

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ФОТОСИНТЕЗУ В РІВНЯННЯХ РОСТУ ДІАМЕТРІВ ДЕРЕВНИХ РОСЛИН КОНСОРЦІЙНИХ ЕКОТОНІВ ЗАХИСНОГО ТИПУ OPTIMIZATION OF PHOTOSYNTHESIS PARAMETERS IN EQUATIONS OF DIAMETER PLANTS GROWTH OF CONCORDIUMS OF PROTECTED TYPE ECOTONS

Обшта А. Ф^І, д.т.н. проф.

кафедра обчислювальної математики та програмування, Національний університет
«Львівська політехніка», Україна; e-mail: obshta2002@gmail.com

Руда М. В., асис.

кафедра екологічної безпеки та природоохоронної діяльності, Національний університет
«Львівська політехніка», Україна

Сорока І.Й., ст. викл.

кафедра технологій управління, Національний університет «Львівська політехніка», Україна
Anatoly Obshta, M. Ruda, I. Soroka
Lviv Polytechnic National University, Ukraine

Анотація

На основі запропонованих структур КЕЗТ розроблено математичну модель росту діаметрів деревних рослин. Це дозволить прогнозувати індекс стану консорційних екотонів захисного типу (КЕЗТ). Індекс стану КЕЗТ є одним з важливих параметрів якості функціонування лісових насаджень. Індекс стану деревостану відображає життєздатність деревного пологу через середньозважену ступінь облистяності крон і дає відносне уявлення про біологічну продуктивність та екологічну асимілятивну здатність досліджуваної ділянки КЕЗТ. Якість насаджень оцінюється за двома показниками: життєздатність та захисна ефективність. На основі статистичного опрацювання росту висот та діаметрів дубів ріст висоти та діаметра середнього дерева для заданої ділянки подано функціями Річардса – Чепмена. Для врахування впливу фотосинтезу на ріст дерев необхідно перейти до математичного моделювання росту лінійних параметрів диференціальним рівнянням, яке одержано на основі прозорих фізико-біологічних засад.

Abstract

Based on the proposed structures of the consortium of protected type ecotones, mathematical model of tree diameter growth has been developed. It allows predict the index of the state. The status index of the last is one of the important parameters of the quality of forest plantations functioning. Quality indexes of CPTE functioning on the basis of the conducted experimental studies are specified and the criteria of their gradation are formulated. Consideration is fulfilled by evaluating the obtained results and taking into account the major physical and chemical parameters. It makes possible the most objectively classification of CPTEs quality and furthermore normalization of their characteristics. Constructive-ecological concept of the CPTE is developed. Its structure is designed as an integral element of forest plantations of protective type which consist of several plant species different in height, texture, habit, and which grow simultaneously in close proximity, merging into one structural unit to protect the environment from railway lines. Received results allow state that the problem of optimization of photosynthesis parameters for considered structures is solved. Moreover, the algorithm for predicting the trees' diameter and height alterations of over the time depending on conditions of competition for light is obtained. The found parameters can be used to predict the growth of the trees' diameter, of the plantations' mass, and of the leaf area. This creates the underpinning pillar for prediction of one important quality parameter of the functioning of protective plantations that is the CPTE state index. The high mentioned the valuable instrument of the consortium of protected type ecotones state assessment.

Ключові слова

Консорційні екотони захисного типу, захисні лісові насадження, моделювання ходу росту насаджень, багатокритеріальна оцінка якості, екологічний моніторинг

Keywords

Protective Consortive Ecotone, Protection of Railroad Tracks, Horizontal and Vertical Structures, Quality Monitoring

1. Вступ

Вплив залізничного транспорту з його стаціонарними та пересувними джерелами забруднення навколишнього природного середовища (НПС) породжує багато проблем, оскільки, включає: порушення стійкості природних ландшафтних комплексів (ПЛК) транспортною інфраструктурою шляхом розвитку ерозій і обвалів; забруднення атмосфери відпрацьованими газами; постійне зростання рівня забруднення ґрунту нафтопродуктами, політантами та седиментами, а також продуктами видудування і осипання сипких

вантажів (вугілля, руда, цемент тощо). Одним з важливих екологічних методів захисту НПС є використання консорційних екотонів захисного типу (КЕЗТ) – природних дискретних структурних одиниць рослинного покриву, які мають специфічні властивості, а саме, здатність захищати НПС від шуму, шкідливих речовин тощо, а залізничну колію – від снігу, вітру, дії інших природно-кліматичних факторів. Сьогодні в Україні постає питання вирішення науково-технічного завдання вдосконалення нормативно-технічного забезпечення якості (захисної ефективності та життєздатності) функціонування КЕЗТ і гармонізації його з міжнародними стандартами.

Одним із глобальних підходів до підвищення якості функціонування КЕЗТ є модернізування вимог та норм, які ставляться до КЕЗТ, на основі міжнародних стандартів менеджменту якості та екологічного менеджменту. За таких умов актуальними постають питання щодо методів оцінювання якості КЕЗТ, використання яких сприятиме підвищенню ефективності функціонування інформаційної системи моніторингу захисту НПС.

2. Постановка проблеми

Аналіз Стандартів ISO 9001:2015 та ISO 14001:2015 показав, що їх вимоги до нормування якості захисних насаджень передбачають, зокрема, ретельне дослідження не лише зовнішнього і внутрішнього середовища насаджень, а й застосування процесного підходу до оцінювання впливу основних ресурсів зовнішнього середовища на процеси функціонування екосистем.

