

## МЕТОД НАБЛИЖЕНОЇ ПОБУДОВИ ГРАДІЄНТА ФУНКЦІЇ ТРИВИМІРНОГО РОЗПОДІЛУ МАС НАДР ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

<https://doi.org/10.23939/jgd2018.02.027>

**Мета.** Дослідити методику побудови тривимірної функції розподілу мас надр усередині Землі та її похідних, узгоджену з параметрами гравітаційного поля планети до четвертого порядку включно. За побудованою функцією розподілу мас здійснити інтерпретацію особливостей внутрішньої будови еліпсоїдальної планети. **Методика.** На основі створеного початкового наближення функції, яке включає референсну модель густини, вибудовуються подальші уточнення. Використовуючи стоксові постійні до другого порядку включно, подаємо наступне наближення, яке надалі приймаємо як нульове. При цьому використання стоксових постійних до четвертого порядку включно приводить до розв’язку систем рівнянь. Встановлено, що долучення однієї тотожності приводить до однозначності розв’язку. Винятком є одна система зі стоксовими постійними  $C_{40}, C_{42}, C_{44}$ . Зауважимо, що процес обчислень є контрольованим, оскільки степеневі моменти похідних густини зводяться до величин, що враховують значення густини на поверхні еліпсоїда. **Результати.** На відміну від моделі другого порядку, яка описує глобальні неоднорідності, отримана функція розподілу дає детальнішу картину розміщення аномалій густини (відхилення тривимірної функції від усередненої по сфері – “ізоденс”). Аналіз карт на різних глибинах 2891 км (ядро-мантія), 5150 км (внутрішнє-зовнішнє ядро) дає змогу зробити попередні висновки про глобальний перерозподіл мас за рахунок обертової складової сили тяжіння по всьому радіусу, а також за рахунок горизонтальних компонент градієнта густини. Цей факт є особливо помітним для екваторіальних областей. Навпаки, в полярних частинах Землі спостерігається мінімум такого відхилення, що також має своє пояснення: величина сили обертання зменшується при зміщенні до полюса. Побудована за допомогою запропонованого методу функція розподілу мас детальніше описує розподіл мас. Особливий інтерес становлять картосхеми компонент градієнта функції аномалій густини, а саме компонента, що співпадає з віссю  $Oz$  – для верхньої частини оболонки вона від’ємна, для нижньої – додатна. Це означає, що вектор градієнта направлений у сторону центра мас. Характер значень для двох інших компонент різний і за знаком, і за величиною та залежить від точки розміщення. **Наукова новизна.** На відміну від традиційного підходу зміни для похідних густини однієї змінної (глибини), отриманих із рівняння Адамса-Вільямса, в цій роботі зроблено спробу одержати похідні за декартовими координатами. Використання в описаному методі параметрів гравітаційного поля до четвертого порядку включно збільшує порядок апроксимації функції розподілу мас трьох змінних з двох до шести, а її похідних – до п’яти. При цьому, на відміну від традиційної методики, визначальним тут є побудова похідних, з яких відтворюється функція розподілу мас та використання геофізичної інформації, що акумульована в референсній моделі PREM. **Практична значущість.** Отримана функція розподілу мас Землі може бути використана як наступне наближення при використанні стоксових постійних вищих порядків у поданому алгоритмі. Її застосування дає можливість інтерпретувати глобальні аномалії гравітаційного поля та вивчати глибинні геодинамічні процеси всередині Землі.

**Ключові слова:** потенціал, гармонічна функція, модель розподілу мас, стоксові постійні, градієнт густини.

### Вступ

Будь-які кроки в напрямку вивчення тривимірної структури внутрішньої будови Землі та небесних тіл роблять важливий внесок у наше уявлення про них. Адже саме переміщення мас усередині планети значною мірою дає ключ до

розуміння динаміки руху тектонічних плит і, як наслідок цього факту, появу глобальних природних катаклізмів. Неоднорідності мас, розміщених в областях, що перебувають у зонах близьких до земного ядра, певною мірою прояснює формування магнітного поля Землі.

На відміну від створення одновимірних функцій розподілу мас, тривимірний випадок практично почали розглядати лише в останні десятиліття. Наприклад, у відомій монографії [Буллен, 1978] розглянутий лише невеликий параграф, присвячений цій проблематиці. Сьогодні розроблений метод сейсмічної томографії, який ґрунтується на даних спостережень сейсмічних хвиль та інформації про власні коливання Землі [Андерсон, 1984]. На його основі побудовані відхилення сейсмічних хвиль від радіального розподілу низці областей Землі [Liu, 2016; Мартышко, 2017], що дає можливість за відомими залежностями знайти відхилення від одновимірного розподілу неоднорідностей розподілу мас [Андерсон, 1984]. Додатковим засобом у такому напрямку може бути інформація про зовнішнє гравітаційне поле [Машимов, 1991], анізотропність якого великою мірою є наслідком відхилення від однорідності. Тому розробка методів із використанням параметрів гравітаційного поля є важливою ланкою у дослідженні внутрішньої структури [Церклевич, 2012]. При цьому зауважимо, що практично всі методи побудови моделей густини використовують тільки стоксові постійні нульового та другого порядків (маса та полярний момент інерції) [Буллен, 1978]. Створення моделей із використанням стоксових постійних вище другого порядку можливе тільки наближено, з огляду на неоднозначність визначення потенціалу (задача тіл нульового потенціалу) з використанням ітераційних методів. При цьому за початкове наближення береться, як правило, референсна модель густини, узгоджена зі стоксовими постійними до другого порядку включно [Мещеряков, 1986], а подальші уточнення виконуються за умови мінімального відхилення від прийнятої моделі з врахуванням коефіцієнтів розкладу потенціалу до визначеного ступеня [Мещеряков, 1991]. У запропонованому дослідженні наведено спробу отримати наближення за дещо інших умов, що приводить до методики побудови функцій похідних від густини (градієнта), а далі – дає змогу встановити вигляд вже її самої. Зведення степеневих моментів густини до контрольованих значень (величин, визначених на поверхні еліпсоїда) дає можливість аналізувати та вести контроль за обчисленнями. Побудовані за допомогою запропонованого методу градієнт та функція розподілу мас, з урахуванням параметрів гравітаційного поля третього та, частково, четвертого порядку, детальніше описують розподіл мас. При цьому, градієнт аномалій густини в точках еліпсоїдальних оболонок на розглянутих радіус-векторах (глибинах) напрямлений до центра мас планети  $\left( \frac{\partial d}{\partial x_3} < 0 \right)$ . Отже, це дозволяє прогнозувати перерозподіл мас усередині планети. Адже використання однакових даних в описаному

