERSION OF EQUIVALENT MEASUREMENTS

*Зеновій Колодій, С.Яцишин,*

*Національний університет «Львівська політехніка», Україна*

*Су Цзюнь,*

*Школа комп'ютерної науки, Університет Технології провінції Хубей, Кунай*

*Zenovy Kolodiy, S.Yatasyshyn,*

*Lviv Polytechnic National University, Ukraine*

*Su Dzyun,*

*School of Computer Science, Hubei University of Technology, China*

#### **Анотація**

Наведено результати рівноточних вимірювань електричного опору двох однотипних вимірювальних котушок опору. Зроблено припущення, що різниця між дисперсіями (середньоквадратичними відхиленнями) номіналу досліджуваних котушок є наслідком їх нерівноважного стану. Визначено енергетичний спектр флуктуацій номіналу досліджуваних котушок, за яким визначено діапазон частот, в межах якого зміни енергетичного спектра є мінімальними. За визначеним діапазоном частот встановлено умови, при яких реалізація процесу вимірювання відбувається для квазірівноважного стану досліджуваних котушок і, відповідно, різниця між дисперсіями результатів рівноточних вимірювань є мінімальною.

**Ключові слова:** рівноточні вимірювання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, енергетичний спектр.

#### **Abstract**

This paper presents the results of equivalent measurements of electrical resistance of two identical resistive coils. It is suggested that the difference between the RMS of investigated coils is formed as result of their non-equilibrium states. The energy spectrum of resistance fluctuations of investigated coils and the frequency range, within which the energy spectrum changes insignificantly, are determined.

There were defined the conditions based on the computed range of energy spectrum frequencies, under which the implementation of measurement process is performed for quasi-equilibrium state of resistance. Therefore, the difference between the dispersions of the results of identical measurements is minimal. One of the reasons of non-equilibrium state existence may be the defective internal structure of the objects.

In the case of homogeneous measurements of parameters of the same type systems, the variance of the results of measurements (in the same quantity) may be different. The statistical criteria for checking the null hypothesis do not give an answer to the question of the cause of measurements non-uniformity. By the energy spectrum of the fluctuations of the parameters of the systems under study, one can determine the frequency band in which they are in quasi-equilibrium state. By the known values of the lower and upper frequencies of the considered band one can determine the measurement conditions - the time interval between the readings of the measurement results and the number of results for which the difference between the variances of the results of equivalent measurements becomes minimal.

The results of this work can be used in the processing of statistical homogeneous measurements, as well as the identification of the influence of external factors. If the conditions for measurements - the number of measurements and the time interval between measurements are such that they satisfy the condition of quasi-equilibrium state of the system being studied, then the impact of external factors becomes evident by the difference in variances.

**Keywords:** Equivalent Measurements, Dispersion, RMS Values of Resistance, Energy Spectrum.

**Вступ.** При опрацюванні результатів статистичних вимірювань параметрів однотипних об'єктів в багатьох випадках доцільним є забезпечення умов рівноточності вимірювань. При цьому різниці між дисперсіями результатів вимірювань мають бути мінімальними. Однак, на практиці різниці між дисперсіями можуть значно відрізнятись. Постає питання про дотримання умови рівноточності вимірювань.

**Проблема рівноточних вимірювань.** Перевірку умови рівноточності вимірювань можна здійснювати за статистичними критеріями [1-4], наприклад за критерієм Фішера  $F$ , порівнюючи значення дисперсій результатів вимірювань з критичним значенням  $F_{кр}$ . При  $F > F_{кр}$  можна стверджувати, що умова рівноточності вимірювань (нульова гіпотеза) є порушеною – вимірювання є нерівноточними. Однак статистичні критерії не дають відповіді на питання про причину нерівноточності вимірювань і при яких умовах різниця між дисперсіями буде мінімальною, тобто, у яких випадках буде виконуватись умова рівноточності вимірювань.

**Метою даної роботи** є визначення різниці між дисперсіями (стандартними відхиленнями) результатів вимірювань в однакових умовах електричного опору однотипних систем – вимірювальних котушок опору, визначення енергетичного спектра флуктуацій їх номіналу та визначення за енергетичним спектром діапазону частот  $\Delta f = f_B - f_H$ , у якому процес вимірювання може здійснюватись в умовах квазірівноважного стану і де різниця між дисперсіями результатів вимірювань стає мінімальною.

