

ПОБУДОВА ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ МОДЕЛІ ПАРАМЕТРУ ІОНОСФЕРИ VTEC

Мета. Широке застосування глобальних навігаційних супутникових систем спричинило розвиток нових методів, призначених для визначення і накопичення показника іонізації іоносфери. Оскільки за допомогою цих даних можливо суттєво підвищити точність та надійність визначення координат пункту спостережень, актуальною є створення моделі показника іонізації. **Методика.** Для побудови просторової моделі як базову систему функцій використано сферичні функції Лежандра першого роду дійсного порядку, але цілого ступеня. Величину порядку знаходили з використанням теорії Штурма–Ліувілля, оскільки вона залежить від розмірів регіону, що досліджується. Така система функцій формує дві ортогональні системи функцій на досліджуваному регіоні (сегменті сфери), проте не має рекурентних зв'язків між функціями, тому для їх знаходження необхідно використати розклад у гіпергеометричний ряд. Також для знаходження невідомих коефіцієнтів моделі необхідно використати параметр регуляризації Тихонова, оскільки матриця нормальних рівнянь не буде стійкою. Для обчислення часової моделі іоносфери коефіцієнти різних просторових моделей розкладено в ряд за степеневими поліномами. **Результати.** На основі даних значень параметру іонізації, отриманих на 19 перманентних станціях мережі ZAKPOS за допомогою програмного забезпечення Trimble Pivot Platform, побудована просторово-часова модель цього параметра з використанням сферичних функцій Лежандра до 3-го порядку, а також з використанням степеневих поліномів до 3-го порядку. Стандартне відхилення між вимірним та модельним значеннями параметра іоносфери VTEC не перевищує 1 TECU. **Наукова новизна і практична значущість.** Розроблено алгоритм для побудови просторово-часової моделі іоносфери. Отримано модель іоносфери високої розрізняювальної здатності, яку можна використовувати для розв'язання геодезичних задач щодо забезпечення необхідної точності у визначенні координат пункту, а також для дослідження і прогнозування космічної погоди.

Ключові слова: параметри іоносфери, TEC, VTEC, просторово-часова модель, сферичні функції Лежандра, показник іонізації, система функцій.

Вступ

На сьогоднішній день моніторинг земної атмосфери перейшов на новий методичний і технологічний рівень. Це спричинено широким застосуванням глобальних навігаційних супутникових систем (GNSS), а також їх модернізацією та розвитком нових методів, що призначені для визначення параметрів іоносфери Землі. Під час роботи активних референсних GNSS-станцій накопичуються результати визначення показника іонізації TEC (Total Electron Content). Ці дані не тільки відображають стан іоносфери у момент проведення спостережень, а також є суттєвим інструментом підвищення точності та надійності визначення координат місця проведення спостережень [Янків-Вітковська Л.М., 2013].

Для аналізу і використання даних показника іонізації TEC необхідно створити регіональну модель даного параметру іоносфери, яка б його відображала з необхідною точністю [Янків-Вітковська Л.М., 2014; Yankiv-Vitkovska L.M. et al., 2015]. На сьогоднішній день побудовано багато регіональних моделей іоносфери [Abdelazeem M. et al., 2017; Gao Y. et al., 2002; Schaer S., 1999]. Оскільки всі дані показника іонізації TEC зредуковані на сферу, для побудови такої моделі використовують сферичні функції Лежандра, на власні числа яких необхідно накласти граничні умови відповідно до форми частини сфери, на якій вони розміщені [Джуман Б.Б., 2013].

Мета

Метою даної роботи є побудова високоточної регіональної просторово-часової моделі середньоінтегрального значення концентрації електронів у іоносфері для покращення точності геодезичних вимірів через введення в них відповідної поправки. Для обчислення такої моделі вибрано як базову систему функцій сферичні функції Лежандра дійсного порядку, проте цілого ступеня [Hobson E.W., 1931], які формують неортогональну систему функцій на сегменті сфери.

