УДК 681.325

Л.О. Березко, В.В. Троценко
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕОМ

ПРИСКОРЕННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД НЕЧІТКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ, ПОДАНИМИ ПАРАМИ

У багатьох прикладних задачах, зокрема задачах медичної і технічної діагностики, виникає необхідність проведення обчислень з нечіткими величинами, тобто з такими, точне значення яких нам невідоме. Пропонується підхід, що прискорює виконання арифметичних операцій над нечіткими величинами, поданими парами, який ґрунтується на положеннях теорії можливостей.

Fuzzy pair-based variables operations acceleration approach.

In the technical and medical diagnostic are widely used fuzzy variables. The operations with these variables are processed during diagnostic calculations. The new pair-based fuzzy variables arithmetic operations approach is suggested for speedup of calculation.

1. ВСТУП

При розв’язанні задач медичної і технічної діагностики треба, як правило, оперувати вихідними та проміжними даними із значним рівнем невизначеності [1, 2, 3]. Якщо функції належності операндів бінарної операції мають складну (довільну) форму, то тільки попарне подання дає змогу виконувати обчислення з такими даними [4]. Попарне подання має вигляд:

$$\mu(x) = \{\mu_1 / x_1;\ \mu_2 / x_2;\ \ldots\mu_n / x_n\}, \tag{1}$$

де μ_n / x_n – елемент нечіткої величини; μ_n – значення функції належності; x_n – значення змінного параметра.

У такому випадку алгоритми виконання бінарної операції будуються за формулою $\min-\max$ згортки [4, 8]:

$$\mu_t(x) = \sup_{y,z:y*z=x} f_{\&}\big((\mu_r(y), \mu_s(z)\big), \tag{2}$$

де $\mu_r(y),\ \mu_s(z)$ – функції належності операндів; $f_{\&}$ – довільна Т-норма; $\mu_t(x)$ – функція належності результату операцій.

Якщо як Т-норму $f_{\&}$ обрати алгебраїчний добуток $(a \cdot b)$, то (2) можна подати у вигляді:

$$\mu_t(x) = \sup_{y,z:y*z=x} \big((\mu_r(y), \mu_s(z)\big). \tag{3}$$

Якщо розглядати операцію додавання $(* = +)$, то отримуємо:

$$\mu_t(x) = \sup_{y}\big((\mu_r(y), \mu_s(z)\big). \tag{4}$$

Вираз (4) має велику обчислювальну складність. Можна приблизно оцінити кількість кроків для обчислення $\mu_t(x)$ [5]. Припускаємо, що маємо скінченну кількість відліків для $\mu_r(y)$ та $\mu_s(x-y)$. Якщо результуюча функція належності також повинна складатись з n відліків, то для кожного значення (4) необхідно знайти найбільший з n добутків. Обчислення кожного добутку – це один елементарний крок, а пошук найбільшого з n чисел потребує $n-1$ порівнянь. Тоді загальна кількість кроків для обчислення однієї величини $\mu_t(x)$ становить $O(n)=2n-1$. Для обчислення всіх n значень функції належності $\mu_t(x)$ потрібно $O(n^2)$ обчислювальних кроків. Якщо функцію належності необхідно подати великою кількістю відліків n, то час виконання операцій над нечіткими величинами може значно зрости.

2. МОЖЛИВОСТІ ПРИСКОРЕННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД НЕЧІТКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Методи прискорення арифметичних операцій над нечіткими величинами, що подані парами, розглядались в [6]. Пропонується розвиток цих підходів.

Вираз (4) має вигляд згортки, де замість операції $(+)$ використовується оператор пошуку максимуму $(\sup)$. Для прискорення обчислення згортки треба спочатку перейти в область перетворення, де операції виконуються простіше, а потім застосовувати зворотне перетворення, використовуючи швидке перетворення Фур'є (ШПФ), що дозволяє зменшити обчислювальну складність згортки з $O(n^2)$ до $O(n\cdot\log n)$ [5].

