

О. М. Ярошевич, І. П. Забродець, В. Л. Мартинюк, М. П. Ярошевич
Луцький національний технічний університет

КОЛИВАННЯ ПРИВОДА ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН З ДЕБАЛАНСНИМИ ЗБУДНИКАМИ

© Ярошевич О. М., Забродець І. П., Мартинюк В. Л., Ярошевич М. П., 2018

doi

Мета. Визначення впливу пружності з'єднання дебалансного віброзбудника з ротором асинхронного електродвигуна на коливні процеси в приводі вібромашини для покращення її динамічних характеристик. **Методика.** Для аналітичних досліджень використано методи прикладної теорії коливань, підхід вібраційної механіки та метод прямого розділення рухів. Моделювання процесу пуску вібромашини полягало у чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь руху механічної коливальної системи та динамічної моделі асинхронного електродвигуна за допомогою програмного продукту Maple. **Результати.** У роботі показано, що наявність пружного з'єднання вносить істотні особливості в динаміку привода вібромашин, які потрібно враховувати при їх проектуванні. Отримано формули, котрі дозволяють оцінити амплітуду пускових деформацій та величину моменту, які виникають у приводі. Показано, що амплітуду коливань привода в момент пуску вібромашини здебільшого залежить від віддаленості його власної частоти від частоти струму у мережі живлення електродвигуна. Отримано рівняння крутильних коливань привода поблизу стаціонарних режимів обертання дебалансного віброзбудника (яке в т.ч., враховує випадок “застрягання” швидкості електродвигуна в зоні резонансних частот вібромашини). Виявлено існуючий взаємозв'язок коливань несівної системи вібромашини та привода. Встановлено, що під час пуску вібромашин у разі прояву ефекту Зоммерфельда, крім резонансного зростання гальмівного вібраційного моменту і “застрягання” швидкості двигуна, збуджуються резонансні коливання пружно-демпфувальних елементів, що з'єднують ротори двигуна та збудника, які збільшують динамічні навантаження і втрати енергії в системі. **Наукова новизна.** Отримали подальшого розвитку теоретичні положення динаміки пуску вібраційних машин з інерційним приводом з урахуванням пружності з'єднання роторів електродвигуна обмеженої потужності та дебалансного віброзбудника. Встановлено, що за наявності в приводі вібромашини пружного елемента до його критичних частот додаються частоти власних коливань вібромашини та частота струму у мережі живлення електродвигуна. **Практична значущість.** Результати роботи дозволяють більш обґрунтовано вибирати параметри вібраційних машин із дебалансним приводом, що дасть змогу зменшувати амплітуди його коливань та динамічні навантаження.

Ключові слова: вібромашина, дебалансний віброзбудник, коливання привода, пружна муфта, ефект Зоммерфельда.

Вступ. Вібраційні машини доволі широко застосовуються у багатьох галузях промисловості [1–4]. Найпоширенішими є машини з інерційним приводом завдяки простоті конструкції, компактності за значної збурювальної сили. Однак, у перехідних режимах роботи таких машин можуть виникати істотні коливання, які супроводжуються суттєвим зростанням динамічних навантажень. Наприклад, практика експлуатації вібромайданчиків для виготовлення бетонних та залізобетонних виробів засвідчує вихід із ладу деталей привода (зокрема, карданних валів та пружних муфт) внаслідок їхніх руйнівних коливань [5]. Тому дослідження динаміки дебалансного привода вібромашин з урахуванням його пружності становить актуальну задачу вібротехніки.

Аналіз літературних джерел за темою статті. Пуск вібраційних машин з інерційним приводом та проходження зони резонансу досліджувалися у низці праць, узагальнення яких наведено в [1, 2]. Показано, що відомі закономірності, які мають місце під час прояву ефекту Зоммерфельда, порівняно просто отримуються шляхом використання підходу вібраційної механіки та методу прямого розділення рухів; для випадку дебалансного віброзбудника, встановленого на несівному тілі з одним ступенем вільності, отримано рівняння для частоти обертання збудника у

стаціонарних режимах руху та вираз для вібраційного моменту (додаткового динамічного навантаження, спричиненого коливаннями). У [6, 7] той самий підхід використовується для дослідження розбігу вібромашини з плоскими коливаннями несівного тіла та двома дебалансними віброзбудниками. Практичне використання ефекту Зоммерфельда обґрунтовано в статтях [8–11]. У роботах [12, 13] досліджується закономірність руху системи поблизу області ефекту Зоммерфельда – наявність так званого “внутрішнього маятника”. Існування внутрішнього маятника та його напівповільних коливань є фізичною основою деяких методів керування пуском вібраційних машин з інерційним збудженням [1, 6]. У роботах [13, 14] розглядаються резонансні коливання в системах з обмеженим збудженням, у яких спостерігається взаємодія джерела енергії та пружної підсистеми, що призводить до виникнення резонансних коливань. Однак, у цих та інших відомих дослідженнях, присвячених цій проблемі, використано лише динамічні моделі машин із жорсткими ланками.

Розв’язанню різноманітних задач динаміки машинних агрегатів із пружними муфтами та передатними механізмами присвячено багато праць, зокрема [15, 16]. З’ясовано, що всебічний аналіз динаміки машини можливий лише на основі сумісного урахування динамічних властивостей як механічної коливальної системи, так і електродвигуна привода. Проте, одержані результати не завжди можна застосувати для розглядуваного типу вібромашин із дебалансним приводом, адже вони мають низку специфічних особливостей [1, 4].

У роботах [17–19] для дослідження динаміки вібромашини з інерційним збудником та асинхронним електродвигуном використано математичні моделі, які враховують пружне з’єднання роторів двигуна та збудника. Однак, вплив на динаміку машини саме пружного зв’язку роторів не аналізували.

Методики розрахунку елементів конструкції вібраційних машин з дебалансним приводом викладено у низці робіт, наприклад [4, 20]. Проте, питання, пов’язані з муфтами приводу чи механізмами передач у них, обмежені лише описом конструкцій.

Серед останніх робіт, у яких розглянуто проблеми пуску вібраційних машин з інерційним приводом з урахуванням його пружності, слід назвати статтю [21]. У ній показано, що наявність пружно-демпфуючого з’єднання роторів електродвигуна та віброзбудника вносить істотні особливості в динаміку вібраційної машини. Проте, в цій роботі обмежилися фактично лише виведенням формули для вібраційного моменту та виразу, який описує коливання привода вібромашини з одним ступенем вільності несівного тіла; при цьому їх детальний аналіз не наводиться. У даній статті результати отримані в роботі [21] розвиваються та доповнюються.

Мета. Мета роботи полягає у визначенні впливу пружності з’єднання дебалансного віброзбудника з ротором асинхронного електродвигуна на коливні процеси в приводі вібромашини для покращення її динамічних характеристик.

Опис коливальної системи та рівняння руху. Широкий клас вібромашини може бути ідеалізованим у вигляді системи, наведеної на рис. 1. На несівному твердому, пов’язаному з нерухомою основою за допомогою пружних та демпфувальних елементів, встановлено дебалансний віброзбудник, який приводиться в обертання від електродвигуна асинхронного типу. Нехай ротори двигуна та збудника з’єднано за допомогою пружної муфти. Зазначимо, що загалом ротори можуть бути з’єднані будь-яким пружно-демпфуючим елементом (наприклад, пасовою передачею чи карданним валом). Динамічна система характеризується п’ятьма узагальненими координатами: кутами повороту роторів електродвигуна j_1 , віброзбудника j_2 та координатами несівного тіла $q_i = x, y, j$. Рівняння руху системи запишемо у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{j}_1 + b_m (\dot{j}_1 - \dot{j}_2) + c_m (j_1 - j_2) &= L_1, \\ I_2 \ddot{j}_2 - b_m (\dot{j}_1 - \dot{j}_2) - c_m (j_1 - j_2) &= -R_2(\dot{j}_2) + \Phi(\ddot{j}_1, j_2), \\ M \ddot{x} + b_x \dot{x} + c_x x + c_{xj} j &= m_e (\ddot{j}_2 \sin j_2 + \dot{j}_2^2 \cos j_2), \quad M \ddot{y} + b_y \dot{y} + c_y y = m_e (\ddot{j}_2 \cos j_2 - \dot{j}_2^2 \sin j_2), \\ J \ddot{j} + b_j \dot{j} + c_j j + c_{xj} x &= -m_e r (\ddot{j}_2 \sin j_2 + \dot{j}_2^2 \cos j_2), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Phi(j_2) = me(\sin j_2 + \cos j_2 - \sin j_2 + g \cos j_2)$; I_1, I_2 – приведені моменти інерції ротора електродвигуна та ротора вібробудника, відповідно; m, e – маса збудника та його ексцентриситет; M, J – маса та момент інерції несівного тіла; b_m, b_{q_i} – коефіцієнти опору пружної муфти та пружин підвіски несівного тіла; c_m, c_{q_i} – жорсткість муфти та пружин підвіски; r – відстань, що визначає положення осі збудника стосовно центра мас несівного тіла C ; g – пришвидження вільного падіння; $L_1, R_2(j_2)$ – моменти електродвигуна та сил опору обертанню роторів двигуна та збудника.