Вхідні дані

В результаті опрацювання даних геодезичних вимірювань, а саме псевдовідстаней від перманентних станцій до супутників, можна знаходити параметр іоносфери TEC. Це дає змогу не тільки покращити точність геодезичних вимірів через введення в них відповідної поправки, але й досліджувати саму іоносферу [Янків-Вітковська Л.М., 2013; Yankiv-Vitkovska L.M. et al., 2015]. Для дослідження і оперування значеннями параметрів іоносфери в даній роботі пропонується побудова моделі за відомими вертикальними значеннями параметра іоносфери – VTEC. Такі значення отримано після опрацювання геодезичних вимірів з мережі перманентних станцій ZAKPOS за допомогою програмного забезпечення Trimble Pivot Platform на 19 станціях [Yankiv-Vitkovska L.M. et al., 2016] на чотири епохи: 0, 6, 12 та 18 годин 16 січня 2017 року. В таблиці 1 подано назву і координати даних станцій в системі IGB08.

Таблиця 1

Назва і координати перманентних станцій

| Назва | X, м | Y, м | Z, м |
|-------|-------------|-------------|-------------|
| SULP | 3765296,774 | 1677559,389 | 4851297,523 |
| JRSL | 3789362,976 | 1582622,631 | 4864201,687 |
| MIZ1 | 3881155,006 | 1687860,780 | 4756281,930 |
| RAH1 | 3895973,878 | 1751354,220 | 4721320,921 |
| WLDW | 3643581,000 | 1588599,400 | 4971661,200 |
| HMEL | 3706268,952 | 1885665,826 | 4820450,263 |
| CRNI | 3824750,141 | 1860009,032 | 4737620,488 |
| MUKA | 3909873,985 | 1637331,318 | 4750029,398 |
| SKON | 3673288,267 | 1884882,203 | 4845675,670 |
| SARN | 3569794,434 | 1788894,752 | 4957203,650 |
| CHTK | 3773817,572 | 1823744,106 | 4791846,472 |
| FRAN | 3815148,231 | 1755911,792 | 4784539,637 |
| VRHV | 3871108,919 | 1787573,460 | 4728428,526 |
| STRY | 3812850,798 | 1687385,965 | 4810814,650 |
| SHPT | 3645297,429 | 1863387,523 | 4874829,701 |
| DUNA | 3748012,720 | 1898753,736 | 4783151,029 |
| RIVN | 3635935,526 | 1794403,437 | 4907317,994 |
| HUS1 | 3912065,379 | 1686037,865 | 4731343,980 |
| TER2 | 3737869,749 | 1791704,220 | 4831815,981 |

Схему розміщення станцій подано на рисунку 1.

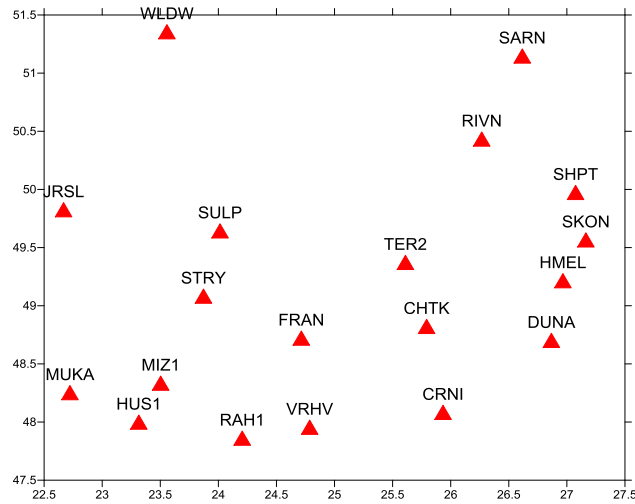


Рис. 1. Схема розміщення перманентних станцій

Методика

Сферичні функції Лежандра з дійсними власними числами

Нами було отримано добовий розв'язок значень VTEC на вищенаведених станціях. Для обчислення моделі параметру іоносфери VTEC вирішено використати метод spherical cap harmonic analysis [Haines G.V., 1985; Джуман Б.Б., 2014]. Він передбачає знаходження власних чисел n та m сферичних функцій Лежандра для сегменту сфери ($\theta \leq \theta_0, r = 1$) за допомогою задачі Штурма-Ліувіля. Як відомо, в сферичній системі координат оператор Лапласа має наступний вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \quad (1)$$

