МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1968 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 7

А. Е. ФИЛИППОВ

КООРДИНАТНЫЕ УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЕТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Для определения пространственной угловой триангуляции по величине и по положению в геодезической системе координат, ориентированной относительно плоскости земного экватора и плоскости начального астрономического меридиана, достаточно знать длину одной из сторон, астрономические координаты φ, λ и азимут α, а также пространственные координаты B, L, H в одном из триангуляционных пунктов. Численные значения этих элементов называют исходными данными.

Наличие избыточных исходных данных приводит к возникновению в сети соответствующих условных уравнений. Настоящая статья посвящена составлению координатных (или полигональных) условных уравнений, возникающих при наличии более чем одного пункта с известными значениями пространственных координат. Подобный случай имеет место, если сеть вставляется между жесткими пунктами высшего класса.

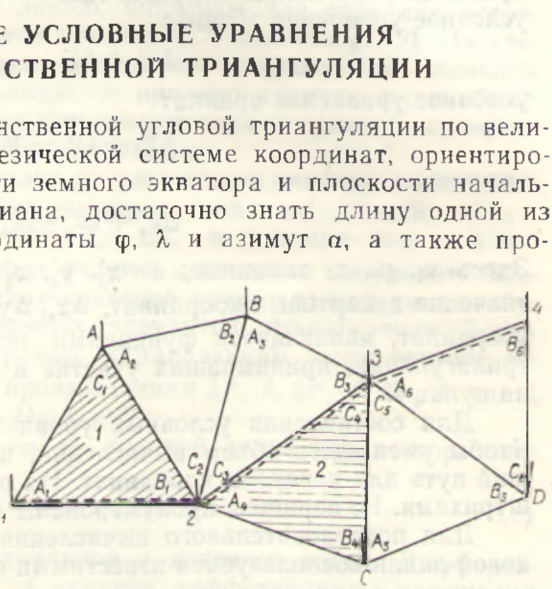

Схема пространственной триангуляции.

Для примера рассмотрим ряд треугольников пространственной триангуляции, показанный на рисунке. В каждом пункте этого ряда получены из измерений горизонтальные углы a_i, b_i, c_i и зенитные расстояния z_{ik}. Последние будем считать свободными от влияния вертикальной рефракции. Буквами A_i, B_i, C_i обозначим углы плоских треугольников, являющиеся функциями соответствующих зенитных расстояний и горизонтальных углов. В пункте *1* из астрономических определений получены значения астрономической широты φ_1, долготы λ_1 и азимута α_{1A} направления $1A$, а также заданы геодезические координаты B_1, L_1, H_1. Кроме того, известна длина стороны $1A$, равная s_1. Указанные данные вполне достаточны для вычисления астрономических и геодезических координат и азимутов для любого пункта рассматриваемого ряда.

Предположим теперь, что геодезические координаты известны также для пункта *4*. Обозначим их через B_4, L_4, H_4. Тогда между пунктами *1* и *4* возникнут три условных уравнения: уравнение геодезической широты, уравнение геодезической долготы и уравнение геодезической высоты. В системе декартовых координат $Oxyz$ им соответствуют условные уравнения абсцисс, ординат и аппликат.

Последние уравнения составляются проще и поэтому в дальнейшем будем пользоваться системой декартовых координат, предполагая, что ее начало O совмещено с центром референц-эллипсоида, ось Oz направлена к северу по малой оси последнего, ось Ox параллельна плоскости начального астрономического меридиана, а ось Oy направлена на 90° к востоку от оси Ox. Перевычисление геодезических координат опорных пунктов в декартовы может быть выполнено по хорошо известным формулам.

В самом общем виде координатные условные уравнения между пунктами *1* и *4* можно записать так:
условное уравнение абсцисс

$$\Delta x_4' + (x_4' - x_4) = 0, \tag{1}$$

условное уравнение ординат

$$\Delta y_4' + (y_4' - y_4) = 0, \tag{2}$$

условное уравнение аппликат

$$\Delta z_4 + (z_4' - z_4) = 0. \tag{3}$$

Здесь x_4, y_4, z_4 заданные, а x_4', y_4', z_4' — вычисленные для пункта *4* значения декартовых координат, $\Delta x_4'$, $\Delta y_4'$, $\Delta z_4'$ — поправки вычисленных координат, являющиеся функциями поправок измеренных элементов триангуляции, принимавших участие в передаче координат с пункта *1* на пункт *4*.