Закономірності росту, динаміки і продуктивності лісових насаджень відображаються за допомогою таблиць ходу росту (ТХР), що містять вікову динаміку основних таксаційних показників деревостанів за прийнятими класифікаційними одиницями, в якості яких виступають класи бонітету або типи лісу та результати досліджень ростових процесів в лісах.

Нормування якості КЕЗТ на основі Стандартів ISO 9001:2015 ґрунтується на дослідженнях проблеми росту продуктивності деревостанів. Модельна основа ТХР була і залишається досить слабкою, часто ТХР містили тільки ряди вирівняних і упорядкованих результатів спостережень. Очевидно, що чисельні моделі такого роду мало прийнятні для опису росту деревостанів у мінливому кліматі.

Інший напрямок дослідження ростових процесів в лісових насадженнях базується на моделях, за допомогою яких намагаються описати досліджувані явища на процесному рівні, тобто оцінити вплив основних ресурсів зовнішнього середовища на базові процеси функціонування екосистем, такі як, наприклад, фотосинтез і дихання [1]. Очевидна складність такого підходу, особливо в частині розробки моделей, які були б прийнятними для застосування в практиці лісового господарства. Моделі процесного типу знайшли своє застосування в екологічних дослідженнях, зокрема в розробці динамічних глобальних моделей рослинності [2]. Шлях зближення цих двох підходів видається доцільним за умов істотно мінливого світу. Першим етапом на цьому шляху є подання існуючих нормативів росту в модельному вигляді, причому параметри моделей повинні мати змістовну трактовку.

Якість насадження оцінюється за двома показниками: життєздатність та захисна ефективність.

Ефективне вирощування стійких і довговічних захисних лісових насаджень залежить від суворого виконання і послідовного проведення на високому технічному рівні всіх заходів щодо їх створення і утримання. [3].

Для згортання різноманітної екологічної інформації, одержуваної в результаті ведення екосистемного моніторингу ефективні інтегральні показники, що дозволяють оцінити стан біотичних і абіотичних компонентів екосистем і візуалізувати стан НПС на обстежуваних територіях [4, 5, 6].

В роботах [7, 8] обґрунтовано систему критеріїв та індикаторів для оцінки стану лісових екосистем на урбанізованих територіях. Стан біотичної складової лісових екосистем відображають два інтегральні показники: індекс стану деревостану та індекс структурного різноманіття лісового біоценозу.

Індекс стану деревостану H_1 (за методикою Е.Р. Мозолевої [9] із змінами та доповненнями) відображає життєздатність деревного пологу через середньозважену ступінь облистяності крон і дає відносне уявлення про біологічну продуктивність та екологічну асимілятивну здатність досліджуваної ділянки лісу.

$$H_1 = \sum_{i=1}^k Q_i \cdot f_i, \quad (1)$$

де Q_i – частка суми площ перерізу дерев i -тої категорії стану в загальній сумі площ поперечного перерізу всіх стовбурів дерев;

f_i – коефіцієнти облистяності дерев різних категорій станів (1,0 – без ознак ослаблення; 0,8 – слабо ослаблені (втрата облистяності до 25 %); 0,6 – ослаблені (втрата облистяності до 50 %); 0,4 – сильно ослаблені (втрата облистяності до 75 %); 0,2 – всохлі (втрата облистяності понад 75 %); 0 – сухостій / бурелом поточного року та минулих років).

Одним з найпростіших і практичних підходів оцінювання маси дерева та його частин є встановлення залежностей маси частин дерева від його лінійних розмірів. Оскільки лінійні розміри визначити простіше, ніж масу, то часто використовують аллометричні залежності, які описуються рівняннями регресії. Досить повні огляди літератури з даної проблеми зробили А.І. Уткін [10] та В.А. Усольцев [11, 10]. Дослідники використовують різні параметри і типи функцій, проте, як стверджує Д.Г. Щепаченко [12, 2], підхід до цієї проблеми мало змінився з 1944 року, коли J.I. Kittredge [13] вперше застосував аллометричну функцію для оцінки маси листя, використовуючи рівняння:

$$M_{fr} = \alpha D_{l,3}^b \quad (2)$$

де M_{fr} – маса фракції фітомаси; $D_{l,3}$ – середній діаметр дерева на висоті 1,3 м; a, b – коефіцієнти [2, ст. 95].
Для визначення компонент індексу стану КЕЗТ розробляються математичні моделі росту діаметрів і висот деревних рослин з врахуванням впливу фотосинтезу.

3. Формулювання цілі статті

Вхідною інформацією для розроблення методів визначення лінійних розмірів дерев (діаметрів та висот) за допомогою математичних моделей служать таксаційні показники основних лісотвірних порід 100 (дубів) КЕЗТ на ділянці площею 1 га колії Львів – Стрий, що складається з одного ряду дубів. Ці показники подані в двох великих таблицях. Там записані дані змін висот та діаметрів 100 деревних рослин, що росли протягом 88 років. Ми приводимо лише фрагмент для таблиці 2 ходу росту, а саме, інформацію про зміну висоти за віком одного дуба. Ці показники подані в таблиці 1 та 2.

Розглядаємо ділянку, на якій сформовано КЕЗТ, що складається з одного ряду дубів. В табл. 1 подана ТХР дубів. Статистичне опрацювання росту дубів показало, що розподіл ймовірностей росту дубів не описується нормальним законом. Тому нами одержані оцінки росту на основі критерію Колмогорова-Смірнова (визначене математичне сподівання та довірчий інтервал для кожного значення $t_i (i = \overline{1,30})$, з таблиці 2) [14, стор. 359]. Саме, яка б не була істинна функція розподілу росту деревної рослини $F_{\text{mod}}(x)$, маємо: $P\{F^{(n)}(x) - d_\alpha \leq F_{\text{mod}}(x) \leq F^{(n)}(x) + d_\alpha$ при всіх $x\} = 1 - \alpha$, де d_α – критичне значення D_n при рівні значимості α .