де r, θ, λ – сферичні координати. Згідно теорії Штурма-Ліувіля будь-яке диференціальне рівняння другого порядку можна привести до вигляду [Haines G.V., 1988]

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = w(x)y, \quad (2)$$

де y є функцією змінної x . У (2) функції $p(x) > 0$, $q(x)$ і $w(x) > 0$ вважаються відомими. У найпростіших випадках всі коефіцієнти є неперервними на скінченному закритому інтервалі $[a, b]$, і p має неперервні похідні. Функція y називається розв'язком рівняння (2), якщо вона диференційована на відрізку $[a, b]$ і задовільняє рівняння (2) в кожній точці $[a, b]$. Невідома функція y зазвичай задовільняє деяким граничним умовам в точках a та b . Функцію $w(x)$ називають ваговою функцією або функцією густини.

Таким чином, знаходження власних чисел ν , для яких існує нетривіальний розв'язок рівняння (2), що задовільняє граничним умовам, є частиною проблеми Штурма-Ліувіля. Проблема Штурма-Ліувіля називається регулярною, якщо $p(x)$, $w(x) > 0$, а також $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ і $w(x)$ є неперервними функціями на скінченному інтервалі $[a, b]$ і мають розділені граничні умови [Kelvin L., 1896]

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0), \quad (3)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0). \quad (4)$$

Легко бачити, що диференціальне рівняння сферичних функцій Лежандра відповідно до форми (2) набуває вигляду

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP_{mn}(\mu)}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P_{mn}(\mu) = 0, \quad (5)$$

де $\mu = \cos \theta$.

Граничні умови рівнянь (1) по довготі для всієї сфери мають вигляд

$$V_{nm}(r, \theta, \lambda) = V_{nm}(r, \theta, \lambda + 2\pi); \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_{nm}(r, \theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial V_{nm}(r, \theta, \lambda + 2\pi)}{\partial \lambda}. \quad (7)$$

Умови (6) і (7) обмежують значення m до реального і цілого.

Проте при $\theta_0 \neq \pi$ функція V в θ_0 , а також її похідна по θ мусять бути довільними [Schmidt M., 2007]:

$$V(r, \theta_0, \lambda) = f_1(r, \lambda); \quad (8)$$

$$\frac{\partial V(r, \theta_0, \lambda)}{\partial \theta} = f_2(r, \lambda). \quad (9)$$

Умова (8) виконується тільки в тому випадку, якщо власне число $n_k(m)$ (k – індекс) приймає таке значення, що похідна від V по зеніту рівна нулю на границі сегменту

$$\frac{dP_{n_k(m)m}(\cos \theta_0)}{d\theta} = 0. \quad (10)$$

Умова (9) виконується тоді, коли власне число n_k приймає таке значення, що функція V рівна нулю на границі сегменту

$$P_{n_k(m)m}(\cos \theta_0) = 0. \quad (11)$$

Такі сферичні функції Лежандра дійсного степеня і цілого порядку формують дві ортогональні системи функцій на сегменті сфери.

