

А. Л. ОСТРОВСКИЙ

**МЕТОДЫ УЧЕТА АТМОСФЕРНЫХ ВЛИЯНИЙ  
НА ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ,  
ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РЕФРАКЦИИ**

Статистическая геодезия, определяющая фигуру Земли и ее гравитационное поле на некоторый период, равно как и кинематическая геодезия, которая изучает изменение этих величин во времени, не мыслимы без осуществления прецизионных угловых и линейных измерений. Одной из важнейших причин, определяющих точность таких измерений, является атмосфера как неидеально однородная среда. Не случайно влияние ее на результаты высокоточных измерений уже давно изучается геодезистами и астрономами как теоретически, так и экспериментально.

Анализируя достигнутые результаты, можно наметить две группы задач, подлежащих решению:

первая группа — разработка методов и инструментов для определения поправок за рефракцию и средних интегральных показателей преломления атмосферы на пути волн светового и радиодиапазона;

вторая группа — изучение закономерностей влияния рефракционных полей на результаты геодезических измерений с целью минимизации этих влияний в процессе полевых измерений, путем применения особых программ измерений.

Настоящая статья посвящена решению некоторых задач первой группы, в частности тех, в которых учитываются атмосферные влияния на результаты геодезических измерений по метеорологическим данным. Такие задачи являются *прямыми задачами рефракции*.

Естественно поставить обратную задачу: *определение метеорологических элементов по наблюдаемой рефракции*. Впервые такую задачу поставил академик В. Г. Фесенков [3] в 1931 г. Мы, продолжая исследования и получая по вертикальной рефракции не точечные, а осредненные значения метеоэлементов на пути электромагнитных волн, используем их для решения прямых задач, т. е. для определения поправок за боковую рефракцию, а также для нахождения средних интегральных показателей преломления воздуха на пути световых и радиоволн.

**I. Определение поправок за боковую рефракцию.** На основании [2], пренебрегая влиянием влажности, определим вертикальный градиент температуры воздуха  $\gamma$

$$\gamma = \frac{KT^2}{668.7 \cdot B} - 0.0342, \quad (1)$$

где  $K$  — коэффициент вертикальной рефракции;  $T$  — абсолютная температура;  $B$  — давление.

В свою очередь

$$K = \frac{2R_a \delta_z'}{S \rho''}. \quad (2)$$

В формуле (2)  $R_a$  — средний радиус Земли — 6371 км;  $S$  — длина шин визирования,  $\rho'' = 206265''$ .

Вертикальная рефракция  $\delta_z = Z_t - Z_i$ , где  $Z_t$  и  $Z_i$  — соответственно теоретическое и измеренное зенитные расстояния. Формула (1) с учетом (2) запишется так:

$$\gamma = 0.0924 \frac{T^2}{B} \cdot \frac{\delta_z}{S} - 0.0342. \quad (3)$$

Следим, что вертикальный градиент температуры  $\gamma$ , полученный по односторонним зенитным расстояниям, является эквивалентным, так как описывается формулой

$$\gamma = \frac{1}{S^2} \int_0^S \gamma s ds. \quad (4)$$

По Г. Морицу [5], поправка за боковую рефракцию определяется из выражения

$$\delta = -\frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} s ds. \quad (5)$$

В формулах (4) и (5)  $s$  — абсцисса текущей точки в системе прямоугольных координат с началом у источника света, ось абсцисс направлена вдоль хорды луча;  $y$  — ордината, расположенная в плоскости горизонта источника света,  $\frac{dn}{dy}$  — горизонтальный градиент показателя преломления воздуха  $n$  по нормали к хорде луча. Полную боковую рефракцию  $d\sigma$  можно рассматривать как угол между касательными на концах секции световой кривой  $ds$  радиуса  $R_c$

$$d\sigma = \frac{ds}{R_c}. \quad (6)$$

Так как достаточно точно

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dy}, \quad (7)$$

то формула (5) примет вид

$$\delta = -\frac{1}{S} \int_0^S s d\sigma. \quad (8)$$

По Кукамяки [4],

$$d\sigma = 0.20'' \gamma ds \operatorname{tg} \alpha \cos \nu. \quad (9)$$

Формула (9) получена при условии, что изотермические поверхности следуют за рельефом местности. В ней  $\alpha$  — угол между горизонтальной и изотермической поверхностями на данной секции луча  $ds$ ;  $\nu$  — угол (в точке преломления луча) между линией пересечения только что названных плоскостей с визирным лучом.