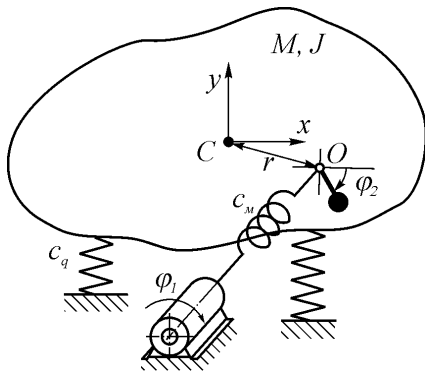


Рис. 1. Схема вібраційної машини

Fig. 1. Schematic representation of vibration machine

Зазначимо, що: резонансні режими привода детально не досліджуються, а лише виявляються умови виникнення та надаються рекомендації щодо їх уникнення; оскільки розглядаються малі коливання привода, то вважаємо, що муфта має лінійну характеристику; особливості динаміки системи з нелінійною муфтою проаналізуємо при чисельному моделюванні.

Виклад основного матеріалу. Найінтенсивніші коливні процеси та, відповідно, максимальні динамічні навантаження в приводі вібрмашини виникають під час її розбігу (вибігу), зокрема, безпосередньо в момент пуску електродвигуна та під час проходження зони резонансних частот машини. Розглянемо ці періоди та робочий режим руху вібрмашини.

Дослідження моменту пуску електродвигуна. Для дослідження першого з виокремлених періодів опишемо відносний рух роторів двигуна та вібробудника за допомогою однієї змінної – кута закручування муфти j_{12} :

$$J_{12} + 2b_m j_{12} + p_m^2 j_{12} = \frac{L_1}{I_1} + \frac{R_2(j_2) - \Phi(j_2)}{I_2}, \quad (2)$$

$$\text{де } j_{12} = j_1 - j_2; \quad b_m = b_m \frac{I_1 + I_2}{2I_1 I_2}; \quad p_m = \sqrt{c_m \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}.$$

У правій частині рівняння (2) можна знехтувати другим доданком. На користь такого спрощення рівняння (2) свідчить чисельна оцінка його складових [6], а також те, що для вібрмашин з дебалансним приводом зазвичай приведений момент інерції ротора електродвигуна на порядок менший за приведений момент інерції вібробудника. Отже, виникає ніби пуск двигуна без навантаження. Отже, у разі розглядуваного підходу немає принципової різниці скільки ступенів вільності має несівна система вібрмашини, тобто, прямолінійні, плоскі чи просторові коливання здійснює робочий орган. У такому випадку коливальні процеси, які виникають при пуску у приводі, насамперед залежать від динаміки електродвигуна. Беручи до уваги, що в початковий момент пуску асинхронного двигуна виникають істотні коливання його електромагнітного моменту з частотою, близькою до частоти струму, вираз L_1 у правій частині (2) можна подати у вигляді $L_1 = L_{\text{пуск}}(1 - e^{-b_{\text{ос}} t} \cos w_{\text{cmp}} t)$ (тут $L_{\text{пуск}}$ – пусковий момент двигуна; $b_{\text{ос}}$ – коефіцієнт, що характеризує згасання коливань електромагнітного моменту двигуна; $w_{\text{cmp}} = 6,28 f_{\text{cmp}}$; $f_{\text{cmp}} = 50 \text{ Гц}$). При цьому, досліджуючи перший з виокремлених періодів пуску, знехтуємо процесом згасання цих коливань. Це є цілком виправданим, оскільки досліджується доволі короткотривалий період часу після вмикання електродвигуна, коли розглядувані коливання ще не

встигають суттєво зменшитися; до того ж, вони згасають значно повільніше, ніж вільні коливання привода.

Спочатку розглянемо практично цікаві нерезонансні випадки (власна частота муфти p_m достатньо віддалена від частоти збудження w_{cmp}). У цьому разі можна очікувати, що коливання привода будуть незначними. Перевіримо цей факт. Розв'язок рівняння (2) подамо у вигляді

$$j_{12} = j_{cm} - e^{-b_m t} (j_{cm} + B_1) [h_m \sin p_m t + \cos p_m t] + B_1 \cos w_{cmp} t, \quad (3)$$

де $j_{cm} = \frac{L_{пуск}}{c_m}$ – статична деформація; $B_1 = -j_{cm} \left(1 - \frac{w_{cmp}^2}{p_m^2} \right)^{-1}$; $h_m = \frac{b_m}{p_m}$ – відносний коефіцієнт демпфування.

Розглянемо до- та зарезонансні випадки окремо. Тоді для випадку “жорсткої муфти” ($p_m \gg w_{cmp}$) після нескладних перетворень приходимо до такого простого виразу $j_{12} = j_{cm} (1 - \cos w_{cmp} t)$. Аналіз його свідчить, що при вмиканні двигуна у муфті виникають пускові коливання відносно середнього кута закручування j_{cm} з порівняно повільно згасаючими амплітудами (якщо враховувати процес згасання коливань електромагнітного моменту двигуна) з частотою w_{cmp} . Важливим у разі привода з $p_m \gg w_{cmp}$ є те, що: має місце ніби, “випадок статичного прикладання” моменту двигуна, за якого вільні коливання практично не збуджуються, а перехідний коливальний процес повністю визначається процесом згасання коливань моменту двигуна; максимальні значення амплітуди пускових коливань муфти будуть приблизно дорівнювати величині її подвійної статичної деформації; величина демпфування в муфті помітно не впливає на перебіг коливальних процесів у приводі. Тобто, тривалість пускових коливань привода залежить лише від тривалості перехідних процесів у двигуні.

З урахуванням (3), момент $M_m = c_m j_{12} + b_m \dot{j}_{12}$, який виникає в муфті відразу після пуску двигуна, можна визначити за формулою $M_m \approx L_{пуск} [1 - \cos(w_{cmp} t + a)]$. Отже, максимальне значення моменту буде на рівні $2L_{пуск}$, при цьому його величина коливатиметься з частотою w_{cmp} відносно сталого значення, яке дорівнює пусковому моменту двигуна. Зазвичай, у випадку “ніби статичного прикладання” навантаження та істотної віддаленості p_m від w_{cmp} , коливання моменту в муфті будуть такими самими, як пускові коливання моменту двигуна. Зміни демпфувальної здатності муфти несуттєво впливають на величину виникаючого в ній моменту та зовсім не впливають на тривалість коливань. Водночас зниження власної частоти муфти (наближення до w_{cmp}) призводить до помітного зростання величини пускового моменту в муфті.

Розглянемо випадок “м’якої муфти” ($p_m \ll w_{cmp}$). Загальний розв’язок (3) подамо у вигляді:

$$j_{12} = j_{cm} \left[1 - e^{-b_m t} \sqrt{1 + h_m^2} \cos(p_m t - a) \right] + j_{cm} \frac{p_m^2}{w_{cmp}^2} \cos w_{cmp} t. \quad (4)$$

Зазначимо, що у (4), як і нижче, величина зсуву фаз a не має принципового значення.