Таким чином, довірна область – це смуга шириною $\pm d_\alpha$ навколо функції вибірки $F^{(n)}(x)$ і з ймовірністю $1 - \alpha$ істинна функція $F_{\text{mod}}(x)$ лежить цілком всередині цієї смуги. Використовуючи цей результат, можна одержати оцінки об'єму вибірки, необхідні для апроксимації функції розподілу з необхідною точністю. Відомо, що при

$\alpha \leq 0,2$ і $n \geq 80, d \approx \sqrt{\frac{-\frac{1}{2} \ln \alpha}{2n}}$ [14]. Наприклад, при $\alpha = 0,05$ одержимо, що при вибірці об'єму $n = 100$ з

ймовірністю 0,095 емпірична функція розподілу віддалена від істинної не більше ніж на $\Delta = 0,061$. Метою роботи є дослідження ефективності КФС в результаті аналізу спектру їх метрологічного та програмного забезпечення.

Таблиця 1. Таблиця ходу росту КЕЗТ за роками
Table 1. Table of growth rates of CPTE over the years

Вік, років	Склад	Нсер, м	Дсер, м	N дерев, шт. га-1	G, м ² га-1	Видове число	Запас, м ³ га-1	Зміна запасу, м ³ га-1	
								сер.	пот.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	54Дз	16,6	17,6	367	8,9	0,491	73	1,8	2,74
	15Клг	13,4	14,5	146	2,4	0,520	17	0,4	0,24
	13Лпд	13,6	15,0	123	2,2	0,519	15	0,4	0,51
	10Клп	12,3	13,9	111	1,7	0,528	11	0,3	0,09
	8Яс	13,5	15	82	1,4	0,519	10	0,3	0,34
	Разом	-	-	829	16,6	-	126	3,1	3,93
50	60Дз	19,1	20,9	329	11,3	0,481	104,0	2,1	3,42
	13Лпд	16,5	18,6	89	2,4	0,502	20,0	0,4	0,47
	10Клг	16,0	17,7	77	1,9	0,504	15,0	0,3	-0,06
	10Клп	15,0	16,8	58	1,9	0,510	15,0	0,3	0,34
	7Яс	16,6	18,6	50	1,3	0,501	11,0	0,2	-0,12
	Разом	-	-	630	18,8	-	165	3,3	4,05
60	68Дз	21,3	23,9	306	13,7	0,473	138,0	2,3	3,76
	11Лпд	18,9	21,7	63	2,3	0,492	22,0	0,4	0,39
	9Клг	18,2	20,5	53	1,8	0,495	16,0	0,3	0,26
	7Яс	19,4	22	38	1,5	0,490	14,0	0,2	0,26
	5Клп	17,2	19,3	30	0,9	0,499	7,0	0,1	-1,23
	Разом	-	-	491	20,1	-	197	3,3	3,44
70	77Дз	23,0	26,8	291	16,4	0,467	177	2,5	3,78

	8КЛг	20,0	23	45	1,9	0,488	18	0,3	0,23
	7Яс	21,9	25,4	31	1,6	0,483	16	0,2	0,24
	5Лпд	20,9	24,4	20	0,9	0,486	9	0,1	-1,05
	3Клп	18,9	21,5	17	0,6	0,492	6	0,1	-0,47
	Разом	-	-	404	21,4	-	226	3,2	2,74
80	86Дз	24,5	29,6	278	19,1	0,463	217	2,7	3,95
	6Яс	24,0	28,6	20	1,3	0,478	15	0,2	-0,54
	4КЛг	21,4	25,0	20	1,0	0,484	10	0,1	-0,55
	3Лпд	22,5	26,5	12	0,6	0,481	7	0,1	-0,60
	1Клп	20,4	23,4	8	0,3	0,487	3	0,0	0,03
	Разом	-	-	337	22,4	-	252	3,2	2,30

Таблиця 2. Визначення висоти *Quercus robur* за групами віку в КЕЗТ захисного типу на ділянці колії Львів – Стрий (фрагмент таблиці)
Table 2. Definition of height *Quercus robur* by age groups in the CPTE protective type on the Lviv-Stryi track

№ з/п	Зміна висоти дуба за віком														
	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44
1.	0,07	0,1	0,6	1,1	1,9	3,5	5,3	5,7	6,3	6,9	8,6	9,2	13,4	14,6	17,2
№ з/п	Зміна висоти дуба за віком														
	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	85	88
1.	18,8	19,2	21	22,6	24,2	25,9	26,3	27,4	29,8	31,6	33,5	34,7	34,8	34,9	35,1

На основі статистичного опрацювання росту висот та діаметрів дубів, ріст висоти та діаметра середнього дерева для заданої ділянки подано функціями Річардса – Чепмена.

Коефіцієнти функції Річардса-Чепмена $H(t) = c_1(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3}$ мають змістовне біологічне трактування: c_1 – максимально можливе значення ростової функції (асимптоти), тобто відображення величини використаного потенціалу та умов росту; c_2 – масштабує часову вісь і характеризує швидкість росту деревостану, будучи пропорційною максимуму приросту. Величина $c_1 c_2 \left(1 - \frac{1}{c_3}\right) \exp(c_3 - 1)$ дає максимальне значення поточного

приросту, і є точка перегину ростової функції. Моделювання багатьох ТХР показали, що набори коефіцієнтів c_1, c_2, c_3 – добре описують особливості росту різних порід для різних умов росту [15, ст. 190].