методі збільшує порядок апроксимації з двох до чотирьох за рахунок можливості відновлення розподілу мас надр планети за її похідними. Тому, на відміну від моделі другого порядку, яка описує глобальні неоднорідності, отримана функція розподілу дає детальнішу картину розміщення аномалій густини (відхилення тривимірної функції від усередненої по сфері – “ізоденс”). Аналіз карт на різних глибинах (2891 км ядро-мантія, 5150 км, внутрішнє-зовнішнє ядро) дає змогу зробити попередні висновки про глобальний перерозподіл мас за рахунок обертової складової сили тяжіння по всьому радіусу: її зменшення вздовж осі обертання та збільшення, віддаляючись від неї. Це особливо проявляється для екваторіальних областей. Навпаки, в полярних частинах Землі спостерігається мінімум такого відхилення, що також має своє пояснення (величина сили обертання зменшується при відході від екватора).

Дослідження структури внутрішньої будови Землі та інших планет не втрачає актуальності на даний час [Мориц, 1994]. Дані про гравітаційне поле Землі є потужним джерелом при її вивченні, зокрема і внутрішньої структури. Це, своєю чергою, вимагає створення методів для їх використання. Відомо [Dziewonski, 1981], що при побудові сферично-симетричних розподілів мас Землі, використовуються маса та стоксова постійна другого порядку (полярний момент інерції). Інші коефіцієнти розкладу потенціалу за кульовими функціями описані в роботах [Martinenc, 1986; Щербаков, 1978; Мещеряков, 1975, 1981]. Зокрема, в статті [Moritz, 1973], запропоновано зображати тривимірний розподіл гармонічною функцією, узгодженою з коефіцієнтами розкладу до визначеного порядку. У роботах [Мещеряков, 1975, 1981] запропоновано наближений метод побудови тривимірних моделей густини Землі, який враховує особливості внутрішньої структури та відповідає стоксовим постійним заданого порядку. Степінь достовірності знайдених модельних розподілів не може бути оцінений. У зв'язку з цим виникає потреба в розробці методики, що дає можливість аналізувати процес обчислень та об'єктивно оцінювати достовірність функцій густини. Спроба такої побудови була зроблена в роботах [Фис, 2008; Черняга, 2012], де задача зводиться до контрольованих величин (поверхневих інтегралів). Отримані таким чином модельні розподіли мас та відносні значення похідних тривимірних функцій уточнюють їх поведінку.

### Мета

Побудувати та дослідити методику створення тривимірної функції розподілу мас надр усередині Землі та її похідних, узгоджену з параметрами гравітаційного поля планети до четвертого порядку включно. За побудованою таким способом функцією розподілу мас здійснити

інтерпретацію особливостей внутрішньої будови еліпсоїдальної планети.

### Методика

У статті [Fys, 2016] наведено загальні аспекти побудови тривимірних розподілів мас усередині кульових планет. Подальше узагальнення – це перехід до еліпсоїдальних фігур [Moritz, 1973], який не суттєво ускладнює алгоритм визначення функції розподілу густини мас. Тому розглядатимемо саме такий випадок.

Нагадаємо коротко схему алгоритму такої побудови. За стоксовими постійними  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$ , ( $n, k \leq 2$ ) динамічним стисненням  $H$  та однією з найбільш репрезентативних моделей густини  $d^0(r)$  (наприклад, моделі PREM [Dziewonski, 1981]) визначаємо тривимірну функцію розподілу мас усередині планетарного еліпсоїда  $t \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \right\}$ :

$$d_2(x_1, x_2, x_3) = d^0(r) + \sum_{m+n+k=0}^2 b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3).$$

Степеневі моменти та коефіцієнти розкладу визначаються за формулами, взятими з монографії [Мещеряков, 1991].