Моделювання параметру іоносфери

Для використання вищеописаного методу моделювання спершу координати станцій було переобчислено в сферичну систему координат і трансформовано на сегмент сфери. Після такого трансформування встановлено, що оптимальний розмір сферичного сегменту $\theta_0 = 2.5^\circ$. Для знаходження власних чисел $n_k(m)$ необхідно знайти нулі функцій [Marchenko A., 2015]

$$\tilde{F}(n_k, m, \mu_0) = 0; \quad (12)$$

$$n_k \mu_0 \tilde{F}(n_k, m, \mu_0) - (n_k - m) \tilde{F}(n_k - 1, m, \mu_0) = 0; \quad (13)$$

де $\mu_0 = \cos 2.5^\circ$, а \tilde{F} – це умовне позначення гіпергеометричного ряду, а саме

$$\tilde{F}(n, m, \mu) = F(m - n, m + n + 1, m + 1, \frac{1 - \mu}{2}), \quad (14)$$

де $\mu = \cos \theta$.

Результати

Для порівняння вищеописаного алгоритму з іншими методами спершу було побудовано просторову модель іоносфери з використанням степеневих поліномів до 1-го порядку на епоху 18 година 16 січня 2017 року. В такому випадку рівняння моделі набуло наступного вигляду

$$VTEC_m = aB + bL + c, \quad (15)$$

де a, b, c – невідомі коефіцієнти. Знайшовши коефіцієнти a, b, c з використанням способу найменших квадратів, була побудована відповідно карта модельних значень показника іоносфери VTEC. Дана

карта зображена на рисунку 2. Також були знайдені різниці між вхідними значеннями VTEC та модельними значеннями. Такі різниці зображено на рисунку 3.

Середня квадратична похибка такої моделі сягає 2.5 TECu . Отримана точність абсолютно не достатня для розв'язання поставлених в даній роботі задач. Крім того з функціонального аналізу добре відомо, що степеневі поліноми є хоч і замкнутою, проте не є базисною системою функцій. Тому очевидно потрібно використати інший алгоритм, який би нам дозволив отримати модель

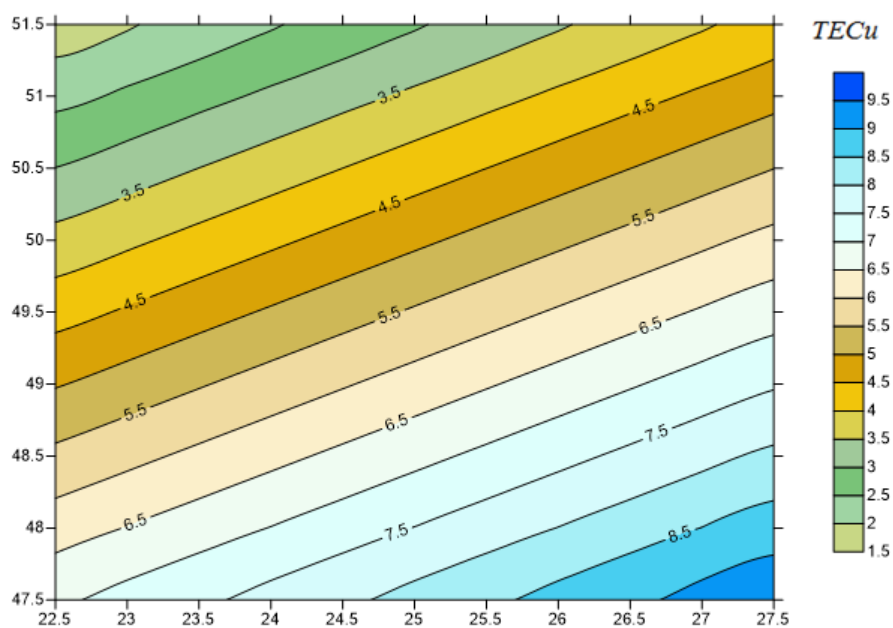


Рис. 2 Карта модельних значень показника іоносфери VTEC, побудована з використанням степеневих функцій