Преобразуем (8) с учетом (3) и (9)

$$\delta'' = - \frac{1}{S} \left\{ 0.0185 \frac{T^2}{B} \cdot \frac{\delta_z}{S} - 0.0068 \right\} \cdot \int_s^S s \operatorname{tg} \alpha \cos \nu ds. \quad (10)$$

Интеграл

$$\int_0^S s \operatorname{tg} \alpha \cos \nu ds = \Sigma \quad (11)$$

определяется численным интегрированием, причем углы  $\alpha$  и  $\nu$  в данной секции  $\Delta s$  могут быть определены по топокарте. Запишем формулу (10) сокращенно

$$\delta'' = - \frac{0.2''}{S} \cdot \gamma \cdot \Sigma. \quad (12)$$

К настоящему времени предлагаемым методом определяли поправки более чем для 500 направлений, и всегда метод оказался эффективным: уменьшались дисперсия приемов измерений угла на пункте, различия между исправленными и эталонными углами, невязки треугольников. Точность определения поправок за рефракцию может быть подсчитана по формуле

$$m_s^* = \pm \frac{0.2''}{S} \sqrt{\frac{\gamma_z^2}{S^2} \Sigma^2 m_s^2 + \gamma_z^2 m_z^2 + \Sigma^2 m_{\gamma_z}^2}. \quad (13)$$

Теоретические расчеты и экспериментальные проверки показали, что данный метод позволяет определять поправки за боковую рефракцию с погрешностями на порядок меньше самих поправок.

**II. Определение среднего интегрального показателя преломления воздуха —  $\bar{n}_c$  на пути волн светового диапазона.**

Докажем прежде всего, что значение коэффициента рефракции, определенное из одновременного двухстороннего геодезического нивелирования, является среднеинтегральным —  $\bar{K}$ . Для углов вертикальной рефракции  $r_A$  и  $r_B$  в конечных точках линии  $AB$  справедливы формулы, аналогичные (5):

$$r_A = \frac{1}{S} \int_0^S \frac{dn}{dz} (S - s) ds, \quad (14)$$

$$r_B = \frac{1}{S} \int_0^S \frac{dn}{dz} s ds. \quad (15)$$

Вертикальные градиенты показателя преломления в текущей точке траектории луча —  $\frac{dn}{dz}$  практически равны кривизнам световой кривой  $\frac{1}{R_c}$  в этих точках (при малых наклонах луча) и равны  $\frac{K}{R_s}$  ( $K$  — точечные коэффициенты рефракции)

$$\frac{1}{R_c} = \frac{dn}{dz} = \frac{K}{R_s}. \quad (16)$$

Поэтому формулам (14) и (15) можно придать вид:

$$r_A = \frac{1}{SR_s} \int_0^S K (S - s) dS, \quad (17) \quad r_B = \frac{1}{SR_s} \int_0^S K s dS. \quad (18)$$

Суммируя равенства (17) и (18) имеем

$$r_A + r_B = \frac{1}{R_s} \int_0^S K ds. \quad (19)$$

С другой стороны, независимо:

$$r_A = K_A \cdot \frac{S}{2R_s}, \quad r_B = K_B \cdot \frac{S}{2R_s}, \quad (20)$$

следовательно,

$$r_A + r_B = \frac{S}{2R_s} (K_A + K_B). \quad (21)$$

Сравнивая (19) и (21), имеем окончательно

$$\frac{K_A + K_B}{2} = \bar{K} = \frac{1}{S} \int_0^S K ds. \quad (22)$$

Нетрудно уяснить, что из одностороннего геодезического нивелирования нельзя определить ни  $\bar{K}$ , ни  $n_c$  [7].