**Теоретичні дослідження.** Основними причинами нерівноточних вимірювань можуть бути або зміна умов проведення вимірювань або нерівноважний стан самого об'єкта вимірювань. Залишаючи поза увагою умови проведення вимірювань, забезпечення однаковості яких не є проблемою, зосередимо увагу на стан самого об'єкта вимірювань. Якщо об'єкт вимірювань (в подальшому – досліджувана система) є у рівноважному стані, то дисперсія результатів вимірювання не є функцією часу  $t$ , відповідно, стандартне відхилення не залежатиме ні від часового проміжку між окремими результатами вимірювання, ні від часу, на протязі якого отримують кількість  $n$  результатів вимірювань. При цьому самі результати вимірювань можна представити як флуктуації значень вимірюваного параметра  $x_P(t)$  навколо середнього значення  $\overline{X_P}$  (рис.1).

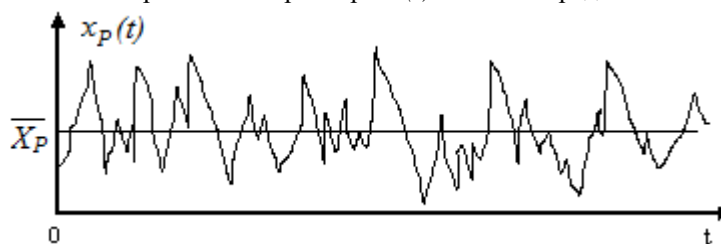


Рисунок 1 - Зміна вимірюваного параметра  $x_P$  рівноважної системи ( $\overline{X_P}$  - середнє значення  $x_P$ )

Figure 1 – Change of measured parameter  $x_P$  of the system in equilibrium ( $\overline{X_P}$  - mean value of  $x_P$ )

Відомо, що енергетичний спектр  $S_{x_P}(f)$  флуктуацій параметра  $x_P(t)$  рівноважної системи є однаковим в діапазоні частот від  $f \rightarrow 0$  аж до надвисоких частот (тобто, у вигляді «білого» шуму) [5].

Інакшим є енергетичний спектр системи, яка є у нерівноважному стані [6,7]. Зміну параметра  $x_H(t)$  такої системи з часом можна представити як на рис.2.

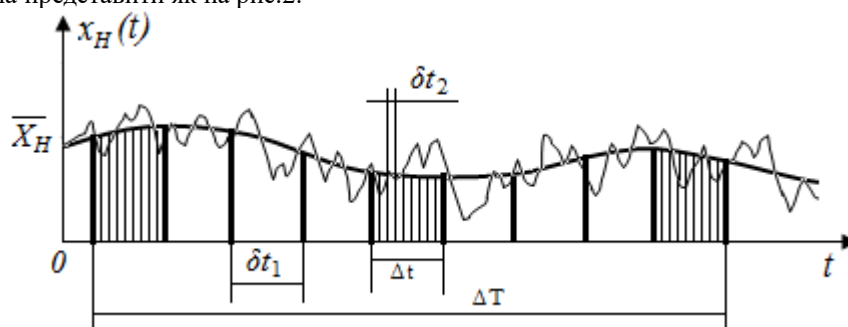


Рисунок 2 - Часова залежність параметра  $x_H(t)$  нерівноважної системи

Figure 2 – Time dependence of  $x_H(t)$  parameter of the system not in equilibrium

Із рис.2 видно, що результати усереднення 10 результатів вимірювання, виконаних, наприклад, за 10 секунд ( $\Delta t$ ) будуть відрізнятись від середнього значення 10 результатів вимірювань, виконаних за 10 діб ( $\Delta T$ ). Енергетичний спектр флуктуацій параметра  $x_H(t)$  нерівноважної (реальної) системи  $S_{x_H}(f)$  не є однаковим у всьому діапазоні частот і містить фліккер-складову спектра [7] (рис.3). 10 результатів вимірювань через 1 с на рис. 2 – це результати вимірювань параметра  $x_H(t)$  деякої системи, яка на протязі часу  $\Delta t$  є у квазірівноважному стані, а 10 результатів вимірювань за 10 діб – це результати вимірювань параметра системи у нерівноважному стані. На рис.3 наведено енергетичний спектр нерівноважної системи та діапазон частот (спектр) 10 вимірювань через 1 с (а) параметра системи  $x_H(t)$ , яка є у нерівноважному стані, і діапазон частот 10 вимірювань через 100 с (b).