Отже, має місце ніби “випадок миттєвого прикладання навантаження”. Тобто, відразу після пуску двигуна в муфті послідовно відбуватимуться два перехідні процеси. Практично цікавим є перший процес. Він повністю визначається першим доданком (4) і являє собою згасаючі супровідні коливання муфти із власною частотою p_m . Чисельний аналіз (4) дозволяє зробити висновок, що у разі малої демпфувальної здатності муфти максимальні амплітуди коливань будуть не більшими за півтори величини її статичної деформації. Збільшення коефіцієнта в’язкого тертя муфти зменшує величини амплітуд та тривалість коливань. Згідно з (5), вони достатньо швидко згасають і в

подальшому відбуваються з частотою w_{cmp} з істотно меншими за j_{cm} амплітудами $A = j_{cm} \frac{p_m^2}{w_{cmp}^2}$;

тривалість останніх незначна, при цьому вона вже не залежить від демпфувальної здатності муфти, а визначається лише тривалістю пускових коливань електромагнітного моменту двигуна.

Аналогічні висновки можна зробити відносно змін моменту, який виникає у муфті під час пуску в разі $p_m \ll w$. З урахуванням (4), його величину в початковий та наступний періоди пуску можна оцінити за формулами:

$$M_m = L_{пуск} \left[1 - e^{-b_m t} \sqrt{(1+h_m^2)(1+4h_m^4)} \cos(p_m t + a_1) \right], \quad M_m = L_{пуск} \left(1 - \frac{2b_m}{w_{cmp}} \sin w_{cmp} t \right). \quad (5)$$

З першого виразу (5) випливає: максимальна величина моменту виникатиме за великого опору ($h_m > 0,8$) та є дещо більшою за два пускові моменти двигуна; при цьому вона відразу достатньо стрімко зменшується. В наступний період пуску, згідно з другим виразом (6), момент у муфті набуває величини, значно меншої за $L_{пуск}$.

У резонансному випадку ($p_m = w_{cmp}$) вирази, за допомогою яких можна оцінити пускові деформації муфти та амплітуди виникаючого в ній моменту, запишемо у вигляді

$$j_{12} = j_{cm} \left(1 - \frac{1}{2h_m} \sin wt \right), \quad M_m = L_{пуск} \left[1 - \frac{1}{2h_m} \sqrt{1+h_m^2} \sin(w_{cmp} t + a_2) \right]. \quad (6)$$

Аналіз виразів (6) свідчить, що за малих коефіцієнтів в'язкого тертя ($h_m < 0,3$) максимальні деформації муфти та величина виникаючого в ній моменту можуть бути порівняно великими – у рази більшими, ніж при статичному прикладанні пускового моменту. Завичай у випадку великого тертя, навіть у разі $p_m \approx w_{cmp}$, їхні амплітудні значення не будуть резонансними.

Зазначимо, що вище для спрощення розглядали граничні випадки. Очевидно, коли частоти p_m та w_{cmp} не так істотно відрізняються між собою та у разі $p_m \approx w_{cmp}$, сформульовані закономірності зберігаються у вигляді деякої тенденції.

Комп'ютерне моделювання пуску вібромашини зводилося до сумісного чисельного інтегрування системи (1) та рівнянь динамічної моделі асинхронного двигуна [12]. Базові параметри механічної системи вибрано такими: $M = 330 \text{ кг}$; $J = 10,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_1 = 0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_2 = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 35 \text{ кг}$; $e = 0,033 \text{ м}$; $c_y = c_x = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$; $c_j = 2,1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$; $b_y = b_x = 1,8 \cdot 10^3 \text{ кг/с}$; $b_j = 180 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; $P_{об} = 1,5 \text{ кВт}$, $n_n = 1415 \text{ об/хв}$.

Результати моделювання добре підтверджують зроблені вище висновки. Так, у випадку “жорсткої муфти” ($\frac{p_m}{w_{cmp}} = 2,5$) коливальний процес у муфті (рис. 2, а) копіює процес згасання

коливань моменту двигуна (рис. 3, крива 1); збільшення демпфувальної здатності муфти незначно зменшує амплітуди її коливань та не впливає на їх тривалість, яка визначається лише тривалістю перехідних процесів у двигуні; максимальна величина деформації муфти приблизно дорівнює $2j_{cm}$. Згідно з рис. 3, а криві пускових моментів двигуна та муфти практично накладаються: максимальне значення моментів – приблизно $2L_{пуск}$. Зміна демпфувальної здатності муфти незначно впливає на амплітуду коливань, тоді як наближення частоти p_m до w_{cmp} призводить до істотного зростання величини виникаючого у ній моменту; при цьому його амплітуди стають більшими за амплітуди моменту двигуна, вплив опору муфти стає суттєвим.

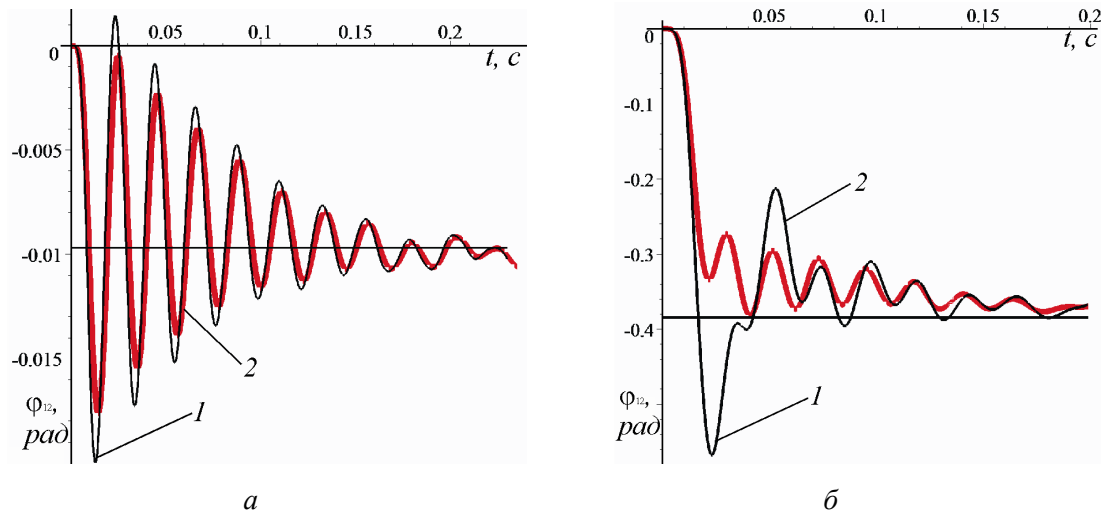


Рис. 2. Часові зміни крутильної деформації муфти під час пуску : а – $\omega_{cmp} \ll p_m = 785 \text{ c}^{-1}$;

б – $\omega_{cmp} \gg p_m = 125 \text{ c}^{-1}$: 1- $h_m = 0,3$; 2- $h_m = 0,9$, (горизонтальна пряма – φ_{cm})

Fig. 2. Time changes of coupling's rotational strain during the start : а – $\omega_{cmp} \ll p_m = 785 \text{ c}^{-1}$;

б – $\omega_{cmp} \gg p_m = 125 \text{ c}^{-1}$: 1- $h_m = 0,3$; 2- $h_m = 0,9$, (horizontal straight line – φ_{cm})

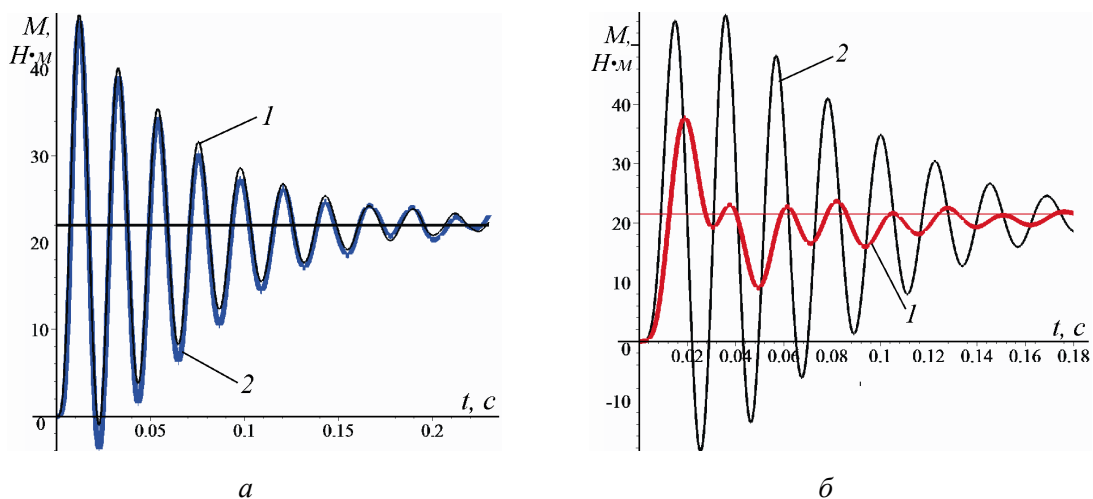


Рис. 3. Часові зміни моментів: а – двигуна (1) та у муфті (2) при $\omega_{cmp} \ll p_m = 785 \text{ c}^{-1}$;

