

Пример решения задачи

Элементы формул	Числовые данные	Элементы формул	Числовые данные	Элементы формул	Числовые данные
1 B_1	47° 46' 52",647	2 L_1	35° 49' 36",330	3 $A_{1,2}$	44° 12' 13",67
31 $\Delta\varphi V_1^2$	17 17,0176	21 $\Delta\lambda$	25 08,7204	26 t	18 42,412
12 $\delta\varphi$	0,0261	34 L_2	36 14 45,0504	30 $-\varepsilon$	— 22,533
31 B_2	48 04 09,6385	5 ρ''/N_1	0,3227938	35 $\delta a_{2,1}$	0,009
4 S	44797,279 м	6 σ	1446",0288	36 $A_{2,1}$	224 30 53,588
7 $\operatorname{tg} \sigma$	0,0070106613	8 $\sin \sigma$	0,070104880	14 $\sin v$	0,0048878006
9 $\cos \alpha_{1,2}$	0,71686441	10 $\sin \alpha_{1,2}$	0,69721261	16 $\operatorname{tg} \varphi_0$	1,11331519
11 $\operatorname{tg} u$	0,0050256936	14 $\sin v$	0,0048878006	25 $\operatorname{tg} t$	0,0054416626
12 u	0° 17' 16",6150	15 v	0° 16' 48",1853	26 t	0° 18' 42",417
1 φ_1	47 46 52,6470				
13 φ_0	48 04 09,2620	19 $\operatorname{tg} v$	0,0048878592	27 $\sin a$	0,005026
14 $\sin v$	0,0048878	17 $\sec \varphi_0$	1,49648612	10 $\sin \alpha_{1,2}$	0,6972
18 $\sin \varphi_0$	0,74395	20 $\operatorname{tg} \Delta\lambda$	0,0073146134	28 $\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$	0,003505
22 $\operatorname{tg} \frac{\Delta\lambda}{2}$	0,0036572	21 $\Delta\lambda$	0° 25' 08",7204	29 $\sin \varepsilon$	0,00001228
23 $\sin \delta$	0,000013299			30 ε	2",533
24 δ	2",7431				

Список литературы: 1. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. — М.: Недра, 1976. 2. Таблицы для вычисления геодезических координат. — М.: 2-е изд., 1953. 3. Ходорович П. А. Решение главной задачи высшей геодезии методом свободного выбора положения нормальной параллели при конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара. — Омск, 1938. 4. Berroth A. Sphäroidische Korrekionsgrößen durch Konforme Projektion auf die einhüllende Kugelschaf mit parallelkreisförmigen Charakteristik. — Zeit. f. Verm., 1922, № 12.

Статья поступила 6 мая 1980 г.

УДК 523.3/4

П. М. ЗАЗУЛЯК, В. Е. ЗИНГЕР, В. В. КИРИЧУК

ОБ ОЦЕНКЕ СТЕПЕННЫХ ДИСПЕРСИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

Как известно [2], по эмпирическим значениям ковариационной функции аномалий силы тяжести, полученных в результате автокорреляционного анализа аномального гравитационного по-

$$\delta\varphi = B_2 - \varphi_2 = \frac{3}{4} e'^2 \sin 2B_1 (1 + e'^2 \cos^2 B_1) \frac{\Delta\varphi^2}{\rho''} + \frac{e'^2}{6 \rho''^2} (7 \cos^2 B_1 - 3) \Delta\varphi^3; \quad (12) \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = u - \delta; \quad (13)$$

$$A_{2,1} = \alpha_{2,1} + 3\varphi_1 = \alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,1} = \alpha_{2,1} + \frac{e'^2}{4} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1,2} \frac{\sigma^2}{\rho''} + \frac{e'^2}{12} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1,2} \cos 2\alpha_{1,2} \frac{\sigma^3}{\rho''^2}; \quad (14)$$

$$\Delta L = \Delta\lambda + \delta\lambda = \Delta\lambda + \frac{e'^2}{3} \cos B_1 \sin \alpha_{1,2} \cos^2 \alpha_{1,2} \frac{\sigma^3}{\rho''^2}. \quad (15)$$

Чтобы облегчить вычисления широт, нами составлена таблица поправок $\delta\varphi$ по аргументам B_1 и $\Delta\varphi$ (табл. 1), где $\delta\varphi$ выражены в десятичных долях секунды.