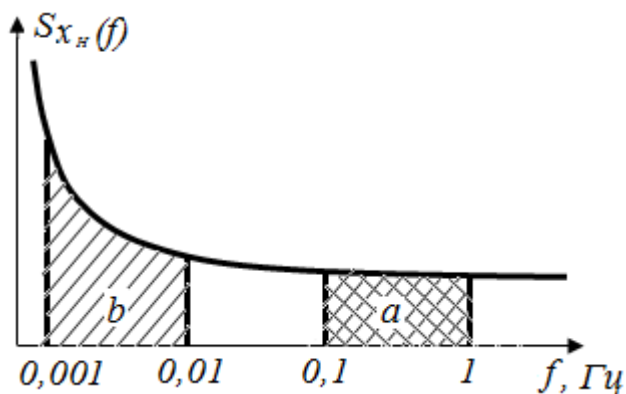


Рисунок 3 - Енергетичний спектр флуктуацій  $S_{x_H}(f)$  параметрів нерівноважної системи та діапазон частот 10 вимірювань параметра системи через 1 с (а) і через 100 с (b)

Figure 3 – Energy spectrum  $S_{x_H}(f)$  of fluctuations of parameters of the system not in equilibrium and frequency range of 10 measurements of system's parameter in 1s (a) and in 100s (b)

Верхню частоту  $f_B$  діапазону частот вимірювань визначає часовий проміжок між вимірюваннями  $\delta t$  ( $f_B = \frac{1}{\delta t}$ ),

а нижню частоту  $f_H$  - добуток  $n \cdot \delta t$  ( $f_H = \frac{1}{n \cdot \delta t}$ ) [6] (рис.3). Очевидно, що при вимірюванні змінних величин

повинно виконуватись співвідношення (теорема про дискретизацію):  $f_B \geq f_C$ , де  $f_C$  – верхня частота в спектрі змінної величини. Добуток  $n \cdot \delta t$  є часом усереднення (інтегрування) результатів вимірювання і чим більшим є  $n \cdot \delta t$ , тим ширшим (в сторону нижніх частот) є діапазон частот процесу вимірювання.

Із аналізу рис.2-3 можна зробити висновок, що дисперсія (стандартне відхилення) результатів вимірювання параметрів нерівноважної системи залежить не тільки від кількості вимірювань  $n$ , але і від часового проміжку між вимірюваннями  $\delta t$ : чим меншим є  $\delta t$  тим більшим є  $f_B$  - діапазон частот вимірювання зсувається в область високих частот і відбувається реалізація процесу вимірювання параметра системи у квазірівноважному стані (рис.3,  $f_H = 0,1$  Гц,  $f_B = 1,0$  Гц).

При збільшенні  $\delta t$  зменшується  $f_B$  - діапазон частот вимірювання зсувається в область низьких частот і відбувається реалізація процесу вимірювання параметра системи у нерівноважному стані (рис.3,  $f_H = 0,001$  Гц,  $f_B = 0,01$  Гц).

Виходячи із вищенаведеного, умову рівноточності вимірювань при забезпеченні однакових умов проведення вимірювань можна визначити, аналізуючи енергетичний спектр досліджуваної системи. За відомим енергетичним спектром можна визначити діапазон частот  $\Delta f = f_B - f_H$ , для якого процес вимірювання буде здійснюватись в умовах квазірівноважного стану системи. При відомому  $f_H$  і заданому  $\delta t$  можна визначити кількість вимірювань  $n$ , для якої різниця між дисперсіями буде мінімальною і, відповідно, буде забезпечена умова рівноточності вимірювань.

**Експериментальні дослідження.** Визначити, чи досліджувана система є у рівноважному чи нерівноважному стані можна на підставі експериментально визначеного її енергетичного спектра  $S(f)$ . В [7] встановлено, що енергетичний спектр реальних систем є у вигляді:  $S_H(f) = \frac{\exp(f \cdot \tau)}{\exp(f \cdot \tau) - 1} S_0$ , де  $S_0$  – значення спектральної густини потужності в області середніх і високих частот;  $\tau$  - час релаксації (час, за який значення  $S_H(f)$  зміниться до  $S_H(f) \cong 1,58 \cdot S_0$ , де  $f_0 = \frac{1}{\tau}$ ). Визначення значення  $\tau$  наведено на рис.4.