б – у муфті для 1 – $\omega_{cmp} \gg p_m = 125 \text{ c}^{-1}$: 2 – $\omega_{cmp} \approx p_m = 310 \text{ c}^{-1}$ ($h_m = 0,3$, горизонтальна пряма – $L_{пуск}$)

Fig 3. Time change of torques: а – of drive (1) and of coupling (2) when $\omega_{cmp} \ll p_m = 785 \text{ c}^{-1}$;

б – in coupling for 1 – $\omega_{cmp} \gg p_m = 125 \text{ c}^{-1}$: 2 – $\omega_{cmp} \approx p_m = 310 \text{ c}^{-1}$ ($h_m = 0,3$, horizontal straight line – $L_{пуск}$)

У разі “м’якої муфти” ($\frac{W_{cmp}}{P_m} = 2,5$) відразу після пуску двигуна спостерігається стрімко

згасаючий коливальний процес з основною частотою p_m (рис. 2, б). Максимальні пускові амплітуди коливаний досягають величини $1,5j_{cm}$. Із збільшенням коефіцієнта в’язкого тертя муфти вони істотно зменшуються й в момент пуску стають меншими за j_{cm} . Найбільші значення моменту у муфті не перевищують величини $2L_{пуск}$ (рис. 3, б); при цьому вони доволі швидко згасають.

Зазначимо, що у разі $p_m \ll w_{cnp}$ коливання моменту в муфті є помітно меншими за пускові коливання моменту двигуна. Збільшення власної частоти муфти (наближення її до w_{cnp}) призводить до зростання коливань виникаючого в ній моменту; при цьому величина його амплітуд набуває значень, більших за амплітуди моменту двигуна.

У резонансному випадку ($p_m \approx w_{cnp}$) за малих коефіцієнтів в'язкого тертя ($h \leq 0,3$) відразу після пуску спостерігається зростання деформації муфти та величини виникаючого моменту (рис. 3, б, крива 2). Однак, це зростання є доволі нетривалим, а максимальна величина амплітуди моменту в муфті не перевищує $2,5L_{пуск}$. У разі великого тертя резонансне зростання моменту не проявляється.

Рух під час проходження зони резонансних частот вібромашини. Зарезонансний усталений режим руху. Для дослідження цього періоду руху скористаємося методом прямого розділення рухів [1, 2]. Розв'язки системи (1) можна подати у вигляді: $j_i = wt + a_i(t) + y_i(t, wt)$, $q_i = q_i(t, wt)$, де w – деяка, наперед невідома частота, стаціонарного режиму; $a_i(t)$ – повільні, а y_i і q_i – швидкі $2p$ -періодичні функції часу $t = wt$, причому їхні середні значення за період дорівнюють нулю; припускаємо також, що $y_i \ll w$. Припущення щодо повільних змін $a_i(t)$ приймається у тому розумінні, що $\dot{a}_i \ll w$. Зазначимо, що застосування методу гарантовано за порівняно великих w , принаймні, поблизу стаціонарних режимів $a_i = const$ [1], які й розглянемо нижче; дослідження таких режимів (“застрягання” швидкості електродвигуна при пуску – максимально навантажений режим роботи вібромашини, а також зарезонансний робочий режим) є найбільш практично цікавими.

За процедурою методу нескладно перейти від вихідної системи рівнянь (1) до системи рівнянь повільних та швидких рухів роторів двигуна та віброзбудника у формі [1]:

$$I_1 \ddot{a}_1 + b_m \dot{a}_1 + c_m a_1 + k_1 a_1 = L_1(w), \quad I_2 \ddot{a}_2 - b_m \dot{a}_2 - c_m a_2 + k_2 a_2 = -R_2(w) + V(w), \quad (7)$$

$$I_1 \ddot{y}_1 + b_m \dot{y}_1 + c_m y_1 = -mk_1 y_1, \quad I_2 \ddot{y}_2 - b_m \dot{y}_2 - c_m y_2 = m(\Phi(\dot{a}_1, j_2) - V(w) - k_2 y_2), \quad (8)$$

де $a_{12} = a_1 - a_2$, $y_{12} = y_1 - y_2$, $V(w) = \frac{w}{2p} \int_0^{2p/w} \Phi(\dot{a}_1, j_2) dt$ – вібраційний момент [1, 2].

Зазначимо, що: при одержанні системи рівнянь (7) виконано лінеаризацію виразів $L_1 = L_1(j_1)$, $R_2(j_2)$ поблизу стаціонарних значень $j_i = w$, де k_1, k_2 – коефіцієнти демпфування; у рівняннях (8) величину $m > 0$ розглядаємо як малий параметр (беручи до уваги близькість досліджуваних стаціонарних режимів до рівномірного обертання й те, що нерівномірність обертання роторів викликається перш за все коливаннями осей вібровозбудників та дією на них моментів сил ваги дебалансів).

Формулу для вібраційного моменту з урахуванням наявності в приводі пружної муфти одержано у вигляді:

$$V(w) = \frac{1}{2} \sum_{q_i=x,y,j} A_q^2 b_q w + \frac{1}{2w} (A_{yq}^2 + A_{yg}^2) (b_m + k_1) p_m^2, \quad (9)$$

$$\text{де } A_{yq} = \frac{mew^2}{2I_2 \sqrt{(4w^2 - p_m^2)^2 + 16b_m^2 w^2}} \sum_{q=x,y,j} A_q; \quad A_q = \frac{mew^2}{M \sqrt{(w^2 - p_q^2)^2 + 4b_q^2 w^2}};$$

$$A_{yg} = \frac{meg}{I_2 \sqrt{(w^2 - p_m^2)^2 + 4b_m^2 w^2}}; \quad p_q - \text{частоти власних коливань вібромашини}; \quad b_q = \frac{b_q}{2M_q} \quad (\text{якщо}$$

$q = x, y$ то $M_q = M$; якщо $q = j$, то $M_q = J$).

Перший доданок (9) являє собою вібраційний момент для випадку відсутності пружно-демпфувального зв'язку в приводі вібромашини (одержаний в [6]), другий – додаткову складову цього моменту V' , яка виникає у разі його наявності. Отже, отримана формула враховує дисипативні сили як несівного тіла вібромашини, так і при коливаннях привода. Очевидно, що резонансне зростання амплітуди коливань пружно-демпфувальних елементів привода збільшує величину вібраційного моменту. Згідно з (9) залежність вібраційного моменту від частоти обертання вібровозбудника має резонансний характер. Тобто, наявність пружної муфти у приводі вібромашини може призводити у певних режимах руху до підвищення навантаження на електродвигун, що сприяє виникненню ефекту Зоммерфельда під час пуску.

З рис. 4, а видно, що резонансне збільшення величини додаткової складової вібраційного моменту V' , пов'язаної з наявністю муфти, відбувається при “повільному” розбігу двигуна в зоні власних частот вібромашини p_q , при цьому особливо істотно, коли частоти p_q є близькими до половини частоти власних коливань муфти ($p_q \approx p_m / 2$), тобто, у разі “м'якої” пружної муфти. В усталеному режимі руху вібромашини вплив пружної муфти на величину вібраційного моменту практично не проявляється. Зазначимо, що при побудові графіків на рис. 4 та рис. 5 для наочності прийнято, що несівне тіло вібромашини має один ступінь вільності.

Згідно з рис. 4, б при використанні “жорсткої” муфти максимальне зростання величини вібраційного моменту, пов'язаної з наявністю муфти, має місце в усталеному режимі руху для випадку, коли робоча частота вібромашини близька до половини частоти власних коливань муфти.