На відміну від загальноприйнятої методики, будуємо альтернативну модель густини  $d_4^a$  та її похідних на основі алгоритму (описаний у [Fys, 2016]) і цих же ж даних (стоксових постійних до другого порядку включно, динамічного стиснення та моделі PREM):

$$\begin{aligned} d_4^a(x_1, x_2, x_3) = & d^0(r) + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^1 \int_0^{x_1} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \\ & + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^2 \int_0^{x_2} W_{mnk}(0, x_2, x_3) dx_2 + \sum_{m+n+k=0}^3 a_{mnk}^3 \int_0^{x_3} W_{mnk}(0, 0, x_3) dx_3, \\ \frac{\partial d}{\partial x_i} = & \frac{1}{a_i} \sum_{m+n+k=0}^N d_{mnk}^i W_{mnk}(x_1, x_2, x_3), \quad i=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Порівняння числових результатів (різниця значень розподілу густини), поданих рис. 2–4 [Fys, 2016], підтверджують доцільність продовження таких досліджень. Тому приступимо до побудови такого наближення, що узгоджується зі стоксовими постійними вже третього та, частково, четвертого порядків. Насамперед зауважимо, ця методика потребує знання моментів густини третього й четвертого порядків. Вони, на відміну від попереднього, не визначаються даними спостережень, у зв'язку з чим беремо їх наближені значення з побудованої моделі  $d_4^a$  [Fys, 2016]:

Поверхневі степеневі моменти п'ятого та шостого порядку визначаємо з системи рівнянь, отриманими в роботі [Fys, 2016], яку в матричному вигляді можна представити так

$$C = A_i s_i, \quad (1)$$

де  $C$  – вектор-стовпець із коефіцієнтами

$$C_{nk} = c_{nk} - C_{nk}^*, S_{nk} = s_{nk} - S_{nk}^*,$$

$C_{nk}, S_{nk}$  – дані спостережень та

$$C_{nk}^* = \frac{1}{Ma_e^n} \int \frac{\partial d_4^a}{\partial x_i} u_{nk}^i dt, \quad S_{nk}^* = \frac{1}{Ma_e^n} \int \frac{\partial d_4^a}{\partial x_i} v_{nk}^i dt \cdot A$$

матриці  $A_i$  та величини  $s_i$  визначаються для кожної групи з урахуванням тотожностей:

$$s_{p+2qs} + s_{pqs+2} + s_{pq+2s} = s_{pqs},$$

Елементи співвідношення (1) для всіх блоків рівнянь запишуться

$$\begin{aligned} C_{30} &= \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( x_3^3 - \frac{3}{2} x_3 (x_1^2 + x_2^2) \right) dt, \\ C_{32} &= \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( \frac{1}{4} x_3 (x_1^2 - x_2^2) \right) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_1 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 6 & -18 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -12 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -36 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 24 & 48 & 48 & 24 & 48 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} (C_{30} - C_{30}^*) \\ (C_{30} - C_{30}^*) \\ (C_{30} - C_{30}^*) \\ (C_{32} - C_{32}^*) \\ (C_{32} - C_{32}^*) \\ (C_{32} - C_{32}^*) \\ (C_{32} - C_{32}^*) \\ s_{001} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} s_{005} \\ s_{203} \\ s_{023} \\ s_{401} \\ s_{221} \\ s_{141} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$s_{005} + 2s_{203} + 2s_{023} + s_{401} + 2s_{221} + s_{041} = s_{001},$$

$$C_{31} = \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( x_3^2 x_1 - \frac{1}{4} x_1 (x_1^2 + x_2^2) \right) dt,$$

$$C_{33} = \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( x_1 \left( \frac{1}{3} x_1^2 - x_2^2 \right) \right) dt,$$

$$A_2 = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 16 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 16 & -48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -16 \\ 48 & 96 & 96 & 48 & 96 & 48 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} (C_{31} - C_{31}^*) \\ (C_{31} - C_{31}^*) \\ (C_{31} - C_{31}^*) \\ (C_{33} - C_{33}^*) \\ (C_{33} - C_{33}^*) \\ (C_{33} - C_{33}^*) \\ s_{010} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} s_{104} \\ s_{302} \\ s_{122} \\ s_{500} \\ s_{320} \\ s_{140} \end{pmatrix},$$

Також,

$$s_{500} + 2s_{320} + 2s_{302} + s_{140} + 2s_{122} + s_{104} = s_{100},$$

$$S_{31} = \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( x_3^2 x_2 - \frac{1}{4} x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right) dt,$$

$$S_{33} = \frac{1}{Ma_e^3} \int d \left( x_2 \left( x_1^2 - \frac{1}{3} x_2^2 \right) \right) dt,$$

$$A_2 = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 16 & -12 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 48 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -16 & 0 \\ 48 & 96 & 96 & 48 & 96 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & -4 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} (S_{31} - S_{31}^*) \\ (S_{31} - S_{31}^*) \\ (S_{31} - S_{31}^*) \\ (S_{33} - S_{33}^*) \\ (S_{33} - S_{33}^*) \\ (S_{33} - S_{33}^*) \\ (S_{33} - S_{33}^*) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} s_{014} \\ s_{212} \\ s_{032} \\ s_{410} \\ s_{230} \\ s_{050} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } S_{32} = \frac{1}{2Ma_e^3} \int d x_1 x_2 x_3 dt.$$

Безпосереднє використання тотожності (2) з [Fys, 2016] в останній формулі дає

$$s_{311} = 2S_{32} - \frac{2}{7} a_{011}^1, s_{131} = 2S_{32} - \frac{2}{7} a_{101}^2, s_{113} = 2S_{32} - \frac{2}{7} a_{110}^3.$$

Продовжуючи розгортати формули для стоксових постійних четвертого порядку, отримаємо:

$$C_{40} = \frac{1}{Ma_e^4} \int d \left( x_3^4 - 3x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{8} (x_1^2 + x_2^2)^2 \right) dt,$$

$$C_{42} = \frac{1}{Ma_e^4} \int d \left( \frac{3}{2} x_3^2 (x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{4} (x_2^4 - x_1^4) \right) dt,$$

$$C_{44} = \frac{1}{32Ma_e^4} \int d (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2) dt,$$