Критерієм стану системи є значення  $\tau$ : при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $S_H(f) \cong S_0$  - система є у рівноважному стані; при  $\tau < \infty$  графік енергетичного спектра системи є як рис.4 – система є у нерівноважному стані.

В залежності від того, яким буде значення  $\tau$  енергетичний спектр  $S_H(f)$  матиме той чи інший вигляд (рис.4).

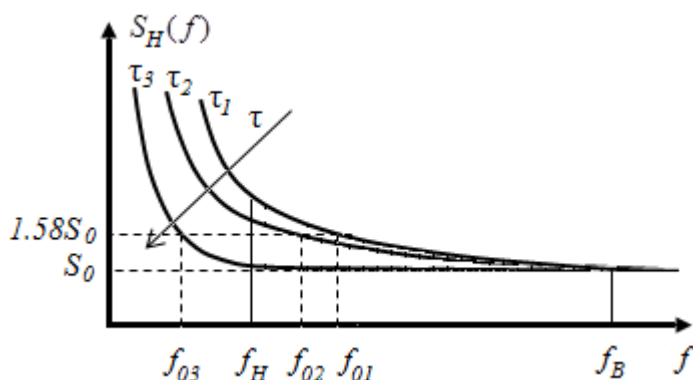


Рисунок 4 - Энергетичний спектр нерівноважних систем

Figure 4 – Energy spectrum of the systems not in equilibrium

Із рис.4 видно, що в діапазоні частот від  $f_H$  до  $f_B$  найменше змінюється  $S_H(f)$  для системи з  $\tau_3$ , а найбільшою є зміна  $S_H(f)$  для системи з  $\tau_1$ . Відтак, в залежності від того в якому стані перебуває досліджувана система (яким є значення  $\tau$ ) вимірювання її параметрів в діапазоні частот від  $f_H$  до  $f_B$  буде відбуватись в квазірівноважному (для  $\tau_3$ ) або нерівноважному (для  $\tau_1, \tau_2$ ) станах при однаковому часовому проміжку між вимірюваннями  $\delta t$  ( $f_B = \frac{1}{\delta t}$ ) і

при однаковій кількості вимірювань  $n$  ( $f_H = \frac{1}{n \cdot \delta t}$ ). Відтак, дисперсія результатів при однакових умовах

вимірювання буде різною. Наприклад, при однакових умовах вимірювання опору резисторів із однієї партії різне значення дисперсії може бути не похибкою експерименту, а наслідком різного стану досліджуваних резисторів (одні з них мають дефектність внутрішньої структури, відмінну від інших). Для перевірки такого твердження були проведені вимірювання електричного опору двох вимірювальних котушок опору з номіналом 1 Ом. Вимірювання здійснювались при однакових умовах (з однаковими методичними похибками і при однакових зовнішніх факторах – температура, вологість та інші.) з допомогою моста постійного струму по чотирипровідній схемі. Одна котушка була умовно позначена як **Resistor A**, друга - **Resistor B**. Було здійснено  $n = 100$  вимірювань електричного опору в однакових умовах кожної з двох котушок (рис. 5).