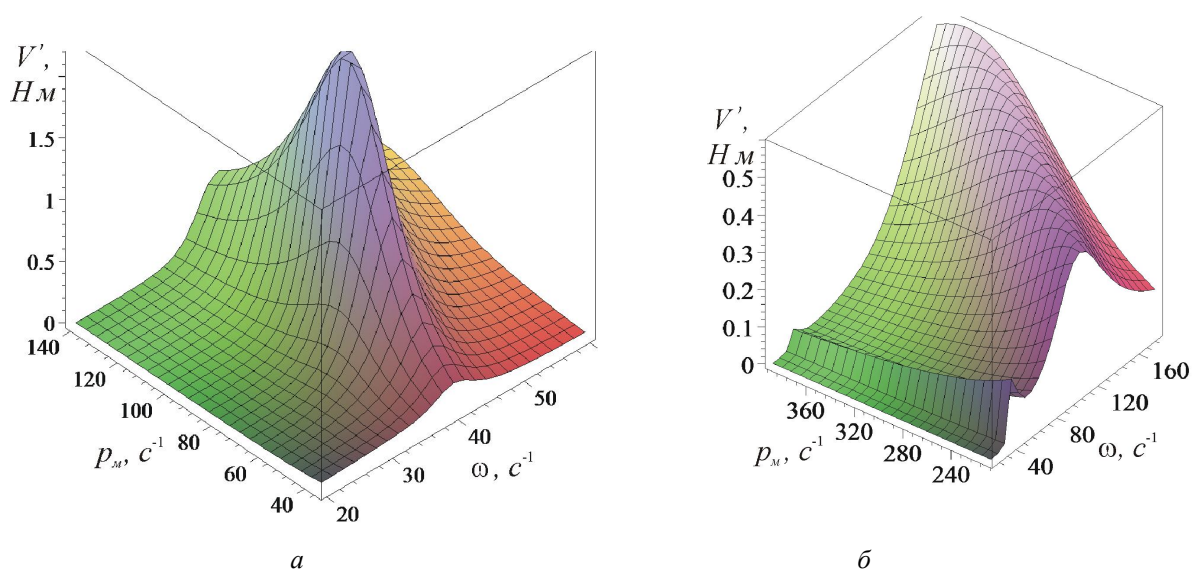


Рис. 4. Залежність величини додаткової складової вібраційного моменту V' , пов'язаної з муфтою, від її власної частоти та частоти збудника, $p_x = 40 \text{ c}^{-1}$, $h_x = 0,1$, $h_m = 0,3$:

а – “м'яка” муфта; б – “жорстка” муфта

Fig. 4. Dependence of value of connected with coupling additional part of vibration moment V' on its own frequency and excitor frequency, $p_x = 40 \text{ c}^{-1}$, $h_x = 0,1$, $h_m = 0,3$:

а – “soft” coupling; б – “hard” coupling

Згідно з рис. 4, б при використанні “жорсткої” муфти максимальне зростання величини вібраційного моменту, пов'язаної з наявністю муфти, має місце в усталеному режимі руху для випадку, коли робоча частота вібромашини близька до половини частоти власних коливань муфти.

Для випадку стаціонарних режимів із системи рівнянь (7) повільних рухів роторів отримуємо:

$$c_m a_{12} = L_1(w), \quad c_m a_{12} = -R_2(w) + V(w). \quad (10)$$

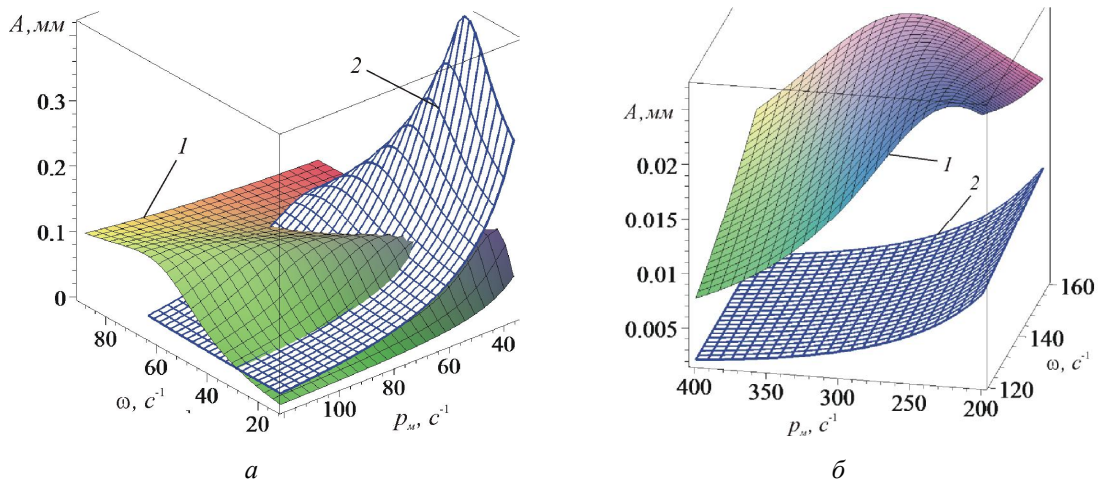


Рис. 5. Залежність величин складових амплітуди коливань муфти $A_{\psi q} - 1$, $A_{\psi g} - 2$ від її власної частоти та частоти збудника, $h_x = 0,1$, $h_m = 0,3$:
а – “м’яка” муфта, випадок $p_x = \Phi$; б – “жорстка” муфта

Fig. 5. Dependence of parts values of amplitude coupling oscillations $A_{\psi q} - 1$, $A_{\psi g} - 2$ on its own frequency and excitor frequency, $h_x = 0,1$, $h_m = 0,3$:
а – “soft” coupling, case $p_x = \Phi$; б – “hard” coupling

З аналізу формули (9) та рівностей (10) випливає: у разі “застрягання” швидкості двигуна в зоні резонансу середні величини деформації муфти та виникаючого моменту набувають більших значень за їх усереднені значення в момент пуску; наявність пружної муфти в приводі вібромашини може призводити до зростання навантаження на валу двигуна як під час його розбігу так і в усталеному режимі руху. Отже, пружність привода збільшує вірогідність прояву ефекту Зоммерфельда. Оскільки, при вибігу електродвигуна вібраційний момент в середньому стає обертальним, то наявність пружної муфти може призводити до певного зниження резонансних амплітуд та тривалості перехідного процесу.

Звичайно, слід очікувати, що більш виражений прояв пружності привода проявляється на рівні швидких рухів системи. Перейдемо до відповідних рівнянь (8). У межах розглядуваного методу їх можна розв’язувати наближено у вигляді ряду за степенями малого параметру $y_i = y_i^{(0)} + \mu y_i^{(1)} + \dots$. Розглядаючи перше наближення ($y_i^{(0)} = 0$), запишемо систему рівнянь швидких рухів роторів у вигляді:

$$I_{12} \ddot{y}_{12}^{(1)} + b_m y_{12}^{(1)} + c_m y_{12}^{(1)} = 0, \quad I_{22} \ddot{y}_{22}^{(1)} - b_m y_{12}^{(1)} - c_m y_{12}^{(1)} = \Phi(q_i, j_2).$$

Віднімаючи друге рівняння від першого, приходимо до рівняння відносних коливань роторів двигуна та вібробудника у стаціонарних (наколостационарних) режимах та отримуємо його розв’язок у формі

$$y_{12} = \frac{F}{2I_2 \sqrt{(p_m^2 - 4w^2)^2 + 16b_m^2 w^2}} \sum_{q_i=x,y,j} A_q \cos 2wt + \frac{me g}{I_2 \sqrt{(w^2 - p_m^2)^2 + 4b_m^2 w^2}} \sin(wt + b_g). \quad (11)$$

Аналіз розв’язку (11) свідчить:

- залежність амплітуди коливань (частоти w , $2w$) привода від частоти обертання вібро-возбудника має істотно резонансний характер;
- резонансне зростання амплітуди коливань, окрім випадку збігу (близкості) частоти власних коливань муфти p_m (кратних їй частот, передусім $p_m/2$) і частоти обертання збудника може проявлятися поблизу власних частот вібромашини p_q . Отже, критичними частотами привода також є частоти власних коливань вібромашини;

– резонансні коливання привода можуть виникати як під час пуску вібромашини, так і в усталеному режимі її роботи.