Полагая, что показатель преломления является функцией превышения  $h$ , т. е.  $n = n(h)$ , и пренебрегая изменениями  $n$  в горизонтальной плоскости, можно получить, если превышение  $h'$  между пунктами  $A$  и  $B$  известно,

$$\bar{n}_c = n_A \left[ 1 - \frac{\bar{K}}{2R_s} \operatorname{cosec} z_A \left( h - \frac{1}{3} f \right) \right]. \quad (23)$$

Если  $h'$  неизвестно, тогда

$$\bar{n}_c = n_A \left( 1 - \frac{\bar{K}}{2R_s} \operatorname{cosec} z_A \cdot h \right). \quad (24)$$

В этих формулах  $Z_A$  и  $n_A$  — соответственно измеренное зенитное расстояние и показатель преломления в исходном пункте;  $h$  —

пропынение между приемопередатчиком и отражателем;  $f$  поправка за кривизну земли и рефракцию.

Формула (24) почти не уступает по точности формуле (23). Погрешности в  $h$ ,  $z$ ,  $R_a$ , могут вызвать ошибку в определении порядка  $0,2-0,3 \cdot 10^{-7}$ . Доминирующее влияние на точность определения  $\bar{n}$  оказывают ошибки в  $\bar{K}$ .

$$m_{\bar{n}} = \frac{1}{\sin z} \cdot \frac{h}{2R_a} m_{\bar{K}}. \quad (25)$$

Если положить  $m_{\bar{K}} = \pm 0,01$ , то при  $h = 1000$  м и  $z = 90^\circ \pm 10^\circ$   $m_{\bar{n}} = \pm 0,8 \cdot 10^{-6}$ .

Путем сравнения результатов определения  $\bar{n}$  описанным методом и методом зондирования атмосферы, доказано, что в горных всхолмленных районах из решения обратных задач рефракции определяется с точностью  $1 \cdot 10^{-6}$ .

Применение метода позволило создать в горном районе эталонный геодезический полигон [1].

### III. Определение среднего интегрального показателя преломления воздуха $\bar{n}_p$ на пути волн радиодиапазона.

Так как влажность воздуха и распространение светового луча слабо коррелируются, то, казалось бы, определение  $\bar{n}_p$  из решения обратных задач рефракции невозможно. Но в дальнейшем выяснилось, что такую задачу можно решить дифференцированно. Вначале определяется та часть коэффициента вертикальной рефракции  $\bar{K}_t$ , которая обусловлена только вертикальным градиентом температуры воздуха

$$\bar{K}_t = \bar{K} - 22,870 \frac{B}{T^2}. \quad (26)$$

Затем определяется вертикальный градиент температуры  $\psi_a$  и интегральное значение температуры на пути радиоволн

$$\bar{T} = T_A + \frac{\bar{K}_t \cdot T^2}{21,92 \cdot 10^{-5} \cdot B R_a} \cdot h. \quad (27)$$

Далее, используя формулу Робитще [6], связывающую зависимость вертикального градиента влажности  $\frac{de}{dh}$  и температуры  $\frac{dT}{dh}$  запишем

$$\frac{de}{dh} = 19 \frac{e}{T} \cdot \frac{dT}{dh}, \quad (28)$$

и найдем средний на пути радиоволн градиент влажности, а уж затем и интегральное значение ее

$$\bar{e} = e_A + 0,3135 \frac{\bar{K}_t \cdot e T}{B} \cdot h. \quad (29)$$

Наконец, находим поправки  $\Delta S_T$  и  $\Delta S_e$  в расстояние  $S$  за переход от  $T = \frac{T_A + T_B}{2}$  и  $e = \frac{e_A + e_B}{2}$  к  $\bar{T}$  и  $\bar{e}$ :

$$\Delta S_{\bar{T}} = 0,7 \cdot 10^{-6} \delta_T S, \quad (30)$$

$$\Delta S_{\bar{e}} = -2,9 \cdot 10^{-6} \delta_e S \quad (31)$$

$$\delta_T = \frac{\bar{K}_t \cdot T^2 \cdot h}{10,96 \cdot 10^{-5} B R_a} - (T_B - T_A), \quad (32)$$

$$\delta_e = \frac{0,027 \cdot \bar{K}_t e \cdot T \cdot h}{B} - (e_B - e_A). \quad (33)$$

В таблице приведен фрагмент проверки метода на эталонной линии. Вначале все измерения были обработаны как обычно (с учетом метеоданных по концам линии). Затем были вычислены поправки  $\Delta S_{\bar{T}}$  и  $\Delta S_{\bar{e}}$ .