Для составления условных уравнений наметим ходовую линию. Чтобы уменьшить объем вычислений, целесообразно выбрать кратчайший путь для передачи координат. На рисунке ходовая линия отмечена штрихами. Ее вершины пронумерованы порядковыми числами.

Для последовательного вычисления координат x, y, z вершин ходовой линии воспользуемся известными формулами

$$\begin{aligned} x_k &= x_i + s_{ik}\, l_{ik}, \\ y_k &= y_i + s_{ik}\, m_{ik}, \\ z_k &= z_i + s_{ik}\, n_{ik}, \end{aligned} \tag{4}$$

где s_{ik} — длина стороны ходовой линии между вершинами i и k, l_{ik}, m_{ik}, n_{ik} — направляющие косинусы этой стороны в системе $Oxyz$. Длины сторон ходовой линии в нашем случае выразятся так:

$$\begin{aligned} s_{12} &= s_1 \frac{\sin C_1}{\sin B_1}, \\ s_{23} &= s_1 \frac{\sin C_1 \sin A_1 \;\sin A_2 \sin A_3}{\sin B_1 \sin C_1 \;\sin B_2 \sin B_3}, \\ s_{34} &= s_1 \frac{\sin C_1 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin A_4 \sin A_5 \sin C_6}{\sin B_1 \sin C_1 \sin B_2 \sin B_3 \sin B_4 \sin B_5 \sin B_6}, \end{aligned} \tag{5}$$

где A, B, C с соответствующими индексами — углы плоских треугольников, вычисляемые по горизонтальным углам и зенитным расстояниям. Например,

$$\cos A_1 = \cos z_{1A} \cos z_{12} + \sin z_{1A} \sin z_{12} \cos a_1. \tag{6}$$

Направляющие косинусы l_{ik}, m_{ik}, n_{ik} определяются формулами

$$l_{ik}=\cos z_{ik}\cos\varphi_i\cos\lambda_i-\sin z_{ik}(\sin\lambda_i\sin\alpha_{ik}+\sin\varphi_i\cos\lambda_i\cos\alpha_{ik}),$$
$$m_{ik}=\cos z_{ik}\cos\varphi_i\sin\lambda_i+\sin z_{ik}(\cos\lambda_i\sin\alpha_{ik}-\sin\varphi_i\sin\lambda_i\cos\alpha_{ik}),\quad(7)$$
$$n_{ik}=\cos z_{ik}\sin\varphi_i+\sin z_{ik}\cos\varphi_i\cos\alpha_{ik}.$$

Нетрудно видеть, что для вычисления l_{ik}, m_{ik}, n_{ik} необходимо предварительно получить для вершин ходовой линии астрономические координаты φ_i, λ_i и астрономические азимуты α_{ik} ее сторон.

В принципе безразлично, как передавать астрономические координаты и азимуты с пункта *1* на пункты *2* и *3*, но для уменьшения объема вычислений и упрощения вида условных уравнений следует использовать уже выбранную ходовую линию. Формулы для передачи астрономических координат и азимутов приведены в работах [1, 2]. На схеме триангуляционной сети, помещенной выше, треугольники, элементы которых используются при переходе от прямого азимута α_{ik} к обратному α_{ki}, а также при передаче астрономических координат, пронумерованы и для наглядности покрыты штриховкой.

Вычислив в указанном порядке координаты x, y, z вершин ходовой линии, получим свободные члены условных уравнений (1), (2), (3).

Выразим теперь величины $\Delta x_4'$, $\Delta y_4'$, $\Delta z_4'$ в функции поправок измеренных элементов, принимавших участие в передаче координат. Обозначим через $\Delta\boldsymbol{r}_4$ вектор смещения конечной точки ходовой линии, обусловленный поправками измеренных элементов триангуляции. Тогда величины $\Delta x_4'$, $\Delta y_4'$, $\Delta z_4'$ будут равны составляющим этого вектора по осям координат или скалярным произведениям $\Delta\boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{i}$, $\Delta\boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{j}$, $\Delta\boldsymbol{r}_4\cdot\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты соответственно осей Ox, Oy, Oz.