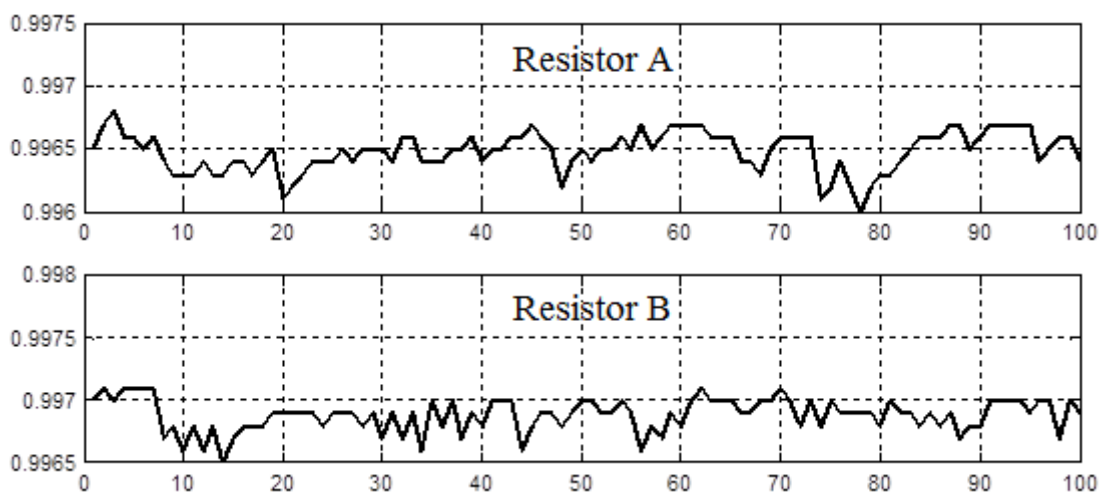


Рисунок 5 - Вимірювання електричного опору **Resistor A** та **Resistor B**

Figure 5 – Measurement of electric resistance **Resistor A** and **Resistor B**

Результати вимірювань – середнє значення опору  $\bar{R}$ , стандартне відхилення  $\sigma$  та коефіцієнт кореляції  $k$  між результатами вимірювань опору **Resistor A** та **Resistor B**, наведено в таблиці.

Коефіцієнт кореляції  $k$  визначався з метою встановлення впливу зовнішніх факторів на результати вимірювань. Мале значення  $k$  дає підстави стверджувати, що результати вимірювань є незалежними і вплив зовнішніх факторів є мінімальним.

Результати вимірювань електричного опору **Resistor A** та **Resistor B**

Resistor	$\bar{R}$ , Ом	$\sigma$ , Ом	$\bar{R} \pm 3\sigma$ , Ом	$\kappa$
<b>Resistor A</b>	0,9967	$1,8524 \cdot 10^{-4}$	$0,9967 \pm 5,5572 \cdot 10^{-4}$	0,2271
<b>Resistor B</b>	0,9969	$1,2978 \cdot 10^{-4}$	$0,9969 \pm 3,8934 \cdot 10^{-4}$	

Як видно із таблиці, різниця між стандартними відхиленнями  $\sigma$  котушок **Resistor A** та **Resistor B** складає  $\approx 40\%$ . Було зроблено припущення, що така різниця між дисперсіями є наслідком нерівноважного стану **Resistor A** та **Resistor B**. За результатами вимірювань були визначені енергетичні спектри флуктуацій (ЕСФ) опору **Resistor A** та **Resistor B** (рис.6). Оскільки результати вимірювань визначались через  $\delta t = 25$  секунд, то частота дискретизації  $f_D$  ( $f_D = f_B$ ) рівна 40 мілігерц. На рис.6 наведено односторонній графік ЕСФ в межах частот від нуля до  $f_D/2$  (рис.6). Із рис.6 видно, що ЕСФ **Resistor A** та **Resistor B** зростає із зменшенням частоти  $f$  і є подібним до

ЕСФ фліккер-шуму, у якого ЕСФ  $S_{фш} \sim \frac{1}{f}$ .

