УДК 550.312

Ю. П. ДЕЙНЕКА

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЖАТИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СЛОЕВ ВНУТРИ ЗЕМЛИ

Задача определения сжатия внутренних слоев постоянной плотности в Земле может быть решена на основе дифференциального уравнения Клеро. Теория Клеро в плане рассматриваемой здесь задачи достаточно детально излагается в современной литературе [1—3]. Развитию этой теории способствовали исследования Радо, Дарвина, Джеффриса и др.

Дифференциальное уравнение Клеро имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2}+\frac{6\delta}{Dr}\frac{d\alpha}{dr}-\left(\frac{6}{r^2}-\frac{6\delta}{Dr^2}\right)\alpha=0. \tag{1}$$

Граничными условиями для сжатия α являются:
на внешней поверхности

$$\alpha|_{r=R}=\alpha_0; \tag{2}$$

в центре Земли [3]

$$\left.\frac{d\alpha}{dr}\right|_{r=0}=-\frac{1}{4}\frac{\alpha_1}{\delta_1}\left.\frac{d\delta}{dr}\right|_{r=0}. \tag{3}$$

В (1)—(3) α_0 — принятое поверхностное сжатие Земли; δ — значение плотности Земли в текущей точке; α_1, δ_1 — значения сжатия и плотности в центре Земли; D — средняя плотность сферы радиусом r:

$$D=\frac{3}{r^3}\int_0^r \delta(r)\,r^2\,dr. \tag{4}$$

Отметим, что (1) справедливо с точностью до малых величин первого порядка относительно α включительно. Поскольку решение этого уравнения затруднительно, его упрощают. Так, Радо ввел новую переменную η и, применив некоторый спе-

циальный прием, преобразовал уравнение Клеро к виду (см., например, [1])

$$\frac{d}{dr}(Dr^5\sqrt{1+\eta}) = 5Dr^4\psi(\eta), \tag{5}$$

где функция

$$\psi(\eta) = \frac{1+\eta/2+\eta^2/10}{\sqrt{1+\eta}}, \tag{6}$$

а параметр сжатия (параметр Радо)

$$\eta = \frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}. \tag{7}$$

Из (7) для первой α' и второй α'' производных сжатия получим

$$\alpha' = \eta\alpha/r, \quad \alpha'' = (r\eta' + \eta^2 - \eta)\alpha/r^2.$$

Подставляя выражения производных в (1), приводят уравнение Клеро к виду

$$r\eta' + \eta^2 - \eta\left(1 - \frac{6\delta}{D}\right) - 6 + \frac{6\delta}{D} = 0. \tag{8}$$

Джеффрис [2] показал, что для Земли функция $\psi(\eta)$ близка к единице, тогда уравнение (5) упрощается и переходит в так называемое приближение Радо

$$\frac{d}{dr}(Dr^5\sqrt{1+\eta}) = 5Dr^4, \tag{9}$$

которое нельзя корректно применять к внешним планетам, когда возникает необходимость учета как членов второго порядка малости, так и вариаций $\psi(\eta)$.

Приближенное уравнение Радо (9) позволило существенно продвинуть вперед теорию фигуры Земли. С его помощью Дарвин получил важное приближенное соотношение [1]

$$1 - \frac{3}{2}y = 0{,}4\sqrt{1+\eta}, \tag{10}$$

связывающее параметр η с безразмерным моментом инерции Земли y. Уравнение (10) носит название приближения Радо—Дарвина.

Таким образом, если распределение плотности $\delta(r)$ в планете известно и, следовательно, можно найти $D(r)$ и $y(r)$, то решение уравнений (9) или (10) позволяет определить функцию $\eta(r)$ внутри планеты при любом значении радиуса r. После этого распределение сжатия $\alpha(r)$ находят из дифференциального уравнения (7).

