УДК 528.482

В. Н. СОУСТИН

ОПТИМАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТЫ СООРУЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОДОЛИТА

Приближенная формула для определения оптимального расстояния S_0 от сооружения до теодолита, обеспечивающего теоретически получение высоты сооружения H с наименьшей абсолютной ошибкой, имеет вид *

---

* *Соустин В. Н.* Оптимальные геометрические условия определения высоты сооружения // Геодезия и картография. 1986. № 10. С. 21—24.

$$S_0 = \sqrt{\frac{H\rho\Delta_S + (h_1^2 + h_2^2)\,\Delta_\nu}{2\Delta_\nu}}\,. \qquad (1)$$

Формула (1) получена для идеального случая, т. е. местность перед сооружением горизонтальна и, следовательно, величина горизонта инструмента при изменении расстояния S_i неизменна. Теоретический интерес представляет рассмотрение общего случая, когда местность перед сооружением наклонена к горизонту под некоторым углом α (рис. 1). Следует иметь в виду и то

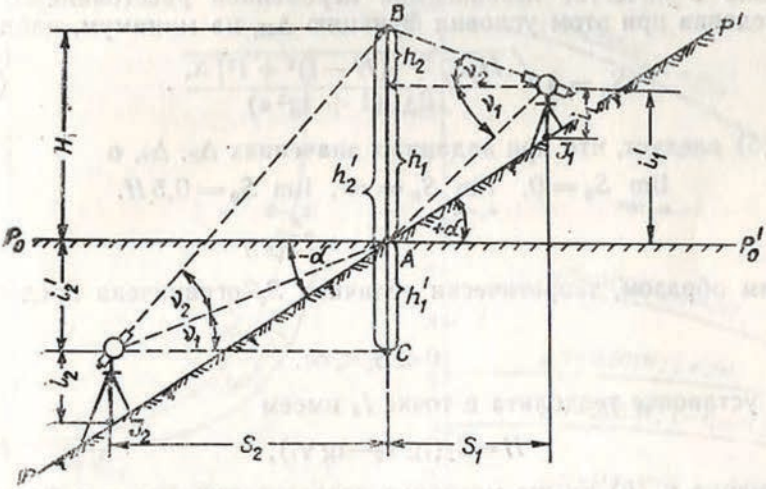

Рис. 1. Схема определения высоты сооружения на наклонной местности.

обстоятельство, что в специфических условиях строительных и монтажных работ такой случай реален. Тригонометрический способ применяют для контроля вертикальных размеров строительных конструкций и деталей, крупногабаритных изделий машиностроения при их монтаже и стендовой сборке. Его преимущество состоит в том, что он не требует непосредственного доступа к измеряемым точкам и позволяет с одной станции определять вертикальные размеры, значительно превосходящие высоту теодолита. Сделать это способом геометрического нивелирования без дополнительных прецезионных приспособлений часто невозможно. При установке теодолита в точке I_1 искомая высота сооружения

$$H = S_1(\operatorname{tg}\nu_1 + \operatorname{tg}\nu_2). \qquad (2)$$

Из (2) следует

$$\Delta_H = (\operatorname{tg}\nu_1 + \operatorname{tg}\nu_2)\,\Delta_S + \frac{S_1\Delta_\nu}{\rho}\left(\frac{1}{\cos^2\nu_1} + \frac{1}{\cos^2\nu_2}\right), \qquad (3)$$

где Δ_S, Δ_ν — абсолютные значения ошибок измерения расстояния S_1 и углов наклона ν_1 и ν_2; Δ_H — абсолютная ошибка определения высоты H.

Выразим значения тригонометрических функций в правой части формулы (3) через отрезки S_1 и h_1. Кроме того, учтем, что $h_2=H-h_1$, $h_1=S_1 \operatorname{tg} \alpha+i$, и положим $i_1=i_2=i$. Подставив указанные выше значения в (3), после элементарных преобразований получим

$$\Delta_{H_1}=\frac{H}{S_1}\Delta_s+\frac{2\Delta_\nu}{\rho S_1}(S_1^2+S_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha+2 S_1 \operatorname{tg} \alpha i+i^2+$$
$$+0{,}5 H^2-HS_1 \operatorname{tg} \alpha-Hi). \qquad (4)$$

Приняв в качестве независимой переменной расстояние S_1 и исследовав при этом условии функцию Δ_{H_1} на минимум, найдем

$$S_0=\sqrt{\frac{H\rho\Delta_s+[(H-i)^2+i^2]\Delta_\nu}{2\Delta_\nu(1+\operatorname{tg}^2 \alpha)}}. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что при заданных значениях Δ_S, Δ_ν, α

$$\lim_{\alpha\to 90^\circ} S_0=0, \quad \lim_{\Delta_\nu\to 0} S_0=\infty, \quad \lim_{\substack{\Delta_S\to 0\\ \alpha\to 0\\ i\to 0{,}5H}} S_0=0{,}5H.$$