де

$$A_5 = \frac{1}{160} \begin{pmatrix} 32 & -160 & -160 & 60 & 120 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 & -160 & -480 & 0 & 12 & 40 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 160 & 0 & -480 & -160 & 0 & 60 & 40 & 12 \\ 0 & 80 & -80 & -40 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & -240 & 0 & -8 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 240 & -80 & 0 & -40 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -30 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 160 & 480 & 480 & 480 & 960 & 480 & 160 & 480 & 480 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$

та

$$s_5^1 = \begin{pmatrix} s_{006} \\ s_{204} \\ s_{024} \\ s_{402} \\ s_{222} \\ s_{042} \\ s_{600} \\ s_{420} \\ s_{240} \\ s_{060} \end{pmatrix}, \quad s_5^2 = \begin{pmatrix} C_{40} - C_{40}^* \\ C_{40} - C_{40}^* \\ C_{40} - C_{40}^* \\ C_{42} - C_{42}^* \\ C_{42} - C_{42}^* \\ C_{42} - C_{42}^* \\ C_{44} - C_{44}^* \\ C_{44} - C_{44}^* \\ C_{44} - C_{44}^* \\ s_{000} \end{pmatrix}.$$

Так само,

$$s_{006} + 3(s_{204} + s_{024} + s_{402} + s_{042} + s_{420} + s_{240}) + 6s_{222} + s_{600} + s_{060} = s_{000}.$$

$$C_{41} = \frac{1}{Ma_e^4} \int d \left( x_3^3 x_1 - \frac{3}{4} x_3 x_1 (x_1^2 + x_2^2) \right) dt,$$

$$C_{43} = \frac{1}{6Ma_e^4} \int d (x_1 x_3 (x_1^2 - 3x_2^2)) dt,$$

де

$$A_6 = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -36 & -12 \\ 0 & 4 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -12 & 0 \\ 48 & 96 & 96 & 48 & 96 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix},$$

$$s_6^1 = \begin{pmatrix} s_{105} \\ s_{303} \\ s_{123} \\ s_{501} \\ s_{321} \\ s_{141} \end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix} C_{41} - C_{41}^* \\ C_{41} - C_{41}^* \\ C_{41} - C_{41}^* \\ C_{43} - C_{43}^* \\ C_{43} - C_{43}^* \\ C_{43} - C_{43}^* \\ s_{101} \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$2s_{303} + 2s_{123} + s_{105} + s_{501} + 2s_{321} + s_{141} = s_{101}$$

$$S_{41} = \frac{1}{Ma_e^4} \int d \left( x_3^3 x_2 - \frac{3}{4} x_3 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right) dt,$$

$$S_{43} = \frac{1}{6Ma_e^4} \int d (x_2 x_3 (3x_1^2 - x_2^2)) dt,$$

$$A_7 = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & -12 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & -18 & -9 \\ 0 & 24 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 48 & 96 & 96 & 48 & 96 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -2 \end{pmatrix},$$

$$s_7^1 = \begin{pmatrix} s_{015} \\ s_{213} \\ s_{033} \\ s_{411} \\ s_{231} \\ s_{051} \end{pmatrix}, \quad C_7 = \begin{pmatrix} S_{41} - S_{41}^* \\ S_{41} - S_{41}^* \\ S_{41} - S_{41}^* \\ S_{43} - S_{43}^* \\ S_{43} - S_{43}^* \\ S_{43} - S_{43}^* \\ s_{011} \end{pmatrix}.$$

Крім цього,

$$2s_{213} + 2s_{033} + s_{015} + s_{411} + 2s_{231} + s_{051} = s_{011}$$

$$S_{42} = \frac{1}{Ma_e^4} \int d \left( 3x_3^2 x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_2^2 + x_1^2) \right) dt,$$

$$S_{44} = \frac{1}{8Ma_e^4} \int d x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) dt.$$

$$A_8 = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 32 & -16 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 32 & 64 & 64 & 32 & 64 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$s_8^1 = \begin{pmatrix} s_{114} \\ s_{312} \\ s_{132} \\ s_{510} \\ s_{330} \\ s_{150} \end{pmatrix}, \quad C_8 = \begin{pmatrix} S_{42} - S_{42}^* \\ S_{42} - S_{42}^* \\ S_{42} - S_{42}^* \\ S_{44} - S_{44}^* \\ S_{44} - S_{44}^* \\ S_{44} - S_{44}^* \\ s_{110} \end{pmatrix}.$$

А також

$$2s_{312} + 2s_{132} + s_{114} + s_{510} + 2s_{330} + s_{150} = s_{110}.$$

Обчислення, проведені згідно з цією методикою, показують, що системи рівнянь, пронумеровані відповідно номером  $N$  мають єдиний розв'язок для  $N = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ . Якщо ж  $N = 5$ , то система є неоднозначна, і для однозначності розв'язку необхідно долучати додаткові умови. Тому цю частину вкладу не враховують у подальших дослідженнях та побудові наступного наближення густини  $d_m$  ( $m = 5, 6$ ) та її аномалій  $\Delta d_m = d_m - d_m^s$ , де  $d_m^s$  – усереднене по «сфері» значення густини. Результати числових експериментів відображені відповідними рисунками в двох варіантах: у вигляді картосхем та через об'ємні зображення. У дослідженні наведено найбільш інформаційно насичені рисунки.