В литературе известны определения сжатия $\alpha(r)$ с применением методики, основанной на приближении Радо—Дарвина,

результаты которых приведены, например, в [4]. При этом использовались некоторые ранние модели распределения плотности внутри Земли. Более детальные исследования этого вопроса выполнены К. М. Картвелишвили [4], который предложил метод решения уравнения Клеро (8) в виде некоторой разностной схемы (первый метод), а также решение исходного дифференциального уравнения Клеро (1) методом конечных разностей (второй метод). Он реализовал эти решения на ЭВМ

Таблица 1

Характеристика двух методов [4] вычисления $\alpha(r)$ для модели Булларда 1942 г.

Радиус r, км	Сжатие $\alpha(r)$	
	Первый метод	Второй метод
0	0,002126	0,002131
371	0,002119	0,002131
1250	0,002130	0,002140
2371	0,002407	0,002414
3371	0,002551	0,002555
4371	0,002775	0,002781
5371	0,003079	0,003081
5871	0,003220	0,003220
6371	0,003364	0,003364

Таблица 2

Сравнение точности вычисления $\alpha(r)$ для модели РЕМ-С первым методом [4] и применяемым методом

Радиус r, км	Первый метод [4]		Применяемый метод	
	$\alpha(r)$	$1/\alpha(r)$	$\alpha(r)$	$1/\alpha(r)$
1217,104	0,00243696	410,347	0,00244569	408,882
3485,704	0,00256114	390,451	0,00256131	390,425
5701,004	0,00315478	316,979	0,00315429	317,028
5951,004	0,00322701	309,885	0,00322104	310,458
6151,004	0,00328609	304,313	0,00328387	304,519
6251,004	0,00331621	301,549	0,00331627	301,544
6336,004	0,00334207	299,216	0,00334216	299,208
6351,004	0,00334666	298,988	0,00334673	298,799
6371,004	0,00335281	298,257	0,00335281	298,257

с целью определения $\alpha(r)$ как для некоторых ранних моделей Земли, так и для хорошо известной модели серии РЕМ — континентальной модели РЕМ-С [8], которую автор обозначил как РЕМ-К, модифицировал из сферически-симметричной в эллипсоидальную и принял в качестве планетарной плотностной модели Земли (ПМЗ-К).

Следует отметить, что оба метода дают возможность вычислять $\alpha(r)$ в среднем с точностью шестого знака, причем точность вычислений падает с увеличением глубины, о чем свидетельствуют данные табл. 1, взятые из [4]. Кроме того, как показано в [4], эти методы дают практически тот же результат определения α, что и методика Булларда, учитывающая члены второго порядка малости относительно η.

Заслуживает внимания вопрос определения сжатия слоев постоянной плотности Земли, основанный на ином подходе. С этой целью воспользуемся уравнением Радо (5) в интегральной форме [3]:

$$D(r)\,r^5\,[1+\eta(r)]^{1/2} = 5\int_0^r D(r)\,\psi(\eta)\,r^4\,dr, \qquad (11)$$

откуда

$$\eta(r)=\left[\frac{5}{D(r)\,r^5}\int_0^r D(r)\,\psi(\eta)\,r^4\,dr\right]^2-1. \qquad (12)$$

Уравнение (7) запишем таким образом:

$$\frac{d\alpha}{dr}=\alpha\frac{\eta(r)}{r},$$

или

$$\alpha(r)=\alpha_0\exp\left[-\int_r^R\frac{\eta(r)}{r}\,dr\right]. \qquad (13)$$

С учетом того что $r=R\rho$ и $dr=Rd\rho$, а также, что $\rho=1$ при $r=R$, для вычисления $\alpha(r)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$\alpha(\rho)=\alpha_0\exp\left[-\int_\rho^1\frac{\eta(\rho)}{\rho}\,d\rho\right], \qquad (14)$$

где

$$\eta(\rho)=\left[\frac{5}{D(\rho)\,\rho^5}\int_0^\rho D(\rho')\,\psi[\eta(\rho')]\,\rho'^4\,d\rho'\right]^2-1; \qquad (15)$$

$$\psi(\eta)=\frac{1+\eta/2+\eta^2/10}{\sqrt{1+\eta}}; \qquad (16)$$

$$D(\rho)=\frac{3}{\rho^3}\int_0^\rho\delta(\rho')\,\rho'^2\,d\rho'. \qquad (17)$$