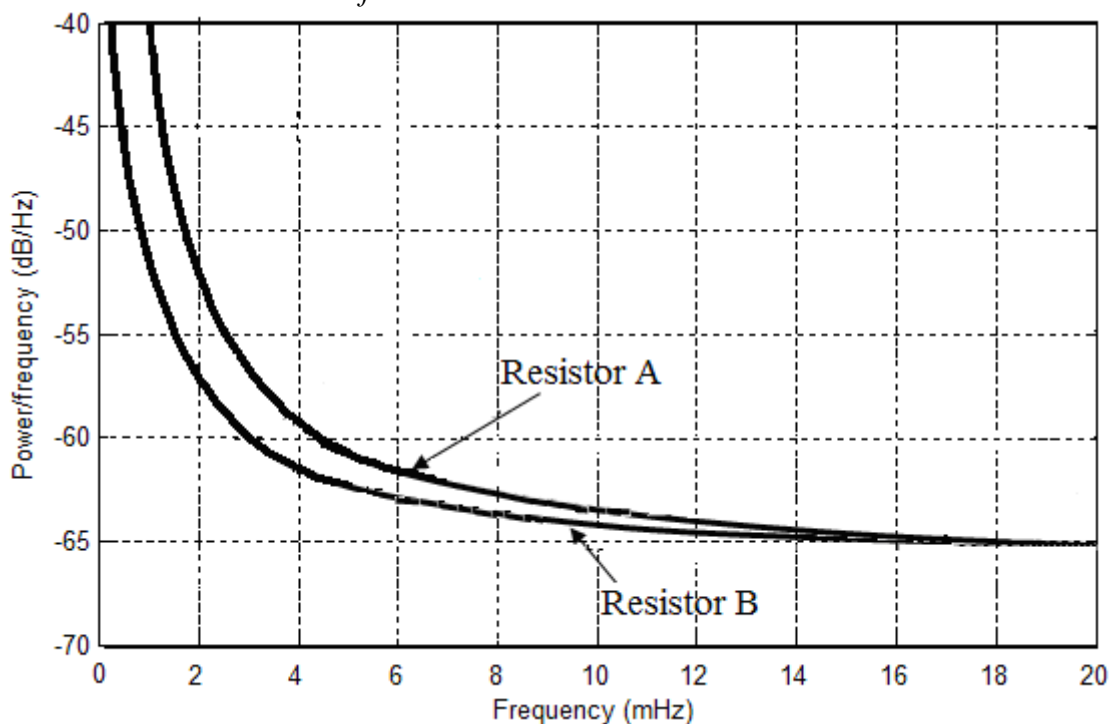


Рисунок 6 - Енергетичні спектри флуктуації опору **Resistor A** та **Resistor B**  
Figure 6 – Energy spectra of fluctuations of resistor **Resistor A** and **Resistor B**

За визначеними ЕСФ (рис.6) вибрано значення нижньої частоти  $f'_H$  ( $f'_H < f_H = \frac{1}{n \cdot \delta t}$ ) діапазону частот від  $f'_H$  до  $f_B$ , у якому **Resistor A** та **Resistor B** є у квазірівноважному стані - значення ЕСФ змінюється менше 25% від значення ЕСФ рівноважного стану ( $S_0$  рис.4) :  $f'_H = 10 \cdot 10^{-3}$  Гц до  $f_B = \frac{1}{\delta t} = 40 \cdot 10^{-3}$  Гц. Відтак, при  $f'_H = 10 \cdot 10^{-3}$  Гц і заданому значенні часового проміжку між відліками  $\delta t = 25$  с визначено кількість результатів  $n'$ , для яких вимірювання здійснюються при квазірівноважному стані досліджуваного об'єкта, і, відповідно, різниця між дисперсіями буде мінімальною – виконуватиметься умова рівноточності вимірювань:  $n' = 1/f'_H \cdot \delta t = 4$ . Для перевірки такого висновку визначено стандартні відхилення (дисперсії) для будь-яких  $n' = 4$  послідовних вимірних значень опору **Resistor A** та **Resistor B**, взяті через  $\delta t = 25$  с: середнє значення стандартних відхилень опору **Resistor A**  $\bar{\sigma}_A = 1,0210 \cdot 10^{-4}$  Ом, а для **Resistor B**  $\bar{\sigma}_B = 1,0087 \cdot 10^{-4}$  Ом ( $\left| \frac{\bar{\sigma}_A}{\bar{\sigma}_B} \cdot 100\% - 100\% \right| \approx 1\%$ ). Для порівняння було визначено різницю між стандартними відхиленнями опору котушок **Resistor A** та **Resistor B** для більшої кількості вимірів ( $n'' = 25$ ), взятих через  $\delta t = 25$  секунд:  $\left| \frac{\bar{\sigma}_A}{\bar{\sigma}_B} \cdot 100\% - 100\% \right| \approx 8\%$ . Тобто, для більшої кількості вимірів при тому ж часовому проміжку  $\delta t = 25$  секунд різниця між стандартними відхиленнями (дисперсіями) зростає, оскільки процес вимірювання здійснюється для нерівноважного стану:  $f''_H = 1/n'' \cdot \delta t = 1.6 \cdot 10^{-3}$  Гц (див.рис.6).