Очевидно, що резонансні коливання під час пуску можливі лише за “повільного” розбігу та “застрягання” швидкості двигуна. До того ж, мають бути близькими частоти власних коливань привода p_M , або $p_M/2$ до власних частот вібромашини p_q ($p_q = 18-44 \text{ c}^{-1}$). При цьому у разі нижчих величин частот p_q більшими будуть амплітуди коливань привода з основною частотою ($w \approx p_M$), а при вищих – з подвійною ($2w \approx p_M$) (рис. 5, а). Отже, у разі використання “м’яких” пружних муфт ($p_M < 0,75 w_p$) можуть виникати істотні пускові коливання привода. Звичайно, що при використанні таких муфт в усталеному режимі коливання привода будуть незначними.

Підвищені коливання привода вібромашини в зарезонансному робочому режимі роботи вібромашини можуть виникати лише у разі використання “жорстких” пружних муфт ($p_M > 1,5 w_{роб}$) при близькості половини власної частоти муфти до робочої частоти вібромашини $w_{роб}$ (рис. 5, б).

Ефект виникнення резонансних коливань муфти під час проходження зони власних частот вібромашини продемонстровано на рис. 6, який отриманий чисельним інтегруванням системи рівнянь (1). Моделювання виконано за таких параметрів: $M = 330 \text{ кг}$; $J = 10,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_1 = 0,004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_2 = 0,04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $m = 35 \text{ кг}$; $e = 0,033 \text{ м}$; $c_y = c_x = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$; $c_j = 2,1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$; $b_y = b_x = 1,8 \cdot 10^3 \text{ кг/с}$; $b_j = 180 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; $P_{об} = 1,5 \text{ кВт}$, $n_n = 1415 \text{ об/хв}$ (використано так звану А-модель асинхронного двигуна [22]).

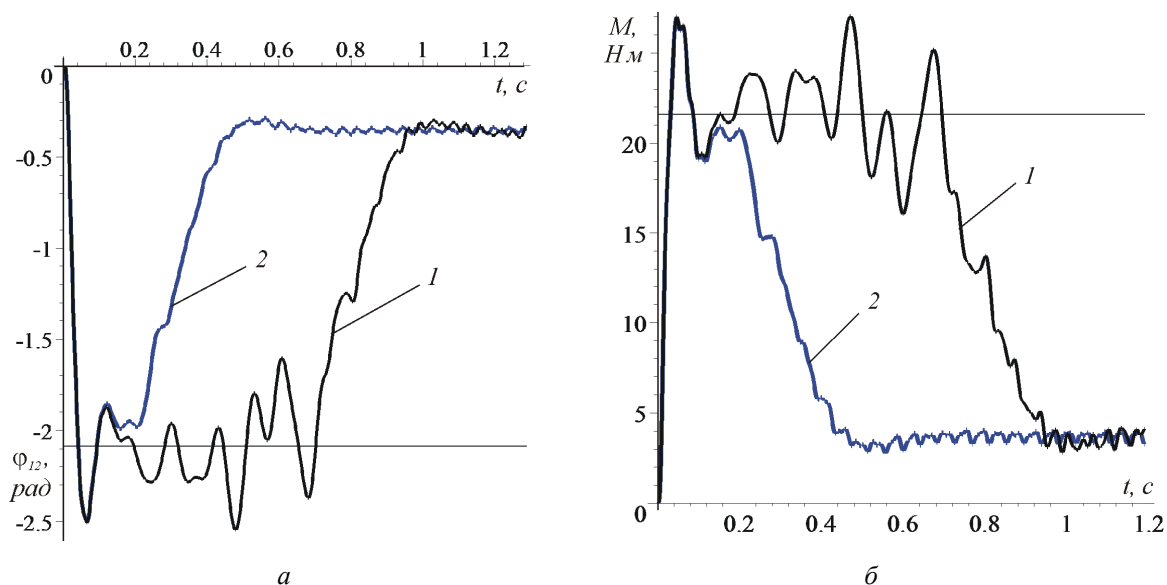


Рис. 6. Зміни в часі крутильних коливань муфти (а); моменту в муфті, у разі(б):
1 – прояву ефекту Зоммерфельда; 2 – відсутності ефекту

Fig.6. Time changes a) couplings rotational oscillations; б) torque in coupling, in case:
1 – Sommerfeld effect; 2 – absence of effect

Наведені графіки свідчать про резонансне зростання амплітуди крутильних коливань “м’якої” муфти j_{12} та виникаючого в ній моменту під час “застрягання” швидкості двигуна в зоні власних частот вібромашини p_q для випадку їх відносної близькості до частот p_M та $p_M/2$ ($p_x = p_y = 40,8 \text{ c}^{-1}$, $p_j = 41,6 \text{ c}^{-1}$ і $p_M = 57,2 \text{ c}^{-1}$, $p_{застр} \approx 52 \text{ c}^{-1}$), тоді, як при пуску без

“застрягання” швидкості (зменшено частоти p_q за інших таких самих параметрів) резонансного збільшення амплітуд коливань привода не спостерігається (рис. 6, крива 2).

Згідно з отриманими даними, під час “застрягання” двигуна в зоні власних частот вібромашини p_q при використанні “жорсткої” муфти резонансного зростання її коливань не відбувається; у робочому режимі при близькості частот $w_{роб}$ та $p_m/2$ коливання привода помітно зростають, проте це зростання не є резонансним (принаймні для розглядуваних параметрів вібромашини).

Результати моделювання динаміки вібраційних машин з нелінійними муфтами (коефіцієнт жорсткості муфти визначався виразом $c_m = c_0 + c_1 j_{12}^2$) свідчать, що основні встановлені закономірності та висновки залишаються такими самими, як для лінійних муфт.

Результати досліджень та їх обговорення. Отже, у приводі вібраційних машин з дебалансними віброзбудниками можуть збуджуватися істотні крутильні коливання, отож перевірка умов виникнення резонансу є важливою прикладною задачею.

Амплітуди коливань дебалансного привода в момент пуску електродвигуна будуть значними, якщо власна частота привода близька до частоти струму у мережі живлення двигуна. При цьому зростання амплітуди є доволі нетривалим і амплітуди коливань не встигають набувати резонансних величин. За віддаленості зазначених частот коливання у цей період руху будуть порівняно невеликими; до того ж вони швидко згасатимуть незалежно від демпфувальної здатності муфти.

Істотні резонансні коливання можуть проявлятися лише під час пуску вібромашини у разі “застрягання” швидкості електродвигуна в зоні власних частот машини, а також у її зарезонансному робочому режимі.

Зазвичай, пружний зв'язок роторів електродвигуна та дебалансного віброзбудника є “м'яким”. У такому разі проходження віброзбудником власних частот вібромашини p_q під час її пуску має відбуватися доволі швидко. Проте відомо, що швидке проходження віброзбудником власних частот p_q не завжди можливе, більше того, може відбуватися “застрягання” його швидкості в цій області. У цьому випадку збуджуватимуться резонансні коливання вібромашини та згідно з (11) можуть виникати резонансні крутильні коливання привода. Вони можливі у разі близькості частоти зависання (однієї з частот p_q) та частот p_m , $p_m/2$. Це доволі ймовірне для привода розглядуваних м'яко віброізованих машин ($p_q \ll w_{роб}$) з “м'якими” муфтами.

Отже, під час пуску вібромашини з дебалансним приводом та “м'якою” муфтою існує небезпека виникнення пускових резонансних коливань привода. Звичайно, область ефективності “м'якої” пружної муфти не розповсюджується на пускові режими. Зазвичай для незначних відносних коливань привода у робочому режимі (зниження втрат енергії) приймають, щоб частота обертання віброзбудника $w_{роб}$ була у кілька разів більшою за частоту p_m . Тобто, необхідно, щоб муфта була достатньо “м'якою” (наскільки дозволяє умова міцності). Проте для вібромашин з дебалансним приводом можливе виникнення під час пуску стаціонарного (наколостационарного) режиму обертання віброзбудника в області частот p_q . Беручи до уваги, що частоти збурення p_q та $w_{роб}$ мають знаходитися поза резонансними зонами частот p_m та $p_m/2$, для вибору жорсткості “м'якої” муфти привода розглядуваних вібромашин, можна рекомендувати умову $2,5 p_q < p_m < 0,75 w_{роб}$. Звичайно, зазначені межі є наближеними й можуть дещо змінюватися залежно від параметрів системи.