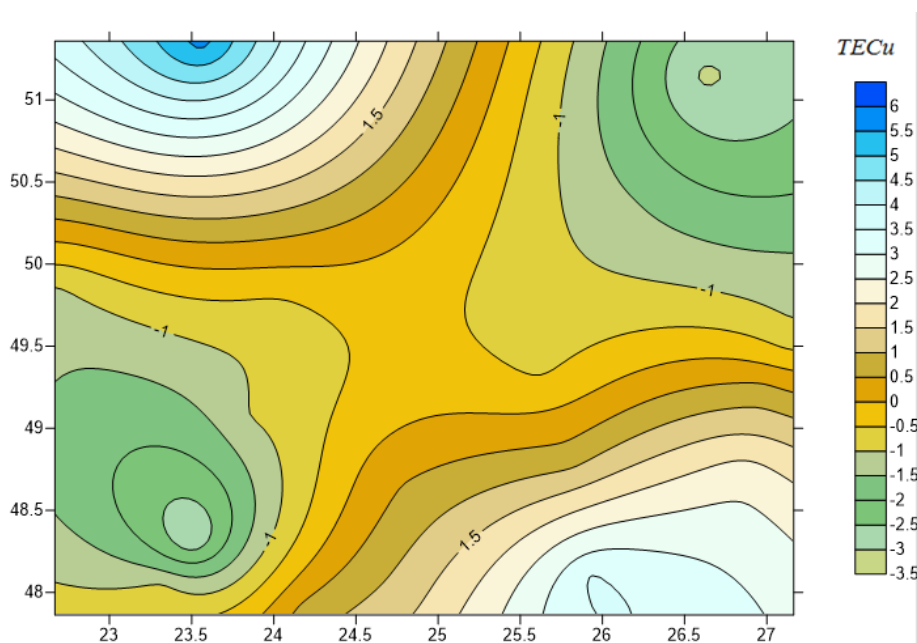


Рис. 3 Різниці між вхідними значеннями VTEC та модельними значеннями

з середньою квадратичною похибкою менше 1 TECu . Використаємо для цього методику, побудовану на використанні сферичних функцій Лежандра з дійсними власними числами.

Оскільки ми маємо виміри на 19 станціях, доцільно побудувати модель до 3 степеня/порядку. Тож було знайдено нулі функцій (12) та (13) до 3-го порядку (таблиця 2).

Власні числа $n_k(m)$ для сегменту сфери $\theta_0 = 2.5^\circ$

| k/m | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|----------|----------|----------|---------|
| 0 | 0.0000 | | | |
| 1 | 54.6138 | 41.7054 | | |
| 2 | 87.3177 | 87.3177 | 69.5111 | |
| 3 | 126.0105 | 121.6901 | 117.2051 | 95.8028 |

Рівняння моделі матиме вигляд

$$VTEC(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^3 \sum_{m=0}^k P_{n_k(m)m}(\cos \theta) \cdot (a_{km} \cos m\lambda + b_{km} \sin m\lambda), \quad (16)$$

де a_{km} і b_{km} – невідомі коефіцієнти, а $P_{n_k m}$ можна знайти з гіпергеометричного ряду

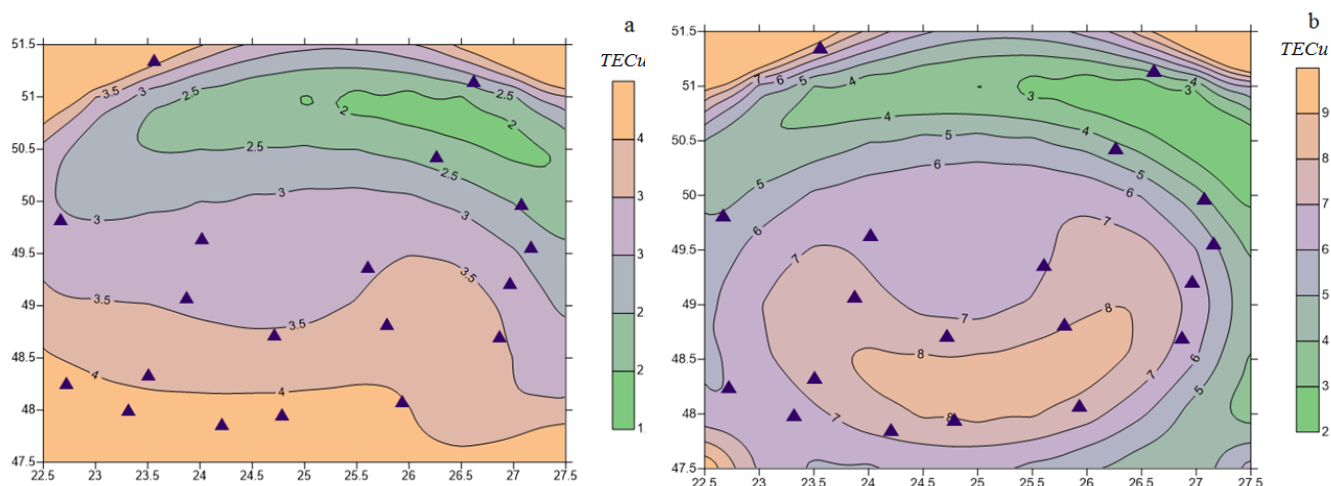
$$P_{n_k m}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \mu}{2}\right). \quad (17)$$