Для того, щоби скористатись цією можливістю, треба операцію пошуку максимуму замінити на операцію додавання. Відомо [7], що для невід'ємних чисел $\mu_1,...\mu_n$:

$$\max(\mu_1,...,\mu_n)=\lim_{p\to\infty}\left(|\mu_1|^p+...+|\mu_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

а при великих p маємо:

$$\max(\mu_1,...,\mu_n)\approx\left(|\mu_1|^p+...+|\mu_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

Застосовуючи (5) до виразу (4), отримуємо:

$$\mu_t(x)\approx T(x)^{\frac{1}{p}},$$

де

$$T(x)=\sum_y(\mu_r(y)\cdot\mu_s(x-y))^p=\sum_y(\mu_r(y))^p\cdot(\mu_s(x-y))^p. \quad (6)$$

Якщо величини y задані з постійним кроком h, то сума в (6) є згорткою двох функцій:

$$R(x)=(\mu_r(x))^p \text{ та } S(x)=(\mu_s(x))^p. \quad (7)$$

Далі для обчислення $T(x)$ можна скористатись тим фактом, що перетворення Фур'є кругової (періодичної) згортки $R*S$ двох функцій еквівалентно добутку їх перетворень Фур'є [7], які можна обчислити за допомогою ШПФ.

Отже, для обчислення, наприклад, добутку двох нечітких величин необхідно виконати таку послідовність дій:

1. Отримати значення $\mu_r(x)$ та $\mu_s(x)$ для величин x з постійним кроком h.

2. Обрати значення p. Чим більше p, тим краще наближення.

3. Для кожної з n величин x отримати (7).

4. Застосувати ШПФ до функцій $R(x)$ та $S(x)$ та отримати перетворення Фур'є $\hat{R}(\omega)$ та $\hat{S}(\omega)$ для n значень ω.

5. Перемножити $\hat{R}(\omega)$ та $\hat{S}(\omega)$ поелементно:

$$\hat{T}(\omega) = \hat{R}(\omega) \cdot \hat{S}(\omega) .$$

6. Застосувати зворотне ШПФ до добутку $T(\hat{\omega})$, отримуємо $T(x)$.

7. Отримуємо нечітку величину

$$\mu_t(x) = \left(T(x)\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Оскільки (6) є лінійною (аперіодичною) згорткою (за межами носія нечіткої величини функція належності набуває нульових значень), то при використанні швидкого методу обчислення згортки послідовності $\mu_r(x)$ та $\mu_s(x)$ доповнюють нульовими значеннями, доки їх довжини не дорівнюватимуть $n_1 + n_2 - 1$.

Припустимо, що отримали два нечіткі числа:

$$R = \{0{,}2/4; 0{,}9/5; 0{,}3/6; 0/7; 0/8\},$$
$$S = \{0{,}1/5; 0.8/6; 0{,}4/7; 0/8; 0/9\}.$$

Треба знайти їх суму $T = R + S$. При $p = 8$ отримуємо:

$$T = \{0{,}02/9; 0{,}1602/10; 0{,}72{,}11; 0{,}3617/12; 0{,}12/13\}.$$

Результат аналогічного обчислення за допомогою алгоритму з використанням алгебраїчної T -норми [4] такий:

$$T = \{0{,}02/9; 0{,}16/10; 0{,}72/11; 0{,}36/12; 0{,}12/13\}.$$

Для обчислення $T = R - S$ виконується перетворення:

$$T = R - S = R + (-S).$$

Оскільки $\mu_s(x)$ відома, знаходимо $\mu_{-s}(x) = \mu_s(-x)$, а далі застосовуємо розглянутий підхід.

3. ВИСНОВКИ

Експерименти показали, що пропонований підхід має такі особливості:

– вже при $p = 4$ та $p = 8$ він дає задовільні результати за точністю;

– при малих значеннях n алгоритми з використанням алгебраїчної Т-норми (традиційні) більш швидкі, а починаючи з $n \approx 128$ – мають переваги ті, що розглядались.

1. Заде П. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М., 1976. – 168 с. 2. Klir G. Generalized Information Theory // Fuzzy Sets and Systems., 1991. – Vol. 40. – P. 127 – 142. 3. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М., 1990. – 288 с. 4. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.М. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. – М., 1989. – 304 с. 5. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М., 1979. – 535 с. 6. Kosheleva O., Cabrera S.D., Gibson G.A., Koshelev M. Fast Implementation of Fuzzy Arithmetic Operations using Fast Fourier Transform (FFT). Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 91. – № 2. – P. 269 – 277. 7. Залманзон А.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М., 1989. – 486 с. 8. Колмогоров А.М., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976.