### Обґрунтування та інтерпретація отриманих результатів

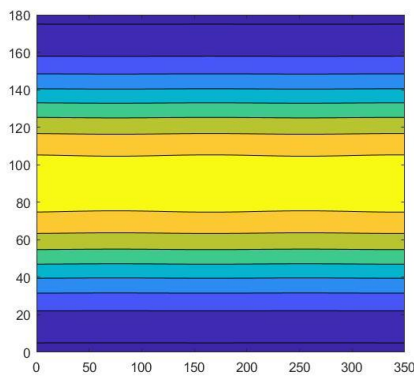


Рис. 1а

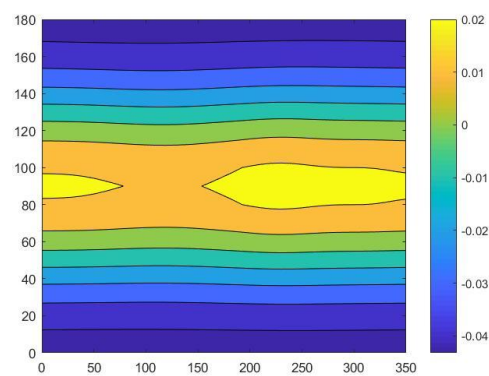


Рис. 1б

**Рис. 1(а-б).** Карта розподілу аномалій густини надр Землі  $\Delta d_6$  на глибині 5150 км згідно з моделлю  $d_2$  та описаним у роботі методом

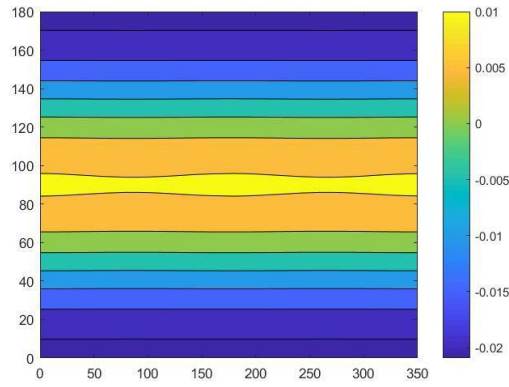


Рис. 2а

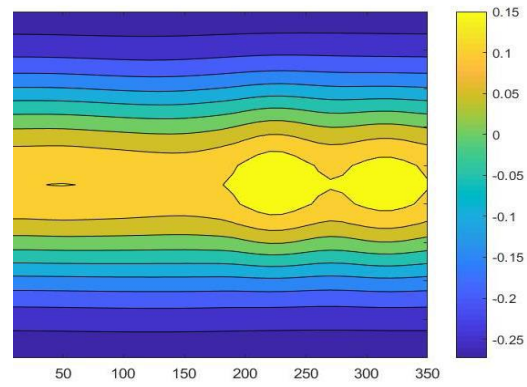


Рис. 2б

**Рис. 2(а–б).** Карта аномалій густини надр Землі  $\Delta d_6$  на глибині 2891 км згідно з моделлю  $d_2$  та описаним у роботі методом.

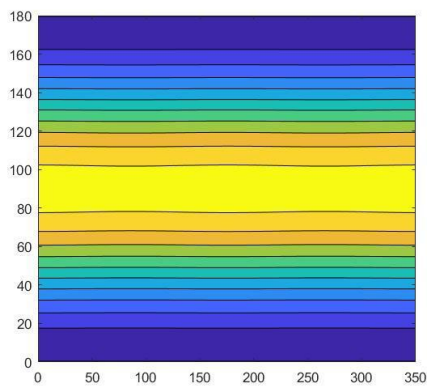


Рис. 3а

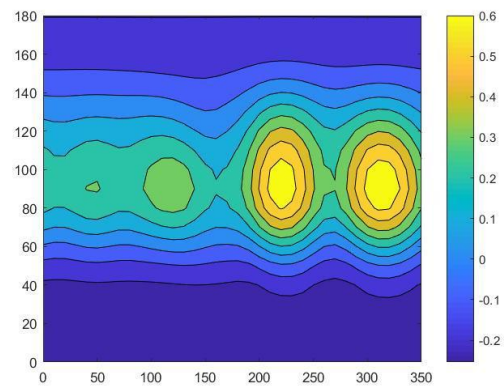


Рис. 3б

**Рис. 3(а–б).** Карта аномалій густини надр Землі  $\Delta d_6$  на її поверхні згідно з моделлю  $d_2$  та описаним у роботі методом