Последовательность решения этих уравнений такова: в первом приближении полагаем $\varphi(\eta)=1$; зная функцию распределения плотности $\delta(\rho)$, находим $D(\rho)$, а затем $\eta(\rho)$ и $\alpha(\rho)$. В каждом последующем приближении $\psi(\eta)$ вычисляем с учетом $\eta(\rho)$, найденного в предыдущем приближении. По вычисленным значениям функции $\eta(\rho)$ контролируем сходимость процесса итераций и $\alpha(\rho)$ вычисляем после того, когда $\eta(\rho)$ определено с заданной точностью. Такова суть применяемого здесь приближенного метода решения интегрального уравнения Радо (11).

С целью сопоставления точности применяемого здесь метода вычисления α с методами, описанными в [4], нами выполнен расчет сжатия внутренних слоев постоянной плотности внутри Земли для модели PEM-C при значениях радиусов, для которых производились вычисления $\alpha(r)$ в [4].

Сравнительный анализ данных табл. 2, в которой приведены результаты вычислений $\alpha(r)$ первым методом [4] и применяемым нами методом, показывает, что по точности применяемый метод не уступает первому методу [4], а с учетом данных табл. 1 этот вывод можно распространить и на второй метод [4].

Сделаем некоторые замечания и выводы по применяемому здесь для определения $\alpha(r)$ методу. Как показали вычисления,

Таблица 3

Результаты вычислений сжатия внутренних слоев постоянной плотности для моделей РЕМ-С, эллипсоидальной и PR ЕМ при некоторых значениях ρ

ρ	Модель РЕМ-С		Модель эллипсоидальная		Модель PREM	
	$\alpha(\rho)$	$1/\alpha(\rho)$	$\alpha(\rho)$	$1/\alpha(\rho)$	$\alpha(\rho)$	$1/\alpha(\rho)$
0,01	0,00242702	412,027	0,00239056	418,313	0,00240900	415,109
0,10	0,00243965	409,894	0,00239530	417,484	0,00242451	412,454
0,20	0,00243306	411,005	0,00238078	420,030	0,00241835	413,504
0,30	0,00248373	402,620	0,00250444	399,290	0,00247115	404,669
0,40	0,00250572	399,087	0,00254558	392,837	0,00250359	399,426
0,50	0,00252760	395,632	0,00255459	391,452	0,00250738	398,823
0,60	0,00260693	383,592	0,00263664	379,271	0,00259865	384,815
0,70	0,00277358	360,544	0,00277996	359,717	0,00277017	360,989
0,80	0,00297599	336,022	0,00297224	336,446	0,00297121	336,563
0,90	0,00317011	315,446	0,00318375	315,768	0,00316392	316,064
1,00	0,00335281	298,257	0,00335281	298,257	0,00335281	298,257

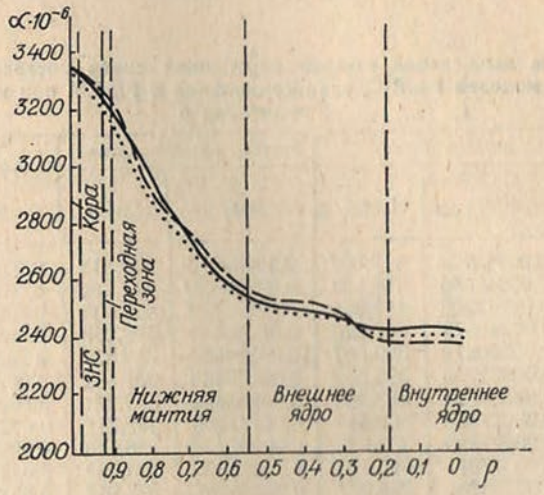
выполненные на ЭВМ ЕС-1022, значение функции $\psi(\rho)$ во всех итерациях близко к единице и лишь для некоторых глубин $\psi(\eta)=1$. Это говорит о необходимости учета вариаций $\psi(\eta)$ при вычислении $\alpha(r)$ для Земли, особенно, если $\alpha(r)$ вычисляется с точностью восьмого знака, что соответствует точности современных определений $1/\alpha$ на поверхности Земли (см. табл. 2). Именно поэтому в табл. 2 значения $\alpha(r)$ приведены до восьмого знака, хотя как в случае первого, так и второго методов [4] с уверенностью можно говорить о вычислении $\alpha(r)$ лишь с точностью шестого знака, что соответствует десятым долям значения $1/\alpha(r)$.