Таблица 2
Значения коэффициента K

B_1	K
30°	1,50
35	1,34
40	1,17
45	1,00
50	0,83
55	0,66
60	0,50
65	0,36
70	0,23

В отличие от изображения на шаре в I конформной проекции Гаусса, где сферические разности долгот $\Delta\lambda$ равны геодезическим, в нашем случае в разность долгот вводится поправка $\delta\lambda$, обусловленная неточностью сферического азимута $\alpha_{1,2}$ (в который не введена редукция ψ_1) и средним линейным масштабом.

$$m = 1 + \frac{e'^2}{2} \cos^2 B_1 \frac{\Delta\varphi^2}{\rho''} - \frac{e'^2}{4} \sin 2B_1 \frac{\Delta\varphi^3}{\rho''^2}. \quad (16)$$

Исследования показали, что максимальное значение величины $\delta\lambda$ при $B_1 = 30^\circ$, $\alpha_{1,2} = 35^\circ 10'$ и $S = 60$ км не превышает 0,0001", следовательно, второй член формулы (15) можно не учитывать.

Разность между значениями $A_{2,1}$ и $\alpha_{2,1}$ равна утроенной редукции направления ψ_1 . Эту поправку определим с помощью графика, приведенного ниже, а умножив на коэффициент K , получим окончательное значение $\delta a_{2,1}$, максимальное значение которой 0,022".

Таким образом, если решаемых задач немного, данный способ можно рекомендовать для решения прямой геодезической задачи при расстояниях между пунктами до 60 км. Все расчеты целесообразно выполнять в нелогарифмическом виде с применением восьмизначных таблиц натуральных значений тригонометрических функций. Пример решения задачи по изложенному способу приведен в табл. 3.

В работе [1] соответственно получено:

$$B_2 = \dots 09,6384'', L_2 = \dots 45,0504'', A_{2,1} = \dots 53,557''.$$

ля планеты, можно выполнить оценку степенных дисперсий ее потенциала, исходя из соотношений вида:

$$\sum_{\varphi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \Delta\psi = \sigma_n^2; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k C[(i-1/2)\Delta\psi] P_n[\cos(i-1/2)\Delta\psi][\cos[i-1]\Delta\psi - \cos i\Delta\psi] = \sigma_n^2. \quad (2)$$

Здесь $C(\psi)$ и $C[(i-1/2)\Delta\psi]$ — численные значения ковариационной функции; $P_n(\cos \psi)$ и $P_n[\cos(i-1/2)\Delta\psi]$ — нормированные полиномы Лежандра; σ_n^2 — оцениваемая степенная дисперсия;

$$\Delta\psi = \frac{\pi}{k}. \quad (3)$$

На основе этой методики У. Каула выполнил оценку степенных дисперсий геопотенциала по значениям ковариационной (глобальной) функции аномалий силы тяжести в свободном воздухе [2].

В настоящее время информация, необходимая для вывода подобной ковариационной функции, описывающей статистические свойства аномального гравитационного поля Луны, пока недоступна по вполне очевидным причинам. Тем не менее предварительный статистический анализ некоторого модельного аномального гравитационного поля Луны уже может быть выполнен.

Воспользовавшись одной из самых полных (до 16-го порядка и степени) к настоящему времени моделей селенопотенциала (модель Феррари [3]), мы получили ряд ковариационных функций аномального поля радиальных ускорений силы тяжести, генерируемого этой моделью на высоте 100 км над поверхностью Луны, в полосе $45^\circ N - 45^\circ S$ по широте.

Поскольку методика построения эмпирических ковариационных функций и их последующего сглаживания той или иной моделью общеизвестна, а их численные значения не представляют в данной статье самостоятельного интереса, ограничимся только кратким описанием полученных ковариационных функций:

1. C_φ — широтная ковариационная функция (КФ); характеризует статистические свойства аномального поля в широтном направлении; построена для интервала $0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$ с шагом $\Delta\psi = 15^\circ$.

2. C_λ и C_{λ^*} — долготные КФ; характеризуют поле в долготном направлении; построены: C_λ — для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ с шагом $\Delta\psi = 30^\circ$, C_{λ^*} — для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ с шагом $\Delta\psi = 7^\circ, 5$.