Таким образом, теоретически величина S_0 ограничена пределами

$$0<S_0<\infty.$$

При установке теодолита в точке I_2 имеем

$$H=S_2(\operatorname{tg} \nu_2-\operatorname{tg} \nu_1), \qquad (6)$$

Применив к (6) ту же методику исследования, что и к формуле (2), найдем

$$\Delta_{H_2}=\frac{H}{S_2}\Delta_S+\frac{2\Delta_\nu}{\rho S_2}(S_2^2+S_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha-2 S_2 \operatorname{tg} \alpha i+i^2+$$
$$+0{,}5 H^2+HS_2 \operatorname{tg} \alpha-Hi). \qquad (7)$$

Продифференцировав правую часть (7) по S и приравняв производную к нулю, вновь получим S_0, соответствующее (5). Таким образом, существуют две оптимальные точки I_{01} и I_{02}, расположенные по разные стороны от сооружения на одинаковом расстоянии от него, при установке теодолита в которых ошибка Δ_H определения высоты сооружения будет иметь минимальное значение. Но значения ошибок Δ_{H_1} и Δ_{H_2} в общем случае не будут равны друг другу. Найдем разность

$$\delta_{\Delta_H}=\Delta_{H_2}-\Delta_{H_1}.$$

Подставив в правую часть равенства вместо Δ_{H_1} и Δ_{H_2} их значения согласно (4) и (7) и полагая $S_1=S_2=S_0$, получаем

$$\delta_{\Delta_H}=\frac{4 \operatorname{tg}|\alpha|(H-2i)\Delta_\nu}{\rho}. \qquad (8)$$

Из формулы (8) видно, что при определенных значениях H, i и Δ_v абсолютная разность δ_{Δ_H} зависит от угла α и возрастает по мере увеличения угла α. Это хорошо видно на графике (рис. 2), при составлении которого условно приняты: $H=1$; $i=0{,}1\,H$; $\Delta_v=1'$; $\Delta_S=0{,}001\,H$. Из (8) следует, что δ_{Δ_H} положительна при $H>2i$ и отрицательна при $H<2i$. Следовательно, при наличии выбора в первом случае теодолит целесообразно устанавливать в точке I_{01} справа от сооружения, а во втором —

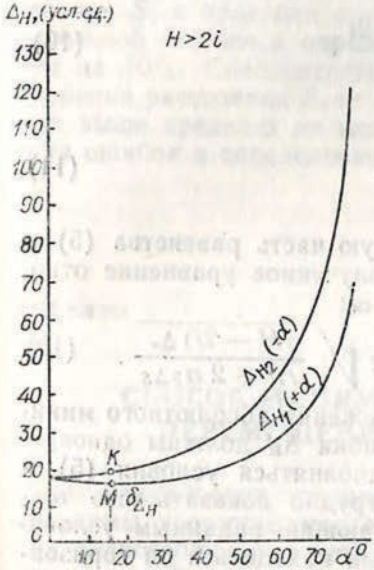

Рис. 2. Зависимость между ошибкой δ_{Δ_H} и углом наклона α местности к горизонту.

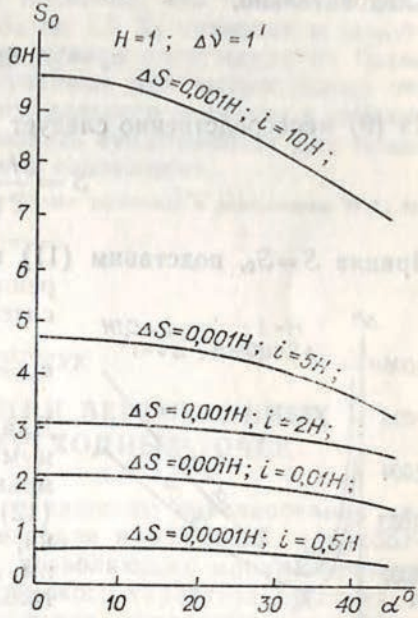

Рис. 3. Зависимость между оптимальным расстоянием S_0 и углом α наклона местности к горизонту.