Функция $\eta(\rho)$ с точностью девятого знака практически сходится на пятой итерации, а значение ее лежит в пределах от 0,00 в центре планеты до 0,58 на ее поверхности, что в общем подтверждает ранние исследования Буллена [1] и согласуется с результатами, полученными К. М. Картвелишвили [4]. В смысле сходимости такой же вывод можно сделать и относительно $\alpha(\rho)$, значения которого вычислялись и выводились на печать после каждой итерации.

В заключительной части настоящей работы выполнен рассмотренным выше методом расчет сжатия внутренних слоев

постоянной плотности для следующих моделей Земли: модели PEM-C [8], модели эллипсоидальной [5] и модели PREM [7].

Эллипсоидальная плотностная модель Земли [5] в свое время рассчитана нами в трехмерном и одномерном вариантах с использованием стоксовых постоянных до четвертого порядка включительно и некоторой другой геолого-геофизической информации. Анализ теоретических предпосылок [6] и полученных [5] формул трехмерного и одномерного распределения плотно-



Кривые изменения сжатия α с глубиной для трех моделей Земли:

—— PEM-C; — — — эллипсоидальная модель; · · · · PREM.

сти δ внутри земного эллипсоида показал, что входящая в эти формулы известная функция сжатия эллипсоида $\alpha=(a-b)/a$ является по сути граничным условием на внешней поверхности планеты, и задача определения сжатия α_i внутренних слоев $i=1, 2, \ldots, n$ постоянной плотности для эллипсоидальной модели [5] осталась нерешенной.

Предварительная референцная модель (PREM) построена на основании современных значений астрономо-геодезических параметров и новой сейсмологической информации о планете. Она хорошо представляет Землю в среднем, является параметрически простой и поэтому заслуживает особого внимания на современном этапе исследования внутреннего строения планеты.

Расчет сжатия $\alpha(\rho)$ для всех трех моделей выполнялся при $0\leqslant\rho\leqslant1$ с шагом $\Delta\rho=0{,}01$. Для некоторых значений ρ вычисленные значения α и $1/\alpha$ приведены в табл. 3. На рисунке показано изменение сжатия α с глубиной для рассматриваемых моделей.

Таким образом, для расчета сжатия внутренних слоев постоянной плотности Земли предпочтителен метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Радо, поскольку без потери необходимой точности он более прост по сравнению с приведенными в литературе методами решения дифференциального уравнения Клеро и поэтому его целесообразнее применять для решения рассматриваемой задачи.

1. *Буллен К. Е.* Плотность Земли. М., 1978. 2. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. М., 1960. 3. *Жарков В. Н., Трубицын В. П., Самсоненко Л. В.* Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. М., 1971. 4. *Картвелишвили К. М.* Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. М., 1982. 5. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр // Геофизический сб. 1978. Вып. 86. С. 46—53. 6. *Мещеряков Г. А., Шопяк И. Н., Дейнека Ю. П.* О представлении функции внутри земного эллипсоида частичной суммой обобщенного ряда Фурье // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1977. Вып. 26. С. 55—62. 7. *Dziewonski A. M., Anderson D. L.* Preliminary reference Earth model // Phys. Earth and Planet. Inter. 1981. V. 25. P. 297—356. 8. *Dziewonski A. M., Hales A. L., Lapwood E. R.* Parametricaly simple Earth models consistent with geophysical data // Phys. Earth and Planet. Inter. 1975. V. 10. P. 12—48.

Статья поступила в редколлегию 21. 10. 87