3. C_1 , C_2 и C_3 — региональные КФ; характеризуют статистические свойства поля в регионах, выделенных из глобального

поля по признаку нестационарности дисперсии [1]; построены для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 18^\circ, 75 - 28^\circ, 75$ с шагом $2^\circ, 5$.

4. C_ψ , C_M и C_K — глобальные КФ (соответственно эмпирическая, модельная и комбинированная); характеризуют статистические свойства глобального централизованного нормированного поля аномалий радиальных ускорений силы тяжести Луны [3]; построены: C_ψ — для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 27^\circ, 5$ с шагом

Оценка степенных дисперсий гравитационного поля Луны

Порядок	Вид ковариационной функции									Φ
	C_λ	C_{λ^*}	C_φ	C_1	C_2	C_3	C_ψ	C_M	C_K	
2	18,7	—	28,1	21,2	10,3	11,1	14,0	15,9	14,6	38,9(14)
3	23,1	5,6	25,3	22,2	10,9	12,0	14,6	15,5	15,5	20,0
4	24,5	—	20,2	22,4	11,3	12,4	15,2	15,2	15,9	17,7
5	8,1	17,1	13,8	21,8	11,3	12,8	15,2	14,6	15,8	21,5
6	21,0	32,7	6,6	20,7	11,4	12,8	14,8	14,1	15,4	34,0
7	21,2	21,3	1	19,0	11,0	12,6	14,1	13,6	14,9	32,8
8	11,8	9,2	6,9	17,1	10,5	12,3	13,2	13,1	14,0	18,5
9	15,2	5,5	11,3	14,6	10,0	11,9	11,9	12,6	12,8	14,0
10	32,2	6,4	13,6	11,8	9,3	11,4	10,6	12,3	11,8	7,5
11	20,1	6,3	14,0	8,5	8,6	10,5	8,6	11,9	10,4	20,0
12	—	10,8	12,3	3,3	7,7	9,8	6,4	11,6	9,5	9,3
13	—	12,0	9,4	—	6,4	8,8	3,2	11,2	7,8	10,0
14	—	17,1	7,2	—	5,5	7,1	—	10,8	6,4	5,0
15	—	19,4	9,1	—	3,3	6,2	—	10,3	5,5	18,5
16	—	26,6	13,5	—	2,8	4,2	—	10,0	4,5	7,5

$\Delta\psi = 5^\circ$, C_M — для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ с шагом $\Delta\psi = 7^\circ, 5$ по модели

$$C(\psi) = \frac{4713}{1 + \left(\frac{\psi}{7,297}\right)^2}; \quad (4)$$

C_K — для интервала $0^\circ \leq \psi \leq 28^\circ, 75$ с шагом $\Delta\psi = 1^\circ, 25$.

Комбинированная КФ C_K представляет собой комбинацию функции C_ψ и модельной КФ вида

$$C(\psi) = 4713 \cdot e^{-0,006904\psi^2}. \quad (5)$$

В таблице приведены значения степенных дисперсий, вычисленных по перечисленным ковариационным функциям и формулам (1) — (3). В последнем столбце таблицы для сравнения записаны значения степенных дисперсий аномалий радиальных ускорений силы тяжести, вычисленных по формуле

$$\sigma_n = K_n \left[\sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \right]^{1/2}, \quad K_n = \frac{G M_\epsilon}{R^2} (n+1) \left(\frac{R_\epsilon}{R} \right)^n,$$

где $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{S}_{nm}$ — нормализованные гармоники селенопотенциала до 16-го порядка и степени включительно [3]. В скобках дано значение σ_2 , вычисленное с учетом только гармоник $\bar{C}_{22}$ и $\bar{S}_{22}$.