Рассматривая отрезки s_{12}, s_{23}, s_{34} ходовой линии как векторы, напишем

$$\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{s}_{12}+\boldsymbol{s}_{23}+\boldsymbol{s}_{34},\quad(8)$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_4$ радиусы-векторы начальной и конечной точек. Дифференцируя векторное равенство (8) и заменяя дифференциалы конечными приращениями, получим

$$\Delta\boldsymbol{r}_4=\Delta\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{s}_{12}+\Delta\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{s}_{23}+\Delta\boldsymbol{\omega}_3\times\boldsymbol{s}_{34}+$$
$$+\frac{\boldsymbol{s}_{12}}{s_{12}}\delta s_{12}+\frac{\boldsymbol{s}_{23}}{s_{23}}\delta s_{23}+\frac{\boldsymbol{s}_{34}}{s_{34}}\delta s_{34}.\quad(9)$$

Величины $\Delta\boldsymbol{\omega}_1$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_2$, $\Delta\boldsymbol{\omega}_3$ или векторы поворотов соответственно отрезков s_{12}, s_{23}, s_{34} можно представить так:

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_1=\delta\boldsymbol{\omega}_1+\delta\boldsymbol{\omega}_{12},$$
$$\Delta\boldsymbol{\omega}_2=\delta\boldsymbol{\omega}_1+\delta\boldsymbol{\omega}_2+\delta\boldsymbol{\omega}_{23},\quad(10)$$
$$\Delta\boldsymbol{\omega}_3=\delta\boldsymbol{\omega}_1+\delta\boldsymbol{\omega}_2+\delta\boldsymbol{\omega}_3+\delta\boldsymbol{\omega}_{34}.$$

Здесь $\delta\boldsymbol{\omega}_1$ — вектор угла поворота отрезка s_{12}, обусловленный поправками широты $\delta\varphi_1$ долготы $\delta\lambda_1$ точки *1* и азимута $\delta\alpha_{12}=\delta\alpha_{1A}+\delta a_1$ направления *12*; $\delta\boldsymbol{\omega}_2$ — вектор угла поворота отрезка s_{23}, обусловленный поправками измеренных элементов в треугольнике *1А2* и поправками δc_2, δc_3 горизонтальных углов c_2, c_3; $\delta\boldsymbol{\omega}_3$ — вектор угла поворота отрезка s_{34}, обусловленный поправками измеренных элементов в треугольнике *23С* и поправками δc_4, δc_5, δa_6 горизонтальных углов c_4, c_5, a_6; $\delta\boldsymbol{\omega}_{12}$ — вектор поворота отрезка s_{12}, связанный с поправкой δz_{12} зенитного расстояния z_{21}; $\delta\omega_{23}$ — вектор поворота отрезка s_{23}, связанный с поправкой δz_{2} и т. д. Рассматривая общий случай, мы вводим в уравнивание поправки зенитного расстояния z_{23} $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{1A}$, принимая во внимание, что астрономические координаты и азимуты (в отличие от пространственных координат B, L, H или x, y, z) получают из измерений.

Поправки δs_{ik} длин сторон ходовой линии в соответствии с формулами (5) выразятся следующим образом

$$
\begin{aligned}
\delta s_{12} &= s_{12}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1),\\
\delta s_{23} &= s_{23}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1 + \operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1 + \operatorname{ctg} A_2\delta A_2 -\\
&\quad - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2 + \operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3),\\
\delta s_{34} &= s_{34}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1 + \operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1 + \operatorname{ctg} A_2\delta A_2 - \\
&\quad - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2 + \operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3 + \operatorname{ctg} A_4\delta A_4 - \operatorname{ctg} B_4\delta B_4 + \\
&\quad + \operatorname{ctg} A_5\delta A_5 - \operatorname{ctg} B_5\delta B_5 + \operatorname{ctg} C_6\delta C_6 - \operatorname{ctg} B_6\delta B_6).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Здесь δA_1, δB_1, δC_1, и т. д. поправки углов плоских треугольников, являющиеся функциями поправок соответствующих зенитных расстояний и горизонтальных углов.