З (11) також випливає, що зменшити амплітуду коливань муфти в зоні резонансу можна (окрім як зміною її параметрів) також зміною параметрів вібромашини, зокрема зниженням власних частот машини, збільшенням демпфування коливань її несівного тіла та його маси.

Встановлено, що додаткових проблем під час пуску вібромашини “жорсткий” привод не створює ($p_m \gg w_{роб}$). Проте, для такого привода підвищені коливання можуть виникати в усталеному режимі руху за відносної близькості робочої частоти вібромашини $w_{роб}$ до половини власної частоти муфти $p_m/2$; при цьому можливе деяке збільшення навантаження на двигун та відповідно зниження частоти обертання вібророзбудника. Зазначимо, що нерівність $p_m \gg w_{роб}$ зазвичай задовольняє карданна передача, яку використовують у приводі вібраційних машин. Умова відсутності підвищених коливань “жорсткої” муфти пропонується у вигляді $p_m > 2,5 w_{роб}$.

Отже, ефективним засобом уникнення резонансних коливань привода є забезпечення достатньої віддаленості його критичної частоти $p_m/2$ як від робочої частоти вібромашини, так і від її власних частот.

Зазвичай резонансні коливання привода призводять до зростання динамічних навантажень, нерівномірності обертання роторів і втрат енергії. Тобто, пружні елементи привода (їхні резонанси коливання) можуть збільшувати динамічне навантаження на двигун і тим самим провокувати ефект Зоммерфельда.

Висновки. Для зменшення амплітуд коливань дебалансного привода вібраційної машини в момент пуску електродвигуна рекомендується, щоби власна частота привода була достатньо віддалена від частоти струму у мережі живлення двигуна.

У разі “застрягання” швидкості двигуна при проходженні зони власних частот вібромашини, крім резонансного зростання гальмівного вібраційного моменту і “застрягання” його швидкості, можуть збуджуватися резонансні коливання “м’яких” пружних муфт, які з’єднують ротори двигуна та збудника. Такі коливання є більш небезпечними, ніж ті, що виникають у момент пуску двигуна: за практично тих самими амплітуд, тривалість коливань може бути значно більшою. Для уникнення резонансних коливань “м’якого” привода в зоні власних частот вібромашини p_q потрібно забезпечити їх віддаленість від частот p_m та $p_m/2$.

Для зменшення коливань “жорсткого” привода в робочому режимі роботи вібромашини необхідно забезпечити достатню розбіжність між частотами $w_{роб}$ та $p_m/2$.

1. Блехман И. И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб.: ИД “Руда и Металлы”, 2013. – 640 с.
2. Блехман И. И. Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения). – М.: Физматлит, 2018. – 752 с.
3. Ланець О. С. Високоєфективні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення). – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2008. – 324 с.
4. Ланець О. С. Основи розрахунку та конструювання вібраційних машин (Книга 1. Теорія та практика створення вібраційних машин з гармонійним рухом робочого органу): навч. посібник. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. 2008. – 600 с.
5. Назаренко І. І. Дослідження надійності карданних валів вібромашин будівельної індустрії / І. І. Назаренко, А. Т. Свідерський, М. М. Делембовський // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця. – 2013. – № 3 (71). – С. 72–77.
6. Ярошевич М. П., Ярошевич Т. С. Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом: монографія. – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.
7. Yaroshevich, M. P. Dynamics of vibrating machines starting with unbalanced drive in case of bearing body flat vibrations / M. P. Yaroshevich, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevich // Науковий вісник НГУ. Дніпропетровськ. – 2015. – № 3. – С. 39–45.
8. Кузьо І. В. Синтез низькочастотних резонансних вібраційних машин з аероінерційним збуренням / І. В. Кузьо, О. С. Ланець, В. Гурський // Науковий вісник НГУ. – 2013. – № 2. – С. 37–45.

9. Ланець О. С., Гурський В. М., Ланець О. В., Шпак Я. В. Обґрунтування конструкції та моделювання роботи резонансного двомасового вібростолу з інерційним приводом // *Динаміка, міцність та проектування машин і приладів*: – Львів: Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2014. – № 788. – С. 28–37.
10. Филимоных Г. Б. Исследование процесса возбуждения двухчастотных вибраций шаровым автобалансином грохота Гил 42 [Текст] / Г. Б. Филимоных, В. В. Яцун // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2016. – № 1/7(79). – С. 17–23.
11. Filimonikhin G. Research into excitation of dual frequency vibrational-rotational vibrations of screen duct by ball-type auto-balancer [Text] / G. Filimonikhin, V. Yatsun, K. Dumenko // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2016. – Vol. 3, Issue 7 (81). – P. 47–52.
12. Blekhtman I. I., Indeitsev D. A., Fradkov A. L. (2008). Slow motions in systems with inertial excitation of vibrations. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 1(38), 21–27.
13. Balthazar J. M., Mook D. T., Weber H. I., Brasil R. M. L. R. F., Fenili A., Belato D., Felix J. L. P. (2003). An overview on non-ideal vibrations, 38(6), 613–621.
14. Михлин Ю. В. Резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, содержащей гаситель колебаний / Ю. В. Михлин, А. А. Клименко, Е. Ю. Плаксий // *Вестник Запорожского национального университета “Математическое моделирование и прикладная механика”*. – 2015. – № 2. – С. 135–141.
15. Динамика машин и управление машинами: справочник / В.К. Асташев, В.И. Бабицкий, И.И. Вульфсон и др.; под ред Г.В. Крейнина. – М. Машиностроение, 1998. – 240 с.
16. Коловский М.З.. Динамика машин. Л. Машиностроение. 1989. – 263 с.
17. Управление мехатронными вибрационными установками / под. ред. И. И. Блехмана и А. Л. Фрадкова. – СПб.: Наука, 2001. – 278 с.
18. Томчина О. П. Энергоскоростные алгоритмы синхронизации для многороторных установок с упругими карданными валами / О. П. Томчина, В. В. Резниченко, Д. В. Горлатов // *Информатика и системы управления*. – 2014. – № 4 (42). – С. 101–112.
19. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: монография. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2008. – 456 с.
20. Бабичев А. П., Бабичев И. А. Основы вибрационной технологии. – Ростов н/Д: Изд. центр ДГТУ, 2008. – 694 с.
21. Блехман И. И. К динамике привода вибрационных машин с инерционным возбуждением / И. И. Блехман, Л. И. Блехман, Н. П. Ярошевич // *Обогащение руд*. – 2017. – 3. – С. 49–53.
22. Чабан В. Математична модель вузла живлення асинхронних машин. – Луцьк: ЛНТУ, 2013. – 116 с.

O. M. Yaroshevych, I. P. Zabrodets, V. L. Martyniuk, M. P. Yaroshevych
Lutsk National Technical University

OSCILLATIONS OF VIBRATIONAL MACHINE DRIVE WITH UNBALANCED EXCITERS

Ó Yaroshevych O. M., Zabrodets I. P., Martyniuk V. L., Yaroshevych M. P., 2018

Aim. The influence of junction elasticity of unbalance vibration exciter with asynchronous electric drive rotor on oscillating processes in drive of the vibration machine for improving its dynamic characteristics is investigated. **Method.** Methods of applied theory of oscillations, the approach of vibration mechanics and method of direct division of movements were used for analytical investigations. Simulation of the vibration machine start process was based on the numerical integration of differential equations of motion of a mechanical vibrational system and a dynamical model of an asynchronous electric motor using the Maple software product. **Results.** In scientific work it was shown that the presence of an elastic junction brings essential features in the vibration machine dynamics and that should be taken into account in their constructional design. Formulas that allow estimating the amplitude of starting strains and the magnitude of the moment that occurs in the drive are obtained. It is shown that amplitude of oscillation of the drive at the moment of start of the vibration machine mainly depends on the distance of its own frequency from the frequency of the current in the power supply of the electric drive. It was obtained the equation of torsional oscillations of the drive near stationary rotational modes of unbalanced drive (which, incl., takes into account the case of "jamming" of the speed of the electric drive in the zone of resonant frequencies of the vibration machine). Existing interconnection of oscillations of the carrier system of the vibrating machine and the drive is revealed. It is stated that during the start of vibration machines when the effect of Sommerfeld occurs, except for the

resonant growth of the brake vibration moment and "jamming" of the speed of the electric drive, resonant oscillations of elastic damping elements (connecting the rotors of the engine and the exciter which increase the dynamic load and energy losses in the system) excite. **Scientific novelty.** The theoretical positions of the start-up dynamics of vibration machine with inertia drive, taking into account the elasticity of the junction of the rotors of the electric drive of limited power and unbalanced vibration exciter were further developed. It is stated that in case of presence of elastic element in drive of vibration machine, to its critical frequencies, the frequencies of the vibration machine's own oscillations and current frequency in the power supply of the electric drive are added. **Practical significance.** The results of the scientific work allow choosing the parameters of vibrating machines with an unbalanced drive more reasonably which will reduce the amplitudes of its oscillations and dynamic loads.