Результаты радиодальномерных измерений  
шести приемами в различные часы суток  
до и после исправления поправками  $\Delta S_{\bar{T}}$   $\Delta S_{\bar{e}}$

Часы суток	$S_{\text{изм. м}}$	$\Delta'_{\text{мм}}$	$\Delta'_{\text{мм}} : S$	$S_{\text{испр., м}}$	$\Delta_{\text{мм}}$	$\Delta_{\text{мм}} : S$
0	8775,843	-3	$0,3 \cdot 10^{-6}$	8775,851	-11	$1,2 \cdot 10^{-6}$
2	831	+9	$1,0 \cdot 10^{-6}$	846	-6	$0,7 \cdot 10^{-6}$
4	808	+32	$3,6 \cdot 10^{-6}$	827	+13	$1,5 \cdot 10^{-6}$
6	830	+10	$1,1 \cdot 10^{-6}$	845	-5	$0,6 \cdot 10^{-6}$
10	790	+50	$5,7 \cdot 10^{-6}$	813	+27	$3,1 \cdot 10^{-6}$
12	771	+69	$7,9 \cdot 10^{-6}$	819	+21	$2,4 \cdot 10^{-6}$
14	812	+28	$3,2 \cdot 10^{-6}$	860	-20	$2,3 \cdot 10^{-6}$
16	792	+48	$5,5 \cdot 10^{-6}$	840	0	-
18	786	+54	$6,2 \cdot 10^{-6}$	830	+10	$1,1 \cdot 10^{-6}$
20	805	+35	$4,0 \cdot 10^{-6}$	843	-3	$0,3 \cdot 10^{-6}$
22	818	+22	$2,5 \cdot 10^{-6}$	843	-3	$0,3 \cdot 10^{-6}$
24	813	+27	$3,0 \cdot 10^{-6}$	827	+13	$1,5 \cdot 10^{-6}$

$$\text{Среднее } 808; \frac{[\Delta']}{n} = +32; \quad 3,66 \cdot 10^{-6} \quad 837; \frac{[\Delta]}{n} = +3; \quad 1,25 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_1^2 = 1539 \quad \sigma_2^2 = 201$$

В таблице I  $\Delta'$  и  $\Delta$  — истинные ошибки до и после исправления результатов измерений поправками  $\Delta S_{\bar{T}}$  и  $\Delta S_{\bar{e}}$ .

Применим критерий Фишера

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 7,65 > F_{0,99} (11,11) = 4,45.$$

Как видим, уменьшение дисперсий не случайно, а имеет доверительную вероятность 0,99. Следовательно, предлагаемый дифференцированный метод определения  $n_p$  эффективен и повышает точность измерений не менее чем в 2 раза.

Список литературы: 1. Вироевец Ю. Б., Наумов Я. В., Островский А. Л. Этапный геодезический полигон в горном районе. — Геодезия и картография, 1971, № 12. 2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследования земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — Тр. ЦНИИГАиК, 1955, вып. 102. 3. Фесенков В. Г. Способ определения температурного градиента по земной

Финляндия. — Астрономический журнал, 1931, № 8. 4. *Kukamaki T. J. Verbesserung der Horizontalen Winkelmessungen Wegen der Seiten-refraktion.* — Des Finnooischen Geodatischen Institutes, Helsinki, 1939. 5. *Moritz H. Zur Geometrie der Refraktion.* Oester. Z. Vermessungswesen, 1962, № 1, 50. 6. *Robitzsch M. Die mittlere Abnahme Dampfdruckes mit der Höhe Meteorolog.* — Zeitsch., 1944, Bd. 61. 7. *Sauvastoinen J. The Effect of Path Curvature of light waves in the Refractive Index Application to Electronic Distance Measurement.* — Canad Surveyor, 1962, 16, № 2.

Статья поступила в редакцию 15. 12. 81

УДК 528.024.1.06

П. В. ПАВЛИВ, П. И. ПНЕВСКИЙ

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОСТЫЛЕЙ КОРОТКИМ ВИЗИРНЫМ ЛУЧОМ

Инструкцией [1] предусматривается применение костылей в качестве переходных точек при высокоточном нивелировании, но не даны рекомендации об их наиболее рациональных конструкциях при производстве работ на грунтах различной плотности.