На основі експериментальної інформації методом найменших квадратів авторами розраховані $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, t_0$.

$$H(t) = c_1(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3},$$

де $c_1 = 26,5; c_2 = 0,024; c_3 = 2,804; t_0 = -23,3$.

$$D(t) = d_1(1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_3},$$

де $d_1 = 0,31; d_2 = 0,029; d_3 = 3,772; t_0 = -17,6$

4. Виклад основного матеріалу

Для врахування впливу фотосинтезу на ріст дерев необхідно перейти до математичного моделювання росту лінійних параметрів диференціальним рівнянням, яке одержано на основі прозорих фізико-біологічних засад. Математичне моделювання росту дерева є дуже розвиненою сферою наукового пошуку. Однією з заслуг цієї сфери стало значне упорядкування великої кількості емпіричних даних про ріст [16]. Разом з тим, мабуть, ще не знайдено загальноприйнятої моделі (функції росту) дерева чи виділено моделі для різних видів дерев, хоча, як вважається, базова феноменологія процесу росту добре відома. Тому, використовують різні моделі для різних видів дерев, виходячи з досвіду опрацювання експериментальних даних про КЕЗТ, якими можна скористатися.

В таблиці 1 ходу росту насаджень є моделі, в яких вплив віку деревостанів проявляється тільки в детермінованій складовій з тим або іншим ступенем надійності та достовірності. Регресія (лінійна або криволінійна) зазвичай може бути використана для аналітичного вирівнювання дослідних даних, однак застосовувати її для екстраполяції або прогнозу росту деревостанів слід дуже обережно. Нарешті, дослідження, як правило, проводяться за умов так званого пасивного експерименту, де експеримент проводить природа

(деревостан росте під впливом чинників навколишнього середовища) з урахуванням господарської діяльності людини. Ця обставина пояснює одну з причин незначної придатності регресійних моделей, отриманих за умов пасивного експерименту при сильній кореляції вхідних змінних і викривленнях в оцінках коефіцієнтів регресії. Для математичного опису детермінованої складової часового ряду росту деревостанів застосовуються різні функції. Це – параболи 2-3 порядків, рівняння, запропоновані Ф. Корсунем, модель логарифмічного типу Бакман тощо [17].

М. Продан і Е. Ассман [18] вказують дві основні ознаки кривих росту дерев і деревостанів:

- криві росту мають асимптоту при необмеженому збільшенні віку – пряму, паралельну осі абсцис;

- поточний приріст кривої росту зростає і досягає максимуму в точці перегину кривої, а потім зменшується і повільно падає до нуля, тобто до повного розпаду деревостану.

Максимум приросту залежить від деревної породи і умов росту. Якщо ці принципи процесу росту насаджень задовольняються математичною моделлю, то така модель цілком підходить для моделювання продуктивності деревостанів.

Кількість функцій росту, запропонованих в різний час дослідниками, становить кілька десятків і збільшується з кожним роком. Техніка розрахунків параметрів функцій росту описана в книзі М. Продана [19]. Всі формули можна розділити на дві групи: отримані шляхом формально-математичних побудов або сконструйовані на основі енергетичних уявлень.

Математичні моделі росту захисних насаджень дозволяють розраховувати процес утворення фітомаси в таких межах, які забезпечують фотосинтез достатній для росту та оптимального функціонування КЕЗТ. Для цього застосовують методи розрахунку росту і продуктивності насаджень на основі зміни ваги і площі асиміляційного апарату за певний проміжок часу.

Періодичне визначення ваги рослин (W) і площі асиміляційного апарату (A) дозволяє отримувати такі показники: абсолютний і відносний прирости, абсолютну і відносну швидкість росту, величину нетто-асиміляції, відношення площі листя до ваги рослини [15].

В залежності від значень параметрів, які характеризують зовнішнє та внутрішнє середовище КЕЗТ можна використовувати різні математичні моделі.

Ми розглядаємо математичні моделі, які допускають прозору фізико-хімічну та біологічну інтерпретацію, що дозволяє обґрунтувати вимоги нормативного забезпечення функціонування КЕЗТ.

5. Результати і обговорення

Для опису росту дерева в якості вихідного пункту Колобовим [20, 21, 22] використана модель вільного росту дерева, запропонована в роботі Полетаєва [23]. Модель ґрунтується на наступних гіпотезах:

- зріла рослина в процесі росту зберігає геометричну подібність. Це означає, що у зрілої рослини з ростом не змінюються відношення геометричних розмірів, наприклад відношення висоти до діаметра;
- вільну енергію (або активну речовину) рослина отримує тільки шляхом фотосинтезу;
- вільна енергія витрачається на фотосинтез, на побудову живої тканини і на підйом розчину з ґрунту;
- у середньому за великі відрізки часу рослина отримує постійну кількість світла на одиницю поверхні і може поглинати необхідні речовини з необмеженого запасу.

В цих працях рівняння росту дерева подано у формі закону збереження енергії:

$$\alpha x^2 - \beta x^2 - \gamma x^2 x - \delta \frac{d}{dt}(\rho x^2) = 0 \quad (3)$$

де, x – лінійний розмір дерева; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – деякі константи; ρ – густина рослини.