Подставив (10) и (11) в формулу (9), получим

$$
\begin{aligned}
\Delta r_4 &= \delta\omega_1 \times (s_{12} + s_{23} + s_{34}) + \delta\omega_2 \times (s_{23} + s_{34}) + \delta\omega_3 \times s_{34} + \delta\omega_{12} \times s_{12} + \\
&\quad + \delta\omega_{23} \times s_{23} + \delta\omega_{34} \times s_{34} + (\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1)(s_{12} + s_{23} + s_{34}) + \\
&\quad + (\operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1)(s_{23} + s_{34}) + (\operatorname{ctg} A_2\delta A_2 - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2)(s_{23} + \\
&\quad + s_{34}) + (\operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3)(s_{23} + s_{34}) + (\operatorname{ctg} A_4\delta A_4 - \\
&\quad - \operatorname{ctg} B_4\delta B_4) s_{34} + (\operatorname{ctg} A_5\delta A_5 - \operatorname{ctg} B_5\delta B_5) s_{34} + (\operatorname{ctg} C_6\delta C_6 - \\
&\quad - \operatorname{ctg} B_6\delta B_6) s_{34}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Угол $\delta\omega_1$ соответствует повороту всей сети триангуляции как твердого тела вокруг точки 1, а угол $\delta\omega_2$ — повороту сети вокруг точки 2 и т. д. Обозначим через $(\delta\omega_i)_x$, $(\delta\omega_i)_y$, $(\delta\omega_i)_z$, где $i=1, 2, \ldots$, составляющие векторов $\delta\omega_i$ по осям координат. Эти составляющие можно выразить через поправки $\delta\varphi_i$, $\delta\lambda_i$ астрономических координат вершин ходовой линии и поправки $\delta\alpha_{ik}$ астрономических азимутов ее сторон с помощью известных кинематических уравнений Эйлера

$$
\begin{aligned}
\omega_x dt &= \sin\psi \sin\Theta \cdot \dot\varphi dt + \cos\psi \cdot \dot\Theta dt,\\
\omega_y dt &= -\cos\psi \sin\Theta \cdot \dot\varphi dt + \sin\psi \cdot \dot\Theta dt,\\
\omega_z dt &= \dot\psi dt + \cos\Theta \cdot \dot\varphi dt.
\end{aligned}
$$

В этих уравнениях следует принять

$$
\begin{aligned}
\omega_x dt &= (\delta\omega_i)_x, & \dot\varphi dt &= -\delta\alpha_{ik}, & \Theta &= 90^\circ - \varphi_i,\\
\omega_y dt &= (\delta\omega_i)_y, & \dot\Theta dt &= -\delta\varphi_i, & \psi &= 90^\circ + \lambda_i,\\
\omega_z dt &= (\delta\omega_i)_z, & \dot\psi dt &= \delta\lambda_i.
\end{aligned}
$$

Тогда будут справедливы следующие формулы

$$
\begin{aligned}
&(\delta\omega_i)_x = \sin\lambda_i\delta\varphi_i - \cos\varphi_i\cos\lambda_i\,\delta\alpha_{ik},\\
&(\delta\omega_i)_y = -\cos\lambda_i\delta\varphi_i - \cos\varphi_i\sin\lambda_i\delta\alpha_{ik},\\
&(\delta\omega_i)_z = \delta\lambda_i - \sin\varphi_i\delta\alpha_{ik},\\
&\qquad i=1,\,2,\ldots;\quad k=i+1.
\end{aligned}\tag{13}
$$

В формулах (13) величины $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{12}$ — поправки измеренных астрономических координат точки *1* и азимута направления *12* ($\delta\alpha_{12} = \delta\alpha_{1A} + \delta a_1$); величины $\delta\varphi_2$, $\delta\lambda_2$, $\delta\alpha_{23}$ — поправки вычисленных астрономических координат точки *2* и азимута направления *23*, являющиеся функциями поправок измеренных элементов в треугольнике *1А2* и поправок горизонтальных углов c_2, c_3; величины $\delta\varphi_3$, $\delta\lambda_3$, $\delta\alpha_{34}$ — функции поправок измеренных элементов в треугольнике *23С* и поправок горизонтальных углов c_5, a_6 и т. д. Например,