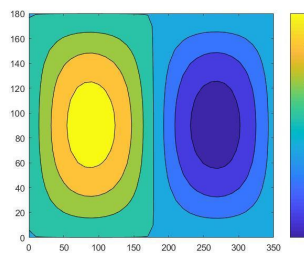


Рис. 4а

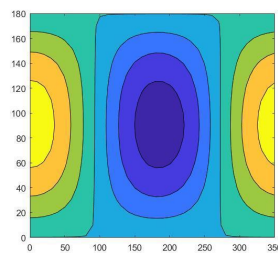


Рис. 4б

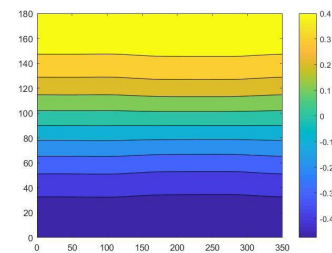


Рис. 4в

**Рис. 4(а–в).** Карта складових аномалій градієнта густини надр Землі  $\Delta d_6$  на глибині 5150 км

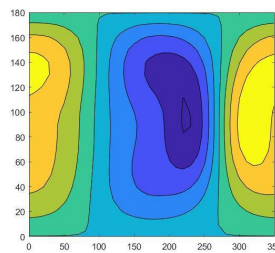


Рис. 5а

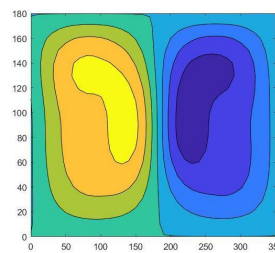


Рис. 5б

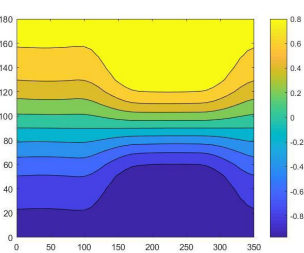
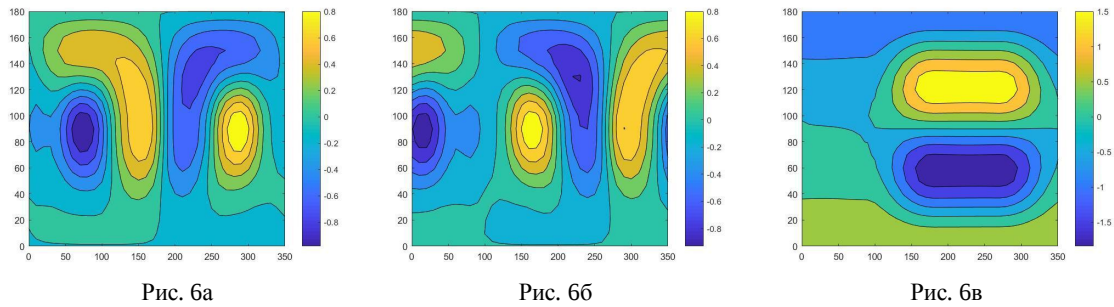


Рис. 5в

**Рис. 5(а–в).** Карта складових аномалій градієнта густини надр Землі  $\Delta d_6$  на глибині 2891 км



**Рис. 6(а–в).** Карта складових аномалій градієнта густини надр Землі  $\Delta d_g$  на поверхні

Побудована тривимірна модель густини, зберігає всі основні властивості референційної моделі PREM: величини стрибків та глибину їхнього залягання, а також характер зміни густини по радіусу. При цьому, на відміну від моделі  $d_2$  (рис. 1а, 2а, 3а), карти аномалій густини  $\Delta d_m$  (рис. 1б, 2б, 3б) є більш структуровані, тобто дають більш детальну картину розміщення мас усередині Землі. Так, на різних глибинах спостерігається перерозподіл мас, проте характерним для всіх випадків є ущільнення в екваторіальних областях і дефіцит мас при наближенні до полюсів. Таке переміщення мас може бути зв'язане з обертовим рухом планети. Треба зауважити, що не завжди екстремальні значення корелюють із піками аномалій геоїда. Так, на карті на поверхні попри збіг деяких аномалій густини та геоїда, наприклад, ( $q \approx 90^\circ, l \approx 300^\circ$ ), для інших притаманна протилежна залежність ( $q \approx 90^\circ, l \approx 250^\circ$ ). Те саме стосується й інших глибин (радіусів). Тому використання наведених результатів необхідно підходити з обережністю, враховуючи їхній наближений характер.

Важливішим аспектом у цій методиці є одержання та інтерпретація поведінки компонентів градієнта аномалій густини, а особливо його третьої компоненти  $\left(\frac{\partial d}{\partial x_3}\right)$ . Як видно з рисунків 4в, 5в, 6в характерним для них є додатне значення, якщо  $0 \leq q \leq 90^\circ$  та від'ємне, коли  $90^\circ \leq q \leq 180^\circ$ . Це означає, що напрям вектора градієнта напрямлений до центра мас.

Отже, на основі цієї інформації одержуємо модель густини, яка дає детальнішу картину розподілу мас усередині планети.

Горизонтальні компоненти градієнта  $\frac{\partial d}{\partial x_1}, \frac{\partial d}{\partial x_2}$

на різних глибинах ведуть себе по-різному та можуть бути додатковим інструментом при перерозподілі мас. В ідеальному випадку напрошується побудова об'ємних карт зі зображенням величини та напрямку векторів градієнта густини, що б значно спростило інтерпретацію отриманих

результатів. На жаль, поки що не вдається цього зробити.

### Висновки

1. Запропонований метод наближеної побудови розподілу мас еліпсоїдальної Землі, не суттєво відрізняється від аналогічного для сферично-симетричної планети та дає можливість більш повно використати інформацію про гравітаційне поле планети.
2. До певного порядку ( $N < 5$ ) наближений спосіб визначення густини та її похідних, дає змогу контролювати процес обчислень і орієнтуватись у достовірності такої побудови.
3. Побудовані картосхеми ліній постійної густини дають можливість аналізувати розміщення аномальних мас та їх можливе переміщення за рахунок обертової складової сили тяжіння.
4. Представлені карти компонент вектора градієнта густини дають додаткові можливості в інтерпретації ймовірних перерозподілів мас Землі.
5. Для всіх поданих карт напрям третьої складової  $\left(\frac{\partial d}{\partial x_3}\right)$  напрямлений у сторону центра мас, тобто підтримується властивість радіального розподілу зростання функції густини з глибиною.