Отже, при рівноточних вимірюваннях параметрів однотипних систем, що є у квазірівноважному стані різниця між дисперсіями є мінімальною, а для систем, що є у нерівноважному стані, різниця між дисперсіями є максимальною.

Для перевірки впливу внутрішньої структури досліджуваних систем на їхній енергетичний спектр, а, відповідно, на нерівноважний чи квазірівноважний стан, були визначені ЕСФ опору металоплівкового резистора (**Resistor Ca**) та ЕСФ опору цього ж резистора з пошкодженою структурою (**Resistor Cb**) (рис.7).

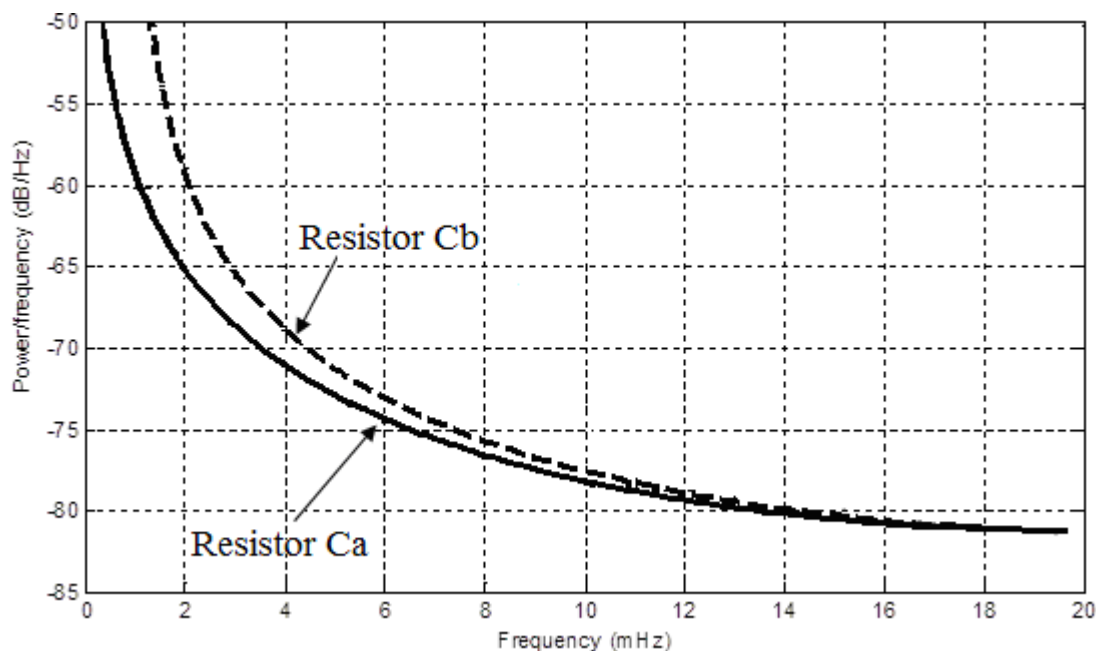


Рисунок 7 - Енергетичні спектри флуктуацій опору **Resistor Ca** та **Resistor Cb**

Figure 7 – Energy spectra of fluctuations of resistor **Resistor Ca** and **Resistor Cb**

Пошкодження структури здійснювалось механічним спилуванням верхнього провідного шару резистора. Середнє значення опору резистора **Resistor Ca**  $\bar{R}_{Ca} = 1,7545$  Ом, середнє значення опору **Resistor Cb**  $\bar{R}_{Cb} = 1,8605$  Ом ( $\left| \frac{\bar{R}_{Ca}}{\bar{R}_{Cb}} \cdot 100\% - 100\% \right| \approx 6\%$ ), стандартні відхилення відповідно складають  $\sigma_{Ca} = 3,8895 \cdot 10^{-5}$  Ом і  $\sigma_{Cb} = 5,0574 \cdot 10^{-5}$  Ом ( $\left| \frac{\sigma_{Ca}}{\sigma_{Cb}} \cdot 100\% - 100\% \right| \approx 30\%$ ). Наведені на рис.8 ЕСФ опорів **Resistor Ca** та **Resistor Cb** підтверджують вплив дефектності внутрішньої структури металоплівкового резистора на його енергетичний спектр. Оскільки, як з'ясовано вище, умови проведення вимірювань - кількість вимірювань  $n$  і часовий проміжок між вимірюваннями  $\delta t$  визначають діапазон частот  $f_H$  і  $f_B$ , в межах яких ЕСФ, залежно від значення  $\tau$  (від стану внутрішньої структури), змінюється як на рис.4, то залежно від вибраних  $n$  і  $\delta t$  вимірювання будуть проводитись або для рівноважного або нерівноважного стану. Тому значна різниця між дисперсіями результатів при однакових умовах вимірювання (однаковій кількості вимірювань  $n$  і при однаковому часовому проміжку між вимірюваннями  $\delta t$ ) може бути наслідком різної ступені нерівноважності досліджуваних систем (різних значень  $\tau$ : див. рис.4). В загальному, однією із причин відмінностей між дисперсіями результатів рівноточних вимірювань параметрів однотипних систем може бути неідентичність їх внутрішньої структури, яка безпосередньо впливає на вигляд енергетичного спектра.