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi_2 &= \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{1A}}\delta z_{1A} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_{2A}}\delta z_{2A} +\\
&\quad + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial b_1}\delta b_1,\\
\delta\lambda_2 &= \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1 = \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{1A}}\delta z_{1A} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial z_{2A}}\delta z_{2A} +\\
&\quad + \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial b_1}\delta b_1,\\
\delta\alpha_{23} &= \left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1 + \delta b_1 + \delta c_2 + \delta c_3 = \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{21}}\delta z_{21} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{1A}}\delta z_{1A} +\\
&\quad + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial z_{2A}}\delta z_{2A} + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\alpha_{21}}{\partial b_1}\delta b_1 + \delta b_1 + \delta c_2 + \delta c_3.
\end{aligned}\tag{14}
$$

Коэффициенты при поправках в выражениях вида (14), можно вычислить по формулам, приведенным в работе [2].

Составляющие углов $\delta\omega_{12}$, $\delta\omega_{23}$ и т. д. по осям координат выразим через поправки зенитных расстояний следующим образом. Положив в формулах (7) α_{ik} равным $270° + \alpha_{ik}$, и z_{ik} равным 90°, получим в вершине i ходовой линии направляющие косинусы l_i, m_i, n_i вектора, перпендикулярного к плоскости, проходящей через отвесную линию в этой вершине и направление ik,

$$
\begin{aligned}
l_i &= \sin\lambda_i\cos\alpha_{ik} - \sin\varphi_i\cos\lambda_i\sin\alpha_{ik},\\
m_i &= -\cos\lambda_i\cos\alpha_{ik} - \sin\varphi_i\sin\lambda_i\sin\alpha_{ik},\\
n_i &= \cos\varphi_i\sin\alpha_{ik}.
\end{aligned}\tag{15}
$$

Так как

$$\delta\omega_{ik} = (l_i i + m_i j + n_i k)\,\delta z_{ik},$$

то

$$
\begin{aligned}
&(\delta\omega_{ik})_x = l_i\delta z_{ik}, \quad i=1,\,2,\ldots;\ k=i+1.\\
&(\delta\omega_{ik})_y = m_i\delta z_{ik},\\
&(\delta\omega_{ik})_z = n_i\delta z_{ik}.
\end{aligned}\tag{16}
$$

5-558

Например, для точки 2 и стороны ходовой линии 23:

$$(\delta\omega_{23})_x = l_2\delta z_{23} = (\sin\lambda_2\cos\alpha_{23} - \sin\varphi_2\cos\lambda_2\sin\alpha_{23})\,\delta z_{23}$$

и т. д.

Умножим теперь выражение (12) скалярно на i. Раскрыв векторно-скалярные и скалярные произведения и введя обозначения

$$\Delta x_{ki} = x'_k - x'_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\Delta y_{ki} = y'_k - y'_i, \quad k = 2, 3, \ldots,$$
$$\Delta z_{ki} = z_k - z'_i,$$

найдем

$$\begin{aligned}\Delta x_4 = {} & [\Delta z_{41}(\delta\omega_1)_y - \Delta y_{41}(\delta\omega_1)_z] + [\Delta z_{42}(\delta\omega_2)_y - \Delta y_{42}(\delta\omega_2)_z] + \\ & + [\Delta z_{43}(\delta\omega_3)_y - \Delta y_{43}(\delta\omega_3)_z] + [\Delta z_{21}(\delta\omega_{12})_y - \Delta y_{21}(\delta\omega_{12})_z] + \\ & + [\Delta z_{32}(\delta\omega_{23})_y - \Delta y_{32}(\delta\omega_{23})_z] + [\Delta z_{43}(\delta\omega_{34})_y - \Delta y_{43}(\delta\omega_{34})_z] + \\ & + \Delta x_{41}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1) + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1) + \\ & + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_2\delta A_2 - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2) + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3) + \\ & + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} A_4\delta A_4 - \operatorname{ctg} B_4\delta B_4) + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} A_5\delta A_5 - \operatorname{ctg} B_5\delta B_5) + \\ & + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} C_6\delta C_6 - \operatorname{ctg} B_6\delta B_6).\end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание формулы (13), (16) и (1), получим в следующем виде условное уравнение абсцисс