Поверхня крони дерева вважається пропорційною x^2 , об'єм дерева – пропорційним x^3 . Перший член в рівнянні дорівнює отриманій в результаті фотосинтезу енергії, другий – витрата енергія на потреби фотосинтезу, третя – витрати на транспортування живильного розчину у всіх частинах рослини, які пропорційні об'єму добутку дерева і висоти, оскільки вони пов'язані з подоланням сили тяжіння, четвертий – витрата на збільшення маси рослини.

У роботах [24, 25] відзначався той факт, що в разі обмеження світлових ресурсів дерево перерозподіляє свій приріст на користь приросту висоти. Тому вважається, що дерево, яке росте в умовах конкуренції за світло, не зберігає геометричної подібності між приростом об'єму і висоти. Тому Колобовим було запропоновано виразити висоту дерева (H) в якості незалежної змінної, а x^2 позначити як об'єм (V), таким чином, з огляду на зміну геометричних пропорцій дерева в ході його росту, рівняння (3.3) модифікується і виглядає наступним чином:

$$aS - \alpha \beta S - \gamma V H - \delta \frac{d}{dt}(\rho V) = 0, \quad (4)$$

де V – об'єм стовбура, H – висота, S – площа листової поверхні дерева.

Тоді:

$$\frac{dV}{dT} = EbS - cVH, \quad (5)$$

де $b = \frac{\alpha - \alpha \cdot \beta}{\delta \cdot \rho}$, та $c = \frac{\gamma}{\delta \cdot \rho}$ – постійні, E – інтенсивність фотосинтезу одиниці листової поверхні.

Залежність інтенсивності фотосинтезу від сонячної радіації описується функцією типу Міхаеліса – Ментена [26, 27]:

$$E = \frac{aIP_{\max}}{aI + P_{\max}}, \quad (6)$$

де I – інтенсивність радіації, a – початковий нахил кривої продуктивності, P_{\max} – максимальна інтенсивність фотосинтезу одиниці листової поверхні.

Як показано в монографіях [28, 29] інтенсивність сонячної радіації всередині рослинного покриву визначається зовнішніми і внутрішніми чинниками; до других відноситься кількість і розподіл листової поверхні. Залежність ослаблення радіації рослинним покривом може бути виражена моделлю Монсі і Саскі [30], згідно з якою коефіцієнт пропускання світла залежить від щільності і товщини рослинного шару.

Отже, дотримуючись ходу обґрунтувань, які викладені в працях [31, 32], висувається гіпотеза про те, що дерево отримує енергію тільки шляхом фотосинтезу, вільна енергія витрачається на потреби фотосинтезу, на побудову живої тканини і на підйом розчину з ґрунту. Рівняння росту записується в формі закону збереження енергії. Ріст окремого дерева описаний системою рівнянь, що дозволяє обчислювати об'єм, висоту і діаметр ствола на кожному кроці моделювання з врахуванням впливу конкуренції зі сторони дерев, які ростуть поруч:

$$\frac{dV}{dt} = Pb - cVH, \quad (7)$$

$$P = \frac{P_{\max} V^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{p} \cdot \ln \left(\frac{P_{\max} + aQ}{P_{\max} + aQ \cdot \exp(-pV^d)} \right), \quad (8)$$

$$H(t) = c(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3}, \quad (9)$$

$$D(t) = d_1(1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_3}, \quad (10)$$

$$D = \sqrt{\frac{4V}{\pi H \alpha V^{-\gamma}}}, \quad (11)$$

де V , H , D – об'єм, висота і діаметр ствола дерева,

a – початковий нахил кривої продуктивності,

P – інтенсивність фотосинтезу дерева,

P_{\max} – максимальна інтенсивність фотосинтезу одиниці листової поверхні,

p – коефіцієнт поглинання світла,

d – фрактальна розмірність крони,

b – коефіцієнт перетворення енергії в приріст об'єму ствола,

c – коефіцієнт пропорційності витрат енергії на транспорт асимілятів,

Q – доля сонячної радіації, що падає на зовнішню поверхню крони,

c_1 , c_2 , c_3 – видоспецифічні параметри росту дерева у висоту,

d_1 , d_2 , d_3 – видоспецифічні параметри росту діаметра на висоті 1,3 м,

α , γ – коефіцієнт залежності видового числа від об'єму ствола.

Для визначення параметрів фотосинтезу необхідно здійснити деякі підготовчі перетворення. Зауважимо, по-перше, що з співвідношення (7) можна виразити об'єм стовбура дерева через його діаметр та висоту:

$$V = \left(\alpha \pi H \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (12)$$

Виконавши елементарні перетворення з 7-10, отримаємо рівняння зміни діаметру і висоти дерева за умов конкуренції за світло вигляду:

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{1}{D^2 \cdot H} \cdot \frac{dH}{dt} - c \cdot D^2 \cdot H + \frac{D^2 \cdot P \cdot H}{\left(\alpha \pi H \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}}, \quad (13)$$

Знайдемо похідні від $D(t)$ і $H(t)$ скориставшись поданням (9), (10), та підставимо їх в (11). Одержимо функціональне рівняння, яке залежить від шуканих параметрів a , p , P_{\max} , b , c , d , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 , t_0 , α , γ :

$$\begin{aligned} d_1 d_2 d_3 (1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_2-1} \cdot \exp[-d_2(t - t_0)] = & -\frac{1}{D^2 \cdot H} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 (1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_2-1} \cdot \exp[-c_2(t - t_0)] + \\ & + \frac{\left(D^2 \left(P_{\max} V^{\left(\frac{2}{3}\right)} \right) \right)}{p} \cdot \ln \frac{(P_{\max} + aQ)}{(P_{\max} + aQ \cdot \exp(-pV^d)) \cdot b} - c \cdot D^2 \cdot H, \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритм пошуку коефіцієнтів математичної моделі полягає в наступному:

➤ по-перше, визначаємо такі значення c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 , за яких досягають мінімуму вирази $S_1(d_1, d_2, d_3, t_0)$, $S_2(c_1, c_2, c_3, t_0)$, які визначаються співвідношеннями:

$$S_1(d_1, d_2, d_3, t_0) = \sum_{i=1}^n (D(t_i) - D_{\text{tab}}(t_i))^2 \quad (15)$$

$$S_2(c_1, c_2, c_3, t_0) = \sum_{i=1}^n (H(t_i) - H_{\text{tab}}(t_i))^2 \quad (16)$$

Тут $D_{tab}(t_k)$, $H_{tab}(t_k)$ фактичні значення діаметра та висоти дерева одержані з ТХР, $D(t_k)$, $H(t_k)$ значення діаметра та висоти дерева відповідно, розраховані за формулами моделі (8, 9), t_k час в роках.

Рівняння (13) після підстановки знайдених значень c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 матиме вигляд:

$$G(t, a, b, c, d, \alpha, \gamma, P_{\max}, p, Q) = \frac{1,8(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{1,804} - 1,8(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}} -$$

$$- c \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804} +$$

$$+ \frac{1}{\left(\frac{\alpha \cdot \pi \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \cdot b$$

$$\frac{P_{\max} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \pi \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{2}{3+3\lambda}}}{p} \cdot$$

$$\ln \left(\frac{P_{\max} + aQ}{P_{\max} \cdot aQ \cdot \exp \left(-p \left(\frac{\alpha \cdot \pi \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{d}{1+\gamma}} \right)} \right) -$$

$$- 0,04(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{2,772} - 0,04(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{3,772}, \quad (17)$$

➤ методом нелінійної оптимізації обчислюємо корені a , p , P_{\max} , b , c , d , α , d цього рівняння.

Для оцінки параметрів моделі розроблені програми на основі методів найменших квадратів і нелінійної оптимізації [33, стор. 5-37]. Підібрані такі значення параметрів a , p , P_{\max} , b , c , d , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 , α , γ , при яких ряд отриманих модельних значень, найкращим чином апроксимує дані, тобто розв'язана наступна задача. Задана функція формулою (17). Слід знайти такі значення параметрів a , b , c , d , α , γ , P_{\max} , p , Q , при яких вираз

$$\min_{1 \leq a \leq 180} \sum_{i=1}^{30} G^2(t_i, a, b, c, d, \alpha, \gamma, P_{\max}, p, Q)$$

$$0,022 \leq b \leq 0,06$$

$$0,0005 \leq c \leq 0,0025$$

$$0,125 \leq d \leq 0,45$$

$$0,275 \leq \alpha \leq 0,495$$

$$0,01 \leq \gamma \leq 0,08$$

$$10 \leq P_{\max} \leq 50$$

$$75 \leq p \leq 95$$

$$0,4 \leq Q \leq 0,9$$

досягає мінімуму та обчислити цей мінімум. Час t_i приймає значення задані таблицею 3:

Таблиця 3. Зміна значень t_i
Table 3. Change values t_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t_i	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44
i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
t_i	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	85	88

Результати розв'язання цієї задачі: $a = 5,00$ $b = 0,05$ $c = 0,0005$ $d = 0,30$ $\alpha = 0,30$ $\gamma = 0,02$ $P_{\max} = 50,00$ $p = 90,00$ $q = 0,40$

Знайдені параметри можна використати для прогнозування росту діаметра дерева, прогнозування росту маси насаджень, росту площі листя КЕЗТ, а отже, прогнозування параметру стану КЕЗТ.

6. Висновки

Результати дають змогу стверджувати, що розв'язана задача оптимізації параметрів фотосинтезу для КЕЗТ та розроблено алгоритм прогнозування зміни діаметру і висоти дерева з часом за умов конкуренції за світло, що дозволяє прогнозувати один з важливих параметрів якості функціонування захисних насаджень – індекс стану КЕЗТ.

Подяка

Автори висловлюють вдячність колективу кафедри Інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету «Львівська політехніка», Україна, за надану допомогу та всемірне сприяння у підготовці даної статті.

Конфлікт інтересів

Не існує фінансового або іншого конфлікту, що стосується роботи.