Key words: vibration machine, unbalanced drive, drive oscillation, elastic coupling, Sommerfeld effect.

1. I. I. Blekhman. *Teoriya vibratsionnykh protsessov i ustroystv. Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya tekhnika* [The theory of vibrational processes and devices. Vibration mechanics and vibrating technology]. – Saint Petersburg, Russia "Ruda i Metally", 2013. – 640 p., [in Russian].
2. I. I. Blekhman *Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya reologiya (teoriya i prilozheniya)* [Vibration mechanics and vibrational rheology (theory and applications)]. – Moscow, Russia: Fizmatlit, 2018. – 752 p. [in Russian].
3. O. S. Lanets *Vysokoeffektivni vibratsiyni mashyny z elektromahnitnym pryvodom (Teoretychni osnovy ta praktyka stvorenyya)* [High-efficiency vibration machines with an electromagnet drive (Theoretical foundations and practice)]. Publishing house NU "Lvivska politekhnika" Lviv. 2008. – 324 p., [in Ukrainian].
4. O. S. Lanets *Osnovy rozrakhunku ta konstruyuvannya obliku mashyn (Knyha 1. Teoriya ta praktyka stvorenyya vibratsiynnykh mashyn z harmoniynym rukhom robochoho orhanu)* [Basics of calculation and constructing of machine accounting (Book 1. The theory and practice of creating of vibration machines with harmonious motion of the working body)]: Tutorial. – Lviv: Publishing House of the National University "Lvivska politekhnika". 2008. – 600 p, [in Ukrainian].
5. I. I. Nazarenko *Doslidzhennya nadiynosti kardannykh valiv vibromashyn budivelnoyi industriyi* [Reliability investigation of cardan shafts of vibratory machines in the building industry] / I. I. Nazarenko, A. T. Sviderskyi, M. M. Delembovskyi // *The vibrations in engineering and technology*. – Vinnytsia. – 2013. – No. 3 (71). – 72–77pp., [in Ukrainian].
6. M. P. Yaroshevich, T. S. Yaroshevich. *Dynamika rozbihu vibratsiynnykh mashyn z debalansnym pryvodom* [Start dynamics of vibration machines with unbalanced drive]: Monography / Luts'k: LNTU, 2010. – 220 p., [in Ukrainian].
7. N. P. Yaroshevich. *Dynamika rozbihu vibratsiynnykh mashyn z debalansnym pryvodom u vypadku ploskykh koluvan robochoho tila* [Dynamics of vibrating machines starting with unbalanced drive in case of bearing body flat vibrations] / M. P. Yaroshevich, I. P. Zabrodets, T. S. Yaroshevich // *Scientific periodical of NGU. Dnipropetrovsk*. – 2015. – No. 3. – 39–45 pp., [in Ukrainian].
8. I. V. Kuzio. *Syntezy nizkychastotnykh rezonansnykh vibratsiynnykh mashyn z aeroinertsiiynym zburennyam* [Synthesis of low-frequency resonant vibration machines with air inertia perturbation] / I.V. Kuzio, O.S. Lanets, V. Hurskii // *Scientific periodical of NGU*. – 2013. – No.2. – 37–45 pp. [in Ukrainian].
9. O. S. Lanets, V. M. Hurskii, O. V. Lanets, Y. V. Shpak *Obgruntuvannya konstruktsiyi ta modelyuvannya roboty rezonansnoho dvomasovoho vibrostola z inertsiiynym pryvodom* [Justification of the design and simulation of the operation of a resonant two-mass vibration table with an inertia drive] // *Dynamics, durability and design of machines and devices: Periodical of NU "Lvivska politekhnika"*. – Львів, 2014. – No. 788. – 28–37 pp. [in Ukrainian].
10. G. B. Filimonikhin *Issledovaniye protsessa vzbuzhdeniya dvukhchastotnykh vibratsiy sharovym avtobalansirov grokhota* [Investigation of the process of excitation of two-frequency vibrations by ball auto-balancer Gil 42] [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Yatsun // *East European Advanced Technology Journal*. – 2016. – No. 1/7(79). – 17–23 pp. [in Ukrainian].
11. G. B. Filimonikhin *Research into excitation of dual frequency vibrational-rotational vibrations of screen duct by ball-type auto-balancer* [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Yatsun, K. Dumenko // *Eastern-European Advanced Technology Journal*. – 2016. – Vol. 3, Issue 7 (81). – 47–52 pp.
12. Blekhman, I. I., Indeitsev, D.A., Fradkov, A.L. *Medlennyye dvizheniya v sistemakh s inertsionnym vzbuzhdeniyem kolebaniy* [Slow motions in systems with inertial excitation of vibrations]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 1(38), 21–27.

13. J. M. Balthazar, D. T. Mook, H. I. Weber, Brasil, R. M. L. R. F., A.N. Fenili, D.N. Belato, An overview on non-ideal vibrations. – 2003. – 38(6), 613–621 pp.
14. Y. V. Mikhlin. Rezonansnyye kolebaniya v sisteme s ogranichenym vozбуzhdeniem [Resonant oscillations in a system with limited excitation] / Y. V. Mikhlin, A. A. Klimenko, E. U. Plaksii // Periodical of Zaporizhzhya National University "Mathematical modeling and applied mechanics". – 2015. – No. 2. – 135–141 pp. [in Ukrainian].
15. Dinamika mashin i upravleniye mashinami [Dynamics of machines and machine control]: handbook / V. K. Atashev, V. I. Babitskyi, I. I. and other; edited by G. V. Kreynin. – Moscow, 1998. – 240 c.
16. M.Z. Kozlovskiy. Dynamika machyn [Machine dynamics]. Leningrad: Machinery building, 1989. – 263 p. [in Russian].
17. I.I. Blikhman, A. L. Fradkov Upravleniye mekhatronnymi vibratsionnymi ustanovkami [Control of mechatronic vibration systems] / Saint Petersburg: Nauka, 2001, 278 p. [in Russian].
18. O. P. Tomchyna Energoskorostnyye algoritmy sinkhronizatsii dlya mnogorotornykh ustanovok s uprugimi kardannymi valami [Power-speed synchronization algorithms for multi-rotor installations with elastic cardan shafts] / O. P. Tomchyna, V. V. Reznichenko, D. V. Gorlatov // Computer science and control systems. – 2014. – No. 4 (42). – 101–112 pp. [in Russian].
19. Шамохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин [Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission machines]: Monography / Harkiv: NTU "HPI", 2008. – 456. [in Ukrainian].
20. A. P. Babychev, I. A. Babychev Osnovy vibratsionnoy tekhnologii [Basics of Vibration Technology]. – Rostov na Donu: DHTU, 2008. – 694 p. [in Russian].
21. I.I. Blekhman K dinamike privoda vibratsionnykh mashin s inertsionnym vozбуzhdeniem [To the drive dynamics of vibration machines with inertial excitation] / I. I. Blekhman, L. I. Blekhman, N. P. Yaroshevich // Obogashcheniye rud. 2017. 3. 49–53 pp. [in Russian].
22. V. Chaban Matematychna model vuzla zhyvlennya asynkhronnykh mashyn [Mathematical model of the institute live asynchronous machines]. Lutsk: LNTU, 2013. –116 p. [in Ukrainian].