Фундаментальные исследования устойчивости костылей были выполнены в ЦНИИГАиК под руководством И. И. Энтина в 1949—1950 гг. [5]. При этом использовался специально сконструированный прибор — испытатель перемещений. Он позволил измерять перемещения костылей с ошибкой, не превышающей 0,005 мм.

Характер грунтов

Таблица 1

Номер участка	Вид грунта	Объемный вес	Коэффициент пористости	Число пластичности	Показатель консистенции	Степень влажности
1	Песок пылеватый средней плотности, влажный	2,03	0,44	—	—	0,63
2	Элювий листочного мела с суглинистым заполнителем (до 10% объема)	1,99	0,67	8	0	0,96
3	Супесь тяжелая, твердая	1,93	0,60	7	<0	0,68

Однако сложность установки испытателя перемещений на грунтах различной плотности не дает возможности широко применять его на практике.

И. С. Пандул и И. Н. Кметко [2] изучали устойчивость переходных точек в условиях Крайнего Севера при помощи визирного луча длиной 6,0 м и дали конкретные рекомендации по их использованию в зависимости от характера грунта и времени года.

С целью дальнейших исследований вертикальных перемещений костылей нами было выбрано три участка с различными грунта-

ми (табл. 1) и на этих грунтах была проверена устойчивость костылей длиной 17,0 и диаметром 2,5 см.

Испытуемый костыль забивался в грунт на расстоянии 6,0 м от нивелира, ножки которого устанавливались на металлические трубы, забитые прочно в землю. На испытуемый костыль ставилась рейка, по шкале которой с помощью нивелира производились отсчеты с момента забивки костыля до 10 мин с интервалом 30 с. Для контроля устойчивости нивелира производились отсчеты и по рейке, установленной на репере, удаленном от нивелира также на расстояние 6,0 м. Каждый костыль испытывался по 29—33 раза на одном участке. Отсчеты брались по основной и дополнительной шкалам.

Обработка полученных результатов заключалась в следующем: находили отклонения от среднего отсчета из каждой серии, затем эти отклонения суммировались по всем сериям на соответствующий момент времени и находилось среднее отклонение на одну серию наблюдений, а также отклонения от среднего значения из первых отсчетов каждой серии (табл. 2).

Таблица 2  
Вертикальные перемещения костылей  
на различных грунтах

Время (мин)	Участки					
	1		2		3	
	среднего	первого	среднего	первого	среднего	первого
0,5	+0,001	0,000	+0,018	0,000	-0,006	0,000
1,0	0,000	-0,001	+0,014	-0,004	-0,006	0,000
1,5	-0,001	-0,002	+0,011	-0,007	-0,010	-0,004
2,0	-0,002	-0,003	+0,006	-0,012	-0,006	0,000
2,5	-0,002	-0,003	+0,007	-0,011	-0,006	0,000
3,0	0,000	-0,001	+0,001	-0,017	-0,006	0,000
3,5	+0,002	+0,001	-0,001	-0,019	-0,004	+0,002
4,0	0,000	-0,001	-0,002	-0,020	-0,004	+0,004
4,5	+0,002	+0,001	+0,001	-0,017	0,000	+0,002
5,0	+0,004	+0,003	0,000	-0,018	+0,002	+0,006
5,5	+0,003	+0,002	-0,001	-0,019	+0,001	+0,008
6,0	0,000	-0,001	-0,004	-0,022	+0,001	+0,007
6,5	-0,002	-0,003	-0,003	-0,021	+0,002	+0,007
7,0	-0,004	-0,005	-0,004	-0,022	+0,001	+0,008
7,5	-0,002	-0,003	-0,007	-0,025	+0,002	+0,008
8,0	+0,001	0,000	-0,007	-0,025	+0,002	+0,008
8,5	-0,002	-0,003	-0,004	-0,022	-0,004	+0,010
9,0	-0,001	-0,002	-0,007	-0,025	+0,004	+0,010
9,5	+0,004	+0,003	-0,006	-0,024	+0,002	+0,008
10,0	-0,001	-0,002	-0,010	-0,028	+0,006	+0,012

По полученным отклонениям построены графики (рисунок). Точность выявления вертикальных перемещений костылей можно определить по формулам, характеризующим как влияние отдельных источников погрешностей, так и их групп [4].