Література

1. Голубець М.А. Екосистемологія. – Львів: Поллі, 2000. – 316 с.
2. Щепаченко Д.Г., Шведенко А.З., Шалаев В.С. Биологическая продуктивность и бюджет углерода лиственных лесов Северо-Востока России: Монография. – М.: Московский гос. ун-т леса, 2008. – 296 с.
3. Методичні вказівки щодо устрою, створення, відновлення та поточного утримання захисних насаджень на землях залізниць України / А.С. Бедрицький, М.М. Гузь, М.Д. Костюк, М.О. Плахтій, В.М. Гузь, Л.А. Бедрицька, Н.І. Попова. – К : Вид-во «Транспорт України», 2003. – 264 с.
4. Воробейчик Е.Л., Садыков О.Ф., Фарафонов М.Г. Экологическое нормирование техногенных загрязнений. – Екатеринбург: Наука, 1994. – 280 с.
5. Количественные методы в экологии и гидробиологии / под ред. Розенберга Г.С. – Тольятти: ИЭВБ, 2005. – 404 с.
6. Левич А.П., Булгаков Н.Г., Максимов В.Н. Теоретические и методические основы технологии регионального контроля природной среды по данным экологического мониторинга. – М.: НИИ-Природа, 2004. – 271 с.
7. Гладун Г.Б., Трофименко М.С., Лохматов М.А. Захисні лісові насадження: проектування, вирощування, впорядкування/ За ред. Г.Б. Гладуна – Харків: Нове слово, 2005. – 390 с.
8. Гладун Г.Б., Гладун Ю.Г. Захист автомобільних доріг лісовими насадженнями лінійного типу та їхні прогнозні обсяги Лісівництво і агро меліорація Харків: УкрНДІЛГ, 2013. – Вип.123, с. 103 – 113.
9. Мозолева Е.Г. Информационное обеспечение урбомониторинга / Е.Г. Мозолева // Мониторинг состояния лесных и городских экосистем. – М.: МГУЛ, 2004. – С. 108–123.
10. Уткин А.И. Методика исследований первичной биологической продуктивности лесов // Биологическая продуктивность лесов Поволжья. – М.: Наука, 1982. – С. 59-72.
11. Усольцев, В.А. Продуктивность и структура фитомассы древостоев: автореф. дис. ... д-ра с.-х. наук / В.А. Усольцев. – Киев, 1985. – 46 с.
12. Усольцев, В.А. Рост и структура фитомассы древостоев / В.А. Усольцев. – Новосибирск: Наука, 1988. – 253 с.
13. Kittredge J. Estimation of the amount of foliage of trees and stands. – J. Forest, 1944, v. 42, №11.
14. Айвазян С. А. и др. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 471 с., С. 359-360.
15. Карманова И.В. Математические методы изучения роста и продуктивности растений. М., Наука, 1976. – 223 с., С. 5.
16. Гавриков В.Л. Моделирование роста деревьев и древостоев в контексте углеродного цикла 03.02.08 – Экология диссертация на соискание ученой степени доктора биологических наук. – Красноярск – 2016. 493 с. Стр. 71-91.
17. Багинский, В. Ф. Таксация леса : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям "Лесное хозяйство", "Лесоинженерное дело" / В. Ф. Багинский ; рец.: О. А. Атрощенко, В. Б. Гедых; Министерство образования Республики Беларусь, Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины". - Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 398 с.
18. Asmann, E. Waldertragekunde / E. Asmann. – München-Bonn-Wien: BLW, 1961. – 327 s.
19. Prodan, M. Holzmesslehre / M. Prodan. – Frankfurt am Mein: Sauerlandere Verlag, 1965. – 644 s.
20. Колобов А.Н. Моделирование процессов конкуренции за свет в смешанных разновозрастных древостоях // Вестник Томского государственного университета. – 2011. – № 351.
21. Kolobov A.N., Frisman E.Ya. Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands // Ecological Complexity. 2016. V. 27. P. 29–39.
22. Колобов А.Н. Моделирование пространственно-временной динамики древесных сообществ: индивидуально-ориентированный подход // Лесоведение. 2014. № 5. с. 72–82.
23. Полетаев И.А. Проблемы кибернетики. М.: Наука. 1966. Т. 16. С. 171-190.
24. Harper J.L. Darwinian approach to plant ecology. J. Ecol. 1967. V. 55. P. 247–270.
25. Harper J.L. Population biology of plants. N.Y.: Acad. Press. 1977. 892 p.
26. Торнли Дж.Г.М. Математические модели в физиологии растений. Киев: Наукова думка. 1982. – 312 с.
27. Куль К., Куль О. Динамическое моделирование роста деревьев. Таллинн: Валгус. 1989. – 231 с.

28. Алексеев В.А. Световой режим леса. Л.: Наука. 1975. – 227 с. 15.
29. Росс Ю.К. Радиационный режим и архитектура растительного покрова. Ленинград.: Гидрометеиздат. 1975. – 327 с.
30. Monsi M., Saeki T. Uber den Lichtfactor in den Pflanzengesellschaften und seine Bedeutung fur die Stoffproduction. Jap. Jour. Bot. 1953. V. 14. № 1. P. 22–52.
31. Колобов А.Н., Фрисман Е.Я. Моделирование процесса конкуренции за свет в одновозрастных древостоях // Известия РАН. Серия биологическая. 2013. № 4. С. 463–473.
32. Колобов А.Н., Фрисман Е.Я. Имитационное моделирование процессов самоизреживания в одновозрастных однопородных древостоях // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т.11. № 2. с. 323–335.
33. Расчет и конструирование механизмов и деталей приборов / Под ред. проф. д-ра техн. наук Ф. Л. Литвина. - Ленинград : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1975. – 199 с.; ил.; 22 см. В огл. авт.: С.А. Родионов, Е.И. Гутман, Э.Е. Пейсах и др. Глава книги Оптимизация нелинейных систем С. 5-37.