**Висновки:** 1. При рівноточних вимірюваннях параметрів однотипних систем дисперсія результатів вимірювань (за однакової їх кількості) може бути різною; статистичні критерії перевірки нульової гіпотези не дають відповіді на питання про причину нерівноточності вимірювань. За енергетичним спектром флуктуацій параметрів досліджуваних систем можна визначити діапазон частот  $\Delta f = f_B - f_H$ , у якому вони є у квазірівноважному стані. За відомими  $f_B$  і  $f_H$  можна визначити умови вимірювань - проміжок часу між відліками результатів вимірювань  $\delta t$  і кількість результатів  $n$ , для яких різниця між дисперсіями результатів рівноточних вимірювань стає мінімальною.

2. Результати даної роботи можна використати при опрацюванні статистичних рівноточних вимірювань, а також виявлення впливу сторонніх факторів. Якщо умови проведення вимірювань - кількість вимірювань  $n$  і часовий проміжок між вимірюваннями  $\delta t$  - є такими, що задовольняють умові квазірівноважного стану досліджуваної системи, то причиною різниці дисперсій є вплив зовнішніх чинників.

### Література

1. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Горбунова А.А. О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I // Измерительная техника. — 2010. — № 3. — С.10—16.
2. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: Для инженеров и научных работников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.
3. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.
4. Микитин І. П. Методичні похибки шумових термометрів з різними структурами вхідного кола // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” Автоматика, вимірювання та керування - 2009. - №639. – С.179-184.
5. Nyquist H. Thermal agitation of electric charge in conductors // Phys. Rev. — 1928. — V. 32, July. — № 1. — P. 110-113.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник. 3-изд. перераб. дополн. – М: Высшая школа, 2000.- 462 с.
7. Kolodiy Z.A. Flicker-noise of electronic equipment: Sources, ways of reduction and application // Radioelectronics and Communications Systems. — 2010. —V.53. — No 8. — P. 412—417.

### References

- [1] B. Lemeshko, S. Lemeshko, A. Horbunova, “O prymenenyy u moshchnosty kryteryev proverky odnorodnosti dyspersyi. Ch. I”, *Yzmyrytelnaia tekhnika*. no.3, p.10-16, 2010.
- [2] A. Kobzar, *Prykladnaia matematycheskaia statystyka: dlia ynzhenerov y nauchnykh rabotnykov*. Moskva, RF: FYZMATLYT, 2006.
- [3] B. Lemeshko, S. Postovalov, *Kompiuternye tekhnolohyy analiza dannyyh y yssledovaniya statystycheskykh zakonomernostei*. Novosybyrsk, RF: Izd-vo NHTU, 2004.
- [4] I. Mykityn, “Metodychni pokhybky shumovykh termometriv z riznymy strukturamy vkhidnoho kola”, *Bull. Lviv Polytechn. Nat. Un., Automatics, measur., control*, no.639, p.179-184, 2009.
- [5] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors”, *Phys. Rev.*, vol. 32, no.1, p.110-113, 1928.
- [6] S. Baskakov, *Radyyotekhnicheskiye tsepy y syhnaly*, Moskva, RF: Vysshaya shkola, 2000.
- [7] Z. Kolodiy, “Flicker-noise of electronic equipment: Sources, ways of reduction and application”, *Radioelectr. & Com. Syst.*, vol.53, no.8, p.412-417, 2010.