УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Статья [2] представляет собой рецензию на мою статью [3], в ней отмечается, что полученные нами формулы правильные, но их вывод грешит «грубейшими ошибками, незнанием элементарных правил матричной алгебры» и т. д. Научных результатов в статье Ю. И. Маркузе нет, не показано, к чему приводят эти «грубейшие ошибки», а голословно утверждается ошибочность наших математических выкладок. Рассмотрим содержание статьи Ю. И. Маркузе.

В связи с отсутствием действия деления в матричной алгебре Ю. И. Маркузе отрицает запись A/B для матриц. На самом деле такая запись для ненулевых матриц в математической литературе встречается. Например, в учебнике проф. А. И. Мазмишвили и Б. И. Беляева «Способ наименьших квадратов» [1] мы находим: «частное от деления матрицы $A \neq 0$ на матрицу $B \neq 0$ можно записать в форме равенств

$$A/B = AB^{-1},\ A/B = B^{-1}A.$$

Следовательно, деление матрицы A на матрицу B можно определить как умножение матрицы A либо слева, либо справа на обратную матрицу B^{-1}. Произведение AB^{-1} называется правым частным, а произведение $B^{-1}A$ — левым частным A и B».

Автор [2] считает невозможной запись

$$f^{\mathrm{T}} = \frac{F^{\mathrm{T}}}{E - Qa^{\mathrm{T}}(aQa^{\mathrm{T}})^{-1}a},$$

так как в знаменателе матрица вырождена, ее определитель равен нулю. Ю. И. Маркузе не увидел, что и в числителе этого выражения тоже содержится та же самая вырожденная матрица (как сомножитель) и мы, по сути, матрицу f^{T} умножили и разделили на одну и ту же ненулевую матрицу. Следовательно, такая запись верна. Далее Ю. И. Маркузе считает равенство

$$\frac{FA^{\mathrm{T}}}{E - a^{\mathrm{T}}(aQa^{\mathrm{T}})^{-1}aQA^{\mathrm{T}}} = F$$

также невозможным. Это действительно так: переписывая его из нашей статьи, Ю. И. Маркузе допустил грубую ошибку и оно стало невозможным.

Всегда имеет место равенство $A \cdot 1 = A$ для любой матрицы $A \neq 0$. Следовательно, можно записать

$$A^{\text{т}}/A^{\text{т}}, \quad QA^{\text{т}}/QA^{\text{т}},$$

что имеет место в нашей статье. Эти множители в формулах нашей статьи равносильны умножению матричного выражения на единицу. Перепишем формулу (10) нашей статьи в более подробной записи:

$$1/P_F = f^{\text{т}} Qf - f^{\text{т}} Qa^{\text{т}} (aQa^{\text{т}})^{-1} aQf - f^{\text{т}} QA^{\text{т}} (AQA^{\text{т}})^{-1} AQf.$$

Легко показать (надеюсь, что Ю. И. Маркузе сможет это сделать), что

$$f^{\text{т}} Qf - f^{\text{т}} Qa^{\text{т}} (aQa^{\text{т}})^{-1} aQf = F^{\text{т}} QF,$$

$$F^{\text{т}} QA^{\text{т}} = f^{\text{т}} QA^{\text{т}}, \quad AQf = AQF,$$

и мы получим окончательную формулу (11) нашей статьи, которой в работах Ю. И. Маркузе нет. Этот вывод формулы (11) равносилен нашему первоначальному выводу, но он более громоздок. Ю. И. Маркузе не различает уравненную и весовую функции и упрекает нас в незнании этих элементарных понятий способа наименьших квадратов. Он считает, что «нельзя выполнить оценку точности двухгруппового уравнивания». Напомним, что принято различать функции измеренных величин $F(l)$, уравненных величин $F(l+v)$ и весовую dF, т. е. дифференциал от функции измеренных величин, его линейную часть. Частные производные от F по измеренным величинам являются коэффициентами весовой функции. В результате уравнивания получают поправки в измерения, уравненные величины и их функции. Оценка точности уравненных величин и их функций представляет собой оценку уравнивания, в том числе и двухгруппового. Ее всегда можно выполнить.

Теория двухгруппового уравнивания принадлежит Крюгеру, но не Маркузе. В работе проф. В. Д. Большакова и Ю. И. Маркузе «Городская полигонометрия» изложена теория Крюгера для коррелированных величин. В основу положен вероятностный подход Ю. В. Линника. Классическое изложение двухгруппового способа уравнивания коррелированных измерений, по их мнению, требует трудоемких вычислений. В нашей статье убедительно показано, что классическое изложение очень просто приводит к тем же результатам, что и в работе В. Д. Большакова и Ю. И. Маркузе. И это отмечено в нашей статье.

1. *Мазмишвили А. И., Беляев Б. И.* Способ наименьших квадратов. М., 1959. 2. *Маркузе Ю. И.* О попытке вывода формулы для вычисления обратного веса функции при двухгрупповом уравнивании коррелированных результатов измерений в статье И. Ф. Монина // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1989. Вып. 49. С. 63—64. 3. *Монин И. Ф.* Об оценке точности двухгруппового уравнивания коррелированных величин // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 69,

Статья поступила в редколлегию 18. 02. 89