Оскільки кількість вимірів більша за кількість невідомих коефіцієнтів, розв'яжемо рівняння (17) за допомогою методу найменших квадратів, ввівши при цьому параметр регуляризації Тіхонова [Тихонов А.Н., 1979]

$$V^T V + \alpha X^T X \rightarrow \min, \quad (18)$$

де вектор V – вектор поправок, вектор X – вектор невідомих коефіцієнтів, α – параметр регуляризації Тіхонова. Введення параметру регуляризації необхідно не тільки для стабілізації розв'язку, а й для відсіювання випадкових похибок вимірювань.

За допомогою вищенаведеного алгоритму було побудовано чотири моделі значень параметру іоносфери VTEC на чотири епохи відповідно. Дані моделі зображено на рисунку 4.



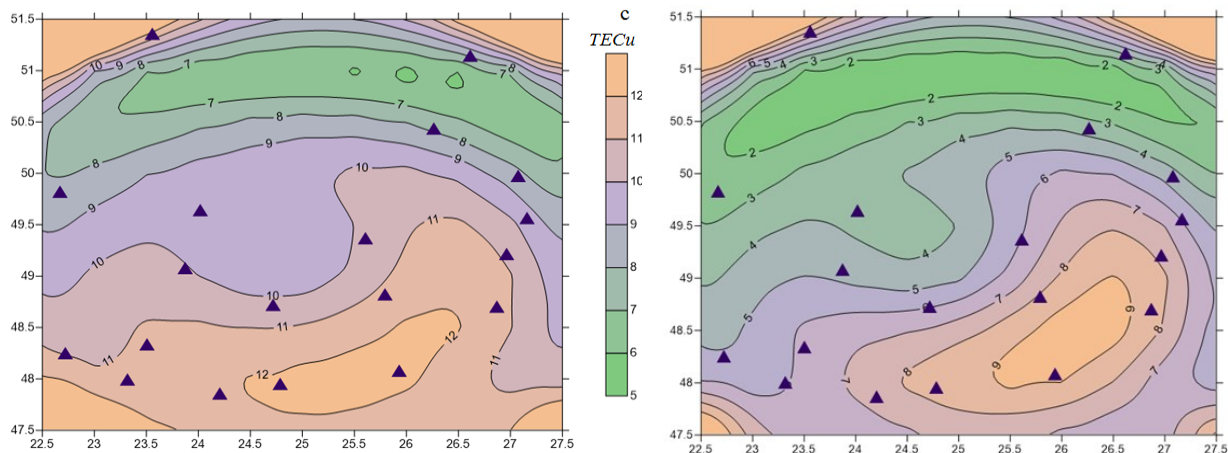


Рис. 4. Модель значень параметру іоносфери VTEC на
 а – 0 годину, б – 6 годину, с – 12 годину, д – 18 годину