Прежде чем перейти к обсуждению полученных результатов, отметим особенности аномального гравитационного поля Луны, с которыми мы столкнулись при построении ковариационных функций. Если функция C_Φ для Луны имела «классический» характер КФ аномального геопотенциала — резкое убывание ковариации с возрастанием Φ , то функция C_λ оказалась осциллирующей с периодом примерно 30° , что ясно указывает на нестационарность аномального гравитационного поля Луны. Детальные исследования позволили в дальнейшем разделить общее поле на три региона, при этом первый регион охватывает практически всю обратную сторону Луны, а второй и третий — области видимой стороны — соответственно горную и область наиболее крупных круговых морей, содержащих масконы. Именно поэтому необходимо построить отдельные ковариационные функции для каждого из регионов, с одной стороны, и принудительно стационаризовать общее поле — с другой. Перед построением КФ (региональных и глобальной) из исходного поля аномалий радиальных ускорений силы тяжести (по регионам в отдельности и по всей рассматриваемой области в целом) был снят «тренд» в виде среднего арифметического из значений аномалий, отнесенных к центрам трапеций $5^\circ \times 5^\circ$. Можно предложить (подтверждается данными таблицы), что снятие «тренда» равносильно приближенному устранению влияния C_{20} .

Анализируя с учетом этих замечаний данные таблицы, можно сделать следующие выводы:

1. Для получения реальных оценок степенных дисперсий по рассматриваемой методике необходима принудительная стационаризация глобального аномального гравитационного поля Луны.

2. Региональные КФ не пригодны для нахождения степенных дисперсий глобального поля.

3. Наименее надежно определяются степенные дисперсии 6, 7, 11-го и 15-го порядков, что, с одной стороны, можно объяснить «сглаживающим характером» рассмотренной методики, а с другой — ошибками исходной информации (по оценке Феррари, именно на этих порядках следует ожидать максимальных ошибок в гармониках аномалий радиальных ускорений [3]).

4. Несмотря на ограниченность информации об аномальном гравитационном поле Луны, содержащейся в широтной КФ C_Φ , степенные дисперсии 2—5-го порядков, определенные по ней, достаточно хорошо согласуются со значениями Феррари.

Хотя использованная в работе информация ограничена по объему (практически при выводе КФ учтены аномалии радиальных ускорений только примерно для половины поверхности Луны), а сравнение выполнено по зависимым данным, исследования свидетельствуют как о правомочности применения методики У. Каулы для определения степенных дисперсий селенопотенциала, так и о справедливости выводов о статистических свойствах аномального поля Луны.

Список литературы: 1. Лебедев С. В. и др. Корреляционный анализ силы тяжести (Отчет НИР МИИГАиК. Рег. № 75 038 768). — М.: МИИГАиК, 1975. 2. Kaula W. Statistical and harmonic analysis of gravity. — J. Geophys. Res., 1959, v. 64, № 12. 3. Ferrari A. Lunar gravity: a harmonic analysis. — J. Geophys. Res., 1977, v. 82, № 20.

Статья поступила 5 мая 1980 г.

УДК 528.42

В. Е. ЗИНГЕР, В. В. КИРИЧУК

О ПРИМЕНЕНИИ МУЛЬТИКВАДРИКОВОГО МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В течение последних пятнадцати лет при решении ряда геодезических, геофизических и других задач широко применяют методы математического моделирования. Это, во-первых, обусловливается тем, что при изучении некоторых явлений часто необходимо при минимальном объеме наблюдений иметь детальную информацию об их характеристиках (значения силы тяжести, аномалий и т. д.); во-вторых, возросшими возможностями вычислительной техники, позволяющими автоматизировать процесс получения и обработки информации.

Поэтому наиболее удобными и перспективными оказались те методы моделирования, которые, с одной стороны, способствуют получению результатов с необходимой степенью точности, а с другой — легко могут быть реализованы на ЭВМ. Особый интерес в этом отношении представляет мультиквадриковый метод, предложенный Р. Л. Харди [5] и основанный на идее представления нерегулярных (математически неопределенных) поверхностей суммой широкого ряда регулярных (математически определенных), в частности квадратичных форм, или им подобных аналитических выражений.

Наиболее общий вид мультиквадрикового уравнения описывается формулой

$$C_j[Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)] = z_i; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)$ — частная квадратичная форма (или квадрата), определяемая как поверхность второго порядка; x_j, y_j — координаты фиксированных точек на поверхности, для которых получены коэффициенты мультиквадриковых функций C_j (в дальнейшем называем их узловыми); x_i, y_i — координаты текущей точки, для которой отыскивается значение количественной характеристики явления z_i ; δ — положительная или равная нулю константа. Сумма таких уравнений выражает искомую мультиквадриковую поверхность:

$$\sum_{j=1}^n C_j[Q(x_i, y_i, x_j, y_j, \delta)] = z_i. \quad (2)$$