$$\begin{aligned}& \Delta z_{41}(-\cos\lambda_1\delta\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\lambda_1\delta\alpha_{12}) - \Delta y_{41}(\delta\lambda_1 - \sin\varphi_1\delta\alpha_{12}) + \\ & + \Delta z_{42}(-\cos\lambda_2\delta\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\lambda_2\delta\alpha_{23}) - \Delta y_{42}(\delta\lambda_2 - \sin\varphi_2\delta\alpha_{23}) + \\ & + \Delta z_{43}(-\cos\lambda_3\delta\varphi_3 - \cos\varphi_3\sin\lambda_3\delta\alpha_{34}) - \Delta y_{43}(\delta\lambda_3 - \sin\varphi_3\delta\alpha_{34}) + \\ & + (\Delta z_{21}m_1 - \Delta y_{21}n_1)\,\delta z_{12} + (\Delta z_{32}m_2 - \Delta y_{32}n_2)\,\delta z_{23} + (\Delta z_{43}m_3 - \Delta y_{43}n_3)\,\delta z_{34} + \\ & + \Delta x_{41}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1) + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1) + \\ & + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_2\delta A_2 - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2) + \Delta x_{42}(\operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3) + \\ & + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} A_4\delta A_4 - \operatorname{ctg} B_4\delta B_4) + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} A_5\delta A_5 - \operatorname{ctg} B_5\delta B_5) + \\ & + \Delta x_{43}(\operatorname{ctg} C_6\delta C_6 - \operatorname{ctg} B_6\delta B_6) + (x'_4 - x_4) = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогичным образом, умножая выражения (12) скалярно на j и k и принимая во внимание формулы (13), (16), (2), (3) получим остальные два уравнения.

Условное уравнение ординат:

$$\begin{aligned}& \Delta x_{41}(\delta\lambda_1 - \sin\varphi_1\delta\alpha_{12}) - \Delta z_{41}(\sin\lambda_1\delta\varphi_1 - \cos\varphi_1\cos\lambda_1\delta\alpha_{12}) + \\ & + \Delta x_{42}(\delta\lambda_2 - \sin\varphi_2\delta\alpha_{23}) - \Delta z_{42}(\sin\lambda_2\delta\varphi_2 - \cos\varphi_2\cos\lambda_2\delta\alpha_{23}) + \\ & + \Delta x_{43}(\delta\lambda_3 - \sin\varphi_3\delta\alpha_{34}) - \Delta z_{43}(\sin\lambda_3\delta\varphi_3 - \cos\varphi_3\cos\lambda_3\delta\alpha_{34}) + \\ & + (\Delta x_{21}n_1 - \Delta z_{21}l_1)\,\delta z_{12} + (\Delta x_{32}n_2 - \Delta z_{32}l_2)\,\delta z_{23} + (\Delta x_{43}n_3 - \Delta z_{43}l_3)\,\delta z_{34} + \\ & + \Delta y_{41}(\operatorname{ctg} C_1\delta C_1 - \operatorname{ctg} B_1\delta B_1) + \Delta y_{42}(\operatorname{ctg} A_1\delta A_1 - \operatorname{ctg} C_1\delta C_1) + \\ & + \Delta y_{42}(\operatorname{ctg} A_2\delta A_2 - \operatorname{ctg} B_2\delta B_2) + \Delta y_{42}(\operatorname{ctg} A_3\delta A_3 - \operatorname{ctg} B_3\delta B_3) + \\ & + \Delta y_{43}(\operatorname{ctg} A_4\delta A_4 - \operatorname{ctg} B_4\delta B_4) + \Delta y_{43}(\operatorname{ctg} A_5\delta A_5 - \operatorname{ctg} B_5\delta B_5) + \\ & + \Delta y_{43}(\operatorname{ctg} C_6\delta C_6 - \operatorname{ctg} B_6\delta B_6) + (y'_4 - y_4) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Условное уравнение аппликат:

$$\Delta y_{41}(\sin\lambda_1\delta\varphi_1-\cos\varphi_1\cos\lambda_1\delta\alpha_{12})-\Delta x_{41}(-\cos\lambda_1\delta\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\lambda_1\delta\alpha_{12})+$$
$$+\Delta y_{42}(\sin\lambda_2\delta\varphi_2-\cos\varphi_2\cos\lambda_2\delta\alpha_{23})-\Delta x_{42}(-\cos\lambda_2\delta\varphi_2-\cos\varphi_2\sin\lambda_2\delta\alpha_{23})+$$
$$+\Delta y_{43}(\sin\lambda_3\delta\varphi_3-\cos\varphi_3\cos\lambda_3\delta\alpha_{34})-\Delta x_{43}(-\cos\lambda_3\delta\varphi_3-\cos\varphi_3\sin\lambda_3\delta\alpha_{34})+$$
$$+(\Delta y_{21}l_1-\Delta x_{21}m_1)\delta z_{12}+(\Delta y_{32}l_2-\Delta x_{32}m_2)\delta z_{23}+(\Delta y_{43}l_3-\Delta x_{43}m_3)\delta z_{34}+$$
$$+\Delta z_{41}(\operatorname{ctg}C_1\delta C_1-\operatorname{ctg}B_1\delta B_1)+\Delta z_{42}(\operatorname{ctg}A_1\delta A_1-\operatorname{ctg}C_1\delta C_1)+$$
$$+\Delta z_{42}(\operatorname{ctg}A_2\delta A_2-\operatorname{ctg}B_2\delta B_2)+\Delta z_{42}(\operatorname{ctg}A_3\delta A_3-\operatorname{ctg}B_3\delta B_3)+$$
$$+\Delta z_{43}(\operatorname{ctg}A_4\delta A_4-\operatorname{ctg}B_4\delta B_4)+\Delta z_{43}(\operatorname{ctg}A_5\delta A_5-\operatorname{ctg}B_5\delta B_5)+$$
$$+\Delta z_{43}(\operatorname{ctg}C_6\delta C_6-\operatorname{ctg}B_6\delta B_6)+(z_4'-z_4)=0. \qquad (19)$$

Напомним, что в формулах (17), (18), (19) в соответствии с выбором ходовой линии и треугольников, по элементам которых выполняется передача астрономических координат и азимутов, имеем

$$\delta\alpha_{12}=\delta\alpha_{1A}+\delta a_1,\quad \delta\alpha_{23}=\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta b_1+\delta c_2+\delta c_3,$$

$$\delta\alpha_{34}=\left(\frac{\partial\alpha_{32}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2-\delta c_4-\delta c_5-\delta a_6,$$

$$\delta\varphi_2=\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,\quad \delta\varphi_3=\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2,$$

$$\delta\lambda_2=\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1,\quad \delta\lambda_3=\left(\frac{\partial\lambda_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2.$$

Индекс у скобок соответствует номеру треугольника, по элементам которого выполняются вычисления. Величины δA_i, δB_i, δC_i следует выразить через поправки зенитных расстояний и горизонтальных углов. Используя выражения вида (6), получим, например, для поправки δC_3:

$$\sin C_3\delta C_3=(\sin z_{2B}\cos z_{23}-\cos z_{2B}\sin z_{23}\cos c_3)\delta z_{2B}+$$
$$+(\cos z_{2B}\sin z_{23}-\sin z_{2B}\cos z_{23}\cos c_3)\delta z_{23}+\sin z_{2B}\sin z_{23}\sin c_3\delta c_3.$$

В нашем примере одну из поправок $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{1A}$ в уравнениях (17), (18), (19) нужно считать равной нулю, так как задание двух твердых точек определяет ориентировку сети с точностью до поворота вокруг прямой, соединяющей эти точки.

Если астрономические координаты и азимут определялись не в точке *1*, а, например, в точке *B*, то под $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{12}$ следует понимать поправки вычисленных в точке *1* астрономических координат и азимута, являющиеся функциями поправок наблюденных астрономических координат и азимута в точке *B*, а также поправок измеренных элементов триангуляции, принимавших участие в передаче координат и азимута с точки *B* на точку *1*.

Если астрономические определения считаются безошибочными, то поправки наблюденных широт, долгот и азимутов следует принять равными нулю.

Закономерность, проявляющаяся в виде уравнений (17), (18), (19), очевидна. Поэтому, не прибегая к выкладкам, их нетрудно записать для любой сети и любой ходовой линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львовского университета, 1966.

2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. Межведомственный республиканский научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львовского университета, 1967.

Работа поступила
16 января 1967 г.