в точке I_{02} слева от сооружения (см. рис. 1). Подавляющее большинство случаев практики отвечает первому условию, т. е. $H>2i$. Однако в специфических условиях монтажных работ может иметь место и второй случай. При $H=2i$ величина $\delta_{\Delta_H}=0$ и, следовательно, $\Delta_{H_1}=\Delta_{H_2}$. Из формулы (8) следует, что при $\alpha=0$ величина $\delta_{\Delta_H}=0$ и, следовательно, $\Delta_{H_1}=\Delta_{H_2}$.

Выясним теперь, какой вид примет формула (5) при $\alpha=0$. Повернем мысленно на рис. 1 линию $P—P'$ местности вокруг точки A в горизонтальное положение $P_0—P_0'$, оставляя при этом теодолиты в прежнем положении (см. рис. 1). Тогда новая высота инструмента $i_1'=h_1$, $\alpha=0$ и $\operatorname{tg}^2\alpha=0$. Подставив эти данные в формулу (5), получим вновь формулу (1). Таким образом, формула (1) есть частный случай формулы (5). Выясним теперь, существует ли такое значение угла α, при котором значение ошибки Δ_H при заданных значениях H, i, Δ_S и Δ_v будет минимально? Продифференцируем правую часть (4) по α:

$$f'(\alpha)=\frac{2\Delta_\nu(H-2i+2S\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{\rho\cos^2\alpha}.$$

Приравняв производную к нулю, найдем

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0=\frac{H-2i}{2S}. \qquad (9)$$

Следовательно,

$$\alpha_0=\mathrm{arctg}\,\frac{H-2i}{2S}. \qquad (10)$$

Из (9) непосредственно следует

$$S=\frac{H-2i}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}. \qquad (11)$$

Приняв $S=S_0$, подставим (11) в левую часть равенства (5) и решим полученное уравнение относительно α_0:

$$\alpha_0=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(H-2i)\,\Delta_\nu}{H^2+2H\rho\Delta_S}}. \qquad (12)$$

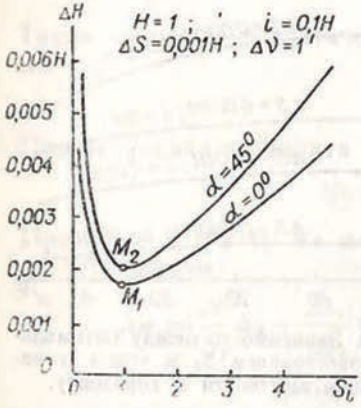

Рис. 4. Зависимость между расстоянием S_i и ошибкой Δ_H в определении высоты сооружения

Для достижения абсолютного минимума ошибки Δ_H должны одновременно выполняться условия (5) и (12). Нетрудно показать, что точка, отвечающая заданным условиям, должна находиться на горизонтальной линии, которая делит высоту H сооружения пополам. Согласно рис. 1 $\mathrm{tg}\,\alpha=(h_1-i)/S$. Подставив это выражение в левую часть равенства (9) и решив полученное уравнение относительно h_1, найдем

$$h_1=0{,}5\,H. \qquad (13)$$

Таким образом, требование совместного выполнения условий (5) и (12) сводится по существу к совместному выполнению условий (5) и (13).

Существенным для практики является вопрос о допустимых отклонениях расстояния S_i от его оптимального значения, вычисленного по формуле (5). С этой целью формула (5) проанализирована совместно с (4), (7), (8). Результаты анализа представлены на рис. 2, 3, 4. На рис. 3 показано, что при заданных значениях величин H, i, Δ_S, Δ_ν изменение угла наклона местности к горизонту в пределах от 0 до 45° приводит соответственно к монотонному уменьшению оптимального расстояния S_0 от 1 до 0,7, т. е. $S_0\,(45°)/S_0(0°)\approx 0{,}7$. Это отношение сохраняется для любых значений ошибок Δ_s, Δ_ν и для любых

их сочетаний. Из рис. 4 видно, что такие изменения расстояния S_0 приводят к дополнительной ошибке в определении высоты сооружения. Последняя при любых реальных сочетаниях ошибок Δ_S, Δ_v и значениях $0<i<H$ не превысит 10% того значения ошибки Δ_{H_0}, которое было бы получено при строгом равенстве $S_i=S_0$. Из этого можно сделать вывод, что на практике наклон местности к горизонту можно не учитывать и рассчитывать оптимальное расстояние от сооружения до теодолита по формуле (1). На рис. 4 также показано, что изменение расстояния S_i в пределах от 0,67 S_0 до 1,5 S_0 приводит к дополнительной ошибке в определении высоты сооружения не более чем на 10%. Следовательно, случайные или вынужденные отклонения расстояния S_i от его оптимального значения в указанных выше пределах не могут вызвать существенных для практики ошибок в определении высоты сооружения.

Статья поступила в редколлегию 31. 01. 89