### Список літератури

- Андерсон Д. Л., Дзевонский А. М. Сейсмическая томография // В мире науки. – 1984. – 12. – С. 16–25.
- Буллен К. Е. Плотность Земли / К. Е. Буллен. – М.: Мир, 1978. – 437 с
- Жарков В. Н. Физика планетарных недр / В. Н. Жарков, В. П. Трубицин. – М.: Наука, 1980. – 448 с. – (глав. ред. физ.-мат. лит.).
- Мартышко П. С., Ладовский И. В., Бызов Д. Д., Цидаев А. Г. Методика построения блочных моделей трехмерного распределения плотности Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей Материалы 44-й сессии Международного семинара

- им. Д. Г. Успенского Москва, 23–27 января 2017 г. Москва ИФЗ РАН 2017. – С. 211–219.
- Машимов М. М. Теоретическая геодезия: Справочное пособие / под. ред. В. П. Савиных и В. Р. Ященко. / М. М. Машимов. – М.: Недра, 1991. – 268 с.
- Мещеряков Г. А. Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения её механической модели / Г. А. Мещеряков // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. – 1975. – № 21. – С. 23–30.
- Мещеряков Г. А. Определение плотности Земных недр рядами по биортогональным системам многочленов / Г. А. Мещеряков, М. М. Фис // Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – 1981. – С. 329–334.
- Мещеряков Г. А. Трёхмерная и референсная плотностные модели Земли / Г. А. Мещеряков, М. М. Фис // Геофизический журнал. – Киев. – 1986. – Т. 8. – № 4. – С. 68–75.
- Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля / Г. А. Мещеряков. – М.: Наука, 1991. – 216 с. – (гл. ред. физ.-мат. лит.).
- Мещеряков Г. А. Вариант механической модели нижней мантии / Г. А. Мещеряков, П. . Зазуляк, О. В. Кулько, М. М. Фис, П. И. Штабальук // Труды III Орловской конференции “Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии”. – К.: Наукова думка, 1994. – С. 172–177.
- Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. / Г. Мориц. – Киев, 1994. – 240 с.
- Фис М. М. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М. М. Фис, Р. С. Фоца, А. Р. Согор, В.О. Волос // “Геодинаміка”. – Львів, 2008. – № 1(7). – С. 25–34.
- Церклевич А. Л. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи / А. Л. Церклевич, О. С. Заяць, М. М. Фис // “Геодинаміка”. – Львів, 2012. – № 1 (12). – С. 42–53.
- Черняга П. Г. Новый підхід до використання стоксових сталих для побудови функцій та її похідних розподілів мас планет / П. Г. Черняга, М. М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”. – Львів, 2012. – Вип. II (24). – С. 40–43.
- Щербаков А. М. Объемное распределение плотности Луны / А. М. Щербаков. // Астрономический вестник, т. XII. – 1978. – № 2. – С. 88–95.
- Dziewonski A. Preliminary reference Earth model. / A. Dziewonski, D. Anderson. // Physics of the Earth and Planet Inter. – 1981. – No. 25. – P. 297–356.
- Fys M., M. Yurkiv, A. Brydun, V. Lozynskyi One option of constructing three-dimensional distribution of the mass and its derivatives for a spherical planet. – Geodynamics 2(21). – 2016. – С. 36–44.
- Liu L, Chao B. F, Sun W, Kuang W. Assessment of the effect of three-dimensional mantle density heterogeneity on earth rotation in tidal frequencies. Geod Geodyn. – 2016. – Nov. – 7(6). – P. 396–405.
- Martinenc Z. Three-Dimensional Density Distribution Generating the Observed Gravite Field of planets: Part II. The Moon / Z. Martinenc, K. Pec. // Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets. – Cze-choslovakia, Prague. – 1986. – No. 1. – p. 153–163.
- Moritz G. Computatson ellipsoidal mass distributions / G. Moritz. // Department of Geodetic Science, The Ohio State University. – 1973. – No. 206. – p. 20.
- Su W.-J., Woodward R. L., Dziewonski A. M. Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle // J. Geophys. Res. – 1994. – Vol. 99. – No. B4. – P. 6945–6980.
- Woodward M. J. A decade of tomography / M. J. Woodward, D. Nichols, O. Zdraveva, P. Whitfield, T. Johns // Geophysics. – 2008. – 73(5).

М. М. ФИС<sup>1</sup>, А. М. БРЫДУН<sup>2</sup>, М. И. ЮРКИВ<sup>3</sup>

Кафедра картографии и геопроостранственного моделирования, Национальный университет “Львовская политехника”, ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, <sup>1</sup>Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, <sup>2</sup>Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, <sup>3</sup>Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua

# МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИИ ТРЕХМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАС НЕДР ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

**Цель.** Исследовать методику построения трехмерной функции распределения масс недр внутри Земли и ее производных, согласованную с параметрами гравитационного поля планеты к четвертому порядку включительно. По построенной таким способом функцией распределения масс осуществить интерпретацию особенностей внутреннего строения эллипсоидальной планеты. **Методика.** На основе созданного начального приближения функции, включающего референсную модель плотности, выстраиваются дальнейшие уточнения. Используя Стокса постоянные до второго порядка включительно, даем следующее приближение, которое в дальнейшем принимаем как нулевое. При этом использование