References

- [1] M. Golubecz, *Ekosystemologiya*. Lviv, Ukraine: Polli, 2000.
- [2] D. Shhepachenko, A. Shvedenko, V. Shalaev, *Biologicheskaja produktivnost i bjudzhet ugleroda listvennichnyh lesov Severo-Vostoka Rossii*. Moscow, RF: Mosk. gos. un-t lesa, 2008.
- [3] A. Bedryczkyj, M. Guz, M. Kostyuk, M. Plahtij, V. Guz, L. Bedryczka, N. Popova, *Metodychni vkazivky shhodoustroyu, stvorenniya, vidnovlenniya ta potochного utrymanniya zahysnyh nasadzhzen na zemlyah zaliznych Ukrainy*. Kyiv, Ukraine: Transport Ukrainy, 2003.
- [4] E. Vorobejchik, O. Sadykov, M. Farafonov, *Ekologicheskoe normirovanie tehnogennyh zagryaznenij*. Ekaterinburg, RF: Nauka, 1994.
- [5] *Kolichestvennye metody v jekologii i gidrobiologii*, pod red. G. Rozenberga. Toljatti, RF: IJeVB, 2005.
- [6] A. Levich, N. Bulgakov, V. Maksimov, *Teoreticheskie i metodicheskie osnovy tehnologii regionalnogo kontrolja prirodnoj sredy po dannym jekologicheskogo monitoring*. Moscow, RF: NIA-Priroda, 2004.
- [7] G. Gladun, M. Trofymenko, M. Loxmatov, *Zahysni lisovi nasadzhennya: proektuvannya, vyroshhuvannya, vporyadkuvannya*. Kharkiv, Ukraine: Nove slovo, 2005.
- [8] G. Gladyn, Yu. Gladyn, “Zahyst avtomobilnyh dopih licovymy nacadzhennyamy linijnogo typu ta yihni prognoznyi obcyagy”, *Lisivnyctvo i agromeliopacziya*. Kharkiv, Ukraine, no.123, p.103–113, 2013.
- [9] E. Mozolevskaja, “Informacionnoe obespechenie urbomonitoringa”, in *Monitoring sostojaniya lesnyh i gorodskih jekosistem*. Moscow, RF: MGUL, 2004, pp.108–123.
- [10] A. Utkin, “Metodika issledovanij pervichnoj biologicheskoy produktivnosti lesov”, in *Biologicheskaja produktivnost lesov Povolzhja*. Moscow, RF: Nauka, 1982, pp.59–72.
- [11] V. Usolcev, “Produktivnost i struktura fitomassy drevostoev”, Dr.Sc. thesis, Kyiv, Ukraine, 1985.
- [12] V. Usolcev, *Rost i struktura fitomassy drevostoev*. Novosibirsk, USSR: Nauka, 1988.
- [13] J. Kittredge, “Estimation of the amount of foliage of trees and stands”, *J. Forest*, vol.42, no.11, 1944.
- [14] S. Ajvazjan, I. Enjukov, L. Meshalkin, *Prikladnaja statistika: Osnovy modelirovaniya i pervichnaja obrabotka dannyh*. Moscow, USSR: Finansy i statistika, 1983.
- [15] I. Karmanova, *Matematicheskie metody izuchenija rosta i produktivnosti rastenij*. Moscow, USSR: Nauka, 1976.
- [16] V. Gavrikov, “Modelirovanie rosta derevyev i drevostoev v kontekste uglerodnogo cikla”, Dr.Sc. diss., Krasnojarsk, RF, 2016.
- [17] V. Baginskij, *Taksacija lesa*. Gomel, Belarus: GGU im. F. Skoriny, 2013.
- [18] E. Asmann, *Waldertragekunde*. München-Bonn-Wien: BLW, 1961.
- [19] Frankfurt am Main, Germany: J.D. Sauerlaender's Verlag. Lund HG ... *Prodan M*, 1965.
- [20] A. Kolobov, “Modelirovanie processov konkurencii za svet v smeshannyh raznovozrastnyh drevostojah”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, RF, no.351, p.34–39. 2011.
- [21] A. Kolobov, E. Frisman, “Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands”, *Ecological Complexity*, vol.27, p.29–39, 2016.
- [22] A. Kolobov, “Modelirovanie prostranstvenno-vremennoj dinamiki drevesnyh soobshhestv: individualno-orientirovannyj podhod”, *Lesovedenie*, no.5, p.72–82, 2014.
- [23] I. Poletaev, *Problemy kibernetiki*. Moscow, USSR: Nauka, vol.16, 1966, pp.171–190.
- [24] J. Harper, “Darwinian approach to plant ecology”, *J. Ecol*, vol.55, p.247–270, 1967.
- [25] J. Harper, *Population biology of plants*. N.Y.: Acad. Press, 1977.
- [26] Dz. Tornli, *Matematicheskie modeli v fiziologii rastenij*. Kyiv, Ukraine: Naukova dumka, 1982.
- [27] K. Kull, O. Kull, *Dinamicheskoe modelirovanie rosta derevyev*. Tallinn, Estonia: Valgus, 1989.
- [28] V. Alekseev, *Svetovoj rezhim lesa*. Leningrad, USSR: Nauka, 1975.
- [29] Ju. Ross, *Radiacionnyj rezhim i arhitektonika rastitel'nogo pokrova*. Leningrad, USSR: Gidrometeoizdat, 1975.
- [30] M. Monsi, T. Saeki, “Uber den Lichtfactor in den Pflanzengesellschaften und seine Bedeutung fur die Stoffproduction”, *Jap. Jour. Bot.*, vol.14, no.1, p.22–52, 1953.
- [31] A. Kolobov, E. Frisman, “Simulation of the competition for light in forest stands of the same age”, *Biology Bulletin*, vol.40, no.4, p.394–403, 2013.
- [32] A. Kolobov, E. Frisman, “Imitacionnoe modelirovanie processov samoizrezhivaniya v odnovozrastnyh odnoporodnyh drevostojah”, *Matematicheskaja biologija i bioinformatika*, vol.11, no.2, p.323–335, 2016.
- [33] S. Rodionov, E. Gutman, Je. Pejsah et al. “Raschet i konstruirovanie mehanizmov i detalей priborov”, in

Optimizacija nelinejnyh system, Leningrad, USSR: Mashinostroenie, 1975, pp.5-37.