стоксовых постоянных до четвертого порядка включительно приводит к решению систем уравнений. Установлено, что присоединение одного тождества приводит к однозначности решения. Исключением является одна система с стоксовыми постоянными  $C_{40}, C_{42}, C_{44}$ . Заметим, что процесс вычислений является контролируемым, так как степенные моменты производных плотности сводятся к величинам, которые учитывают значение плотности на поверхности эллипсоида. **Результаты.** В отличие от модели второго порядка, описывающей грубые глобальные неоднородности, полученная функция распределения дает подробную картину размещения аномалий плотности (отклонение трехмерной функции от усредненной по сфере – “изоденс”). Анализ карт на разных глубинах 2891 км (ядро-мантия), 5150 км (внутреннее-внешнее ядро) позволяет сделать предварительные выводы о глобальном перераспределении масс за счет вращающейся составляющей силы тяжести по всему радиусу, а также за счет горизонтальных компонент градиента плотности. Этот факт особенно заметен для экваториальных областей. Напротив, в полярных частях Земли наблюдается минимум такого отклонения, что также имеет свое объяснение: величина силы вращения уменьшается при смещении к полюсу. Построена с помощью предложенного метода функция распределения масс более подробно описывает картину распределения масс. Особый интерес представляют картосхемы компонентов градиента функции аномалий плотности, а именно компонента, что совпадает с осью  $Oz$  - для верхней части оболочки она отрицательная, для нижней положительная. Это значит, что вектор градиента направлен в сторону центра масс. Характер значений для двух других компонент разный как по знаку, так и по величине и зависит от точки размещения. Совокупное рассмотрение и учет всех величин дает возможность более полной интерпретации процессов внутри Земли. **Научная новизна.** В отличие от традиционного подхода изменения для производных плотности одной переменной (глубины), полученных из уравнения Адамса-Уильямса, в данной работе сделана попытка получить производные по декартовым координатам. Использование в описанном методе параметров гравитационного поля до четвертого порядка включительно увеличивает порядок аппроксимации функции распределения масс трех переменных с двух до шести, а ее производных – до пяти. При этом, в отличие от традиционной методики, определяющим здесь является построение производных, из которых воспроизводится функция распределения масс и использования геофизической информации, аккумулированная в референсной модели PREM. **Практическая значимость.** Полученная функция распределения масс Земли может быть использована как следующее приближение при использовании стоксовых постоянных высших порядков в представленном алгоритме. Ее применение дает возможность интерпретировать глобальные аномалии гравитационного поля и изучать глубинные геодинамические процессы внутри Земли.

*Ключевые слова:* потенциал, гармоническая функция, модель распределения масс, стоксовые постоянные, градиент плотности.

M. FYS<sup>1</sup>, A. BRYDUN<sup>2</sup>, M. YURKIV<sup>3</sup>

Department of cartography and geospatial modeling of Lviv Polytechnic National University, 12, Bandera Str., Lviv, Ukraine, 79013, e-mail: <sup>1</sup>Mykhailo.M.Fys@lpnu.ua, <sup>2</sup>Andrii.M.Brydun@lpnu.ua, <sup>3</sup>Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua

#### METHOD FOR APPROXIMATE CONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL MASS DISTRIBUTION FUNCTION AND GRADIENT OF AN ELIPSOIDAL PLANET BASED ON EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD PARAMETERS

**Purpose.** To investigate the technique for constructing a three-dimensional distribution function for the masses of the interior of the Earth and its derivatives, coordinated with the parameters of the planet's gravitational field to fourth order inclusive. By using the mass distribution function constructed, to make an interpretation of the features of the internal structure of an ellipsoidal planet. **Methodology.** Based on the created initial approximation of the function, which includes a reference density model, further refinements are built. Using Stokes constants up to the second order inclusive, we give the following approximation, which we subsequently take as zero. In this case, the use of Stokes constants up to the fourth order inclusive leads to the solution of systems of equations. It is established that the addition of one identity leads to uniqueness of the solution. One system with Stokes constants  $C_{40}, C_{42}, C_{44}$  is an exception. It is necessary to note that the computation process is controllable, since the power moments of the density derivatives are reduced to quantities that take into account the value of the density on the surface of the ellipsoid. **Results.** In contrast to the second-order model describing gross global inhomogeneities, the obtained distribution function gives a detailed picture of the location of the density anomalies (the deviation of the three-dimensional function from the averaged over the sphere is “isodense”) Analysis of maps at different depths 2891 km (core-mantle), 5150 km (internal-external core) allows us to draw preliminary conclusions about the global mass redistribution due to the rotating component of the force of gravity over the entire radius, as well as due to the horizontal components of the

density gradient. On the contrary, the minimum of such a deviation is observed in the polar parts of the Earth, which also has its explanation: the magnitude of the rotational force decreases when approaching the pole. The mass distribution function is constructed using the proposed method to describe in more detail the picture of the mass distribution. Of particular interest are sketch maps of the components of the density anomaly function gradient, namely the component which coincides with the axis  $Oz$  – for the upper part of the shell which is negative, and for the lower part it is positive. This means that the gradient vector is directed toward the centre of mass. The nature of the values for other two components is different both in sign and in magnitude and depends on the placement point. The cumulative consideration and consideration of all the quantities makes possible a more complete interpretation of the processes inside the Earth. **Originality.** In contrast to the traditional approach, the changes for the density derivatives of one variable (depth), obtained from the Adams-Williams equation, in this paper made an attempt to obtain derivatives with Cartesian coordinates. Used in the described method, the parameters of the gravitational field up to the fourth order inclusively increases the order of approximation of the mass distribution function of three variables from two to six, and its derivatives up to five. In this case, unlike the traditional method, the defining here is the construction of the derivatives, from which the mass distribution function and the use of geophysical information accumulated in the referential PREM model are reproduced. **Practical significance.** The resulting mass distribution function of the Earth can be used as the next approximation when using Stokes constants of higher orders in the presented algorithm. Its application makes it possible to interpret global anomalies of the gravitational field and to study geodynamic processes deeply inside the Earth.

*Key words:* potential, harmonic function, the mass distribution model, Stoke's constants, density gradient.

Надійшла 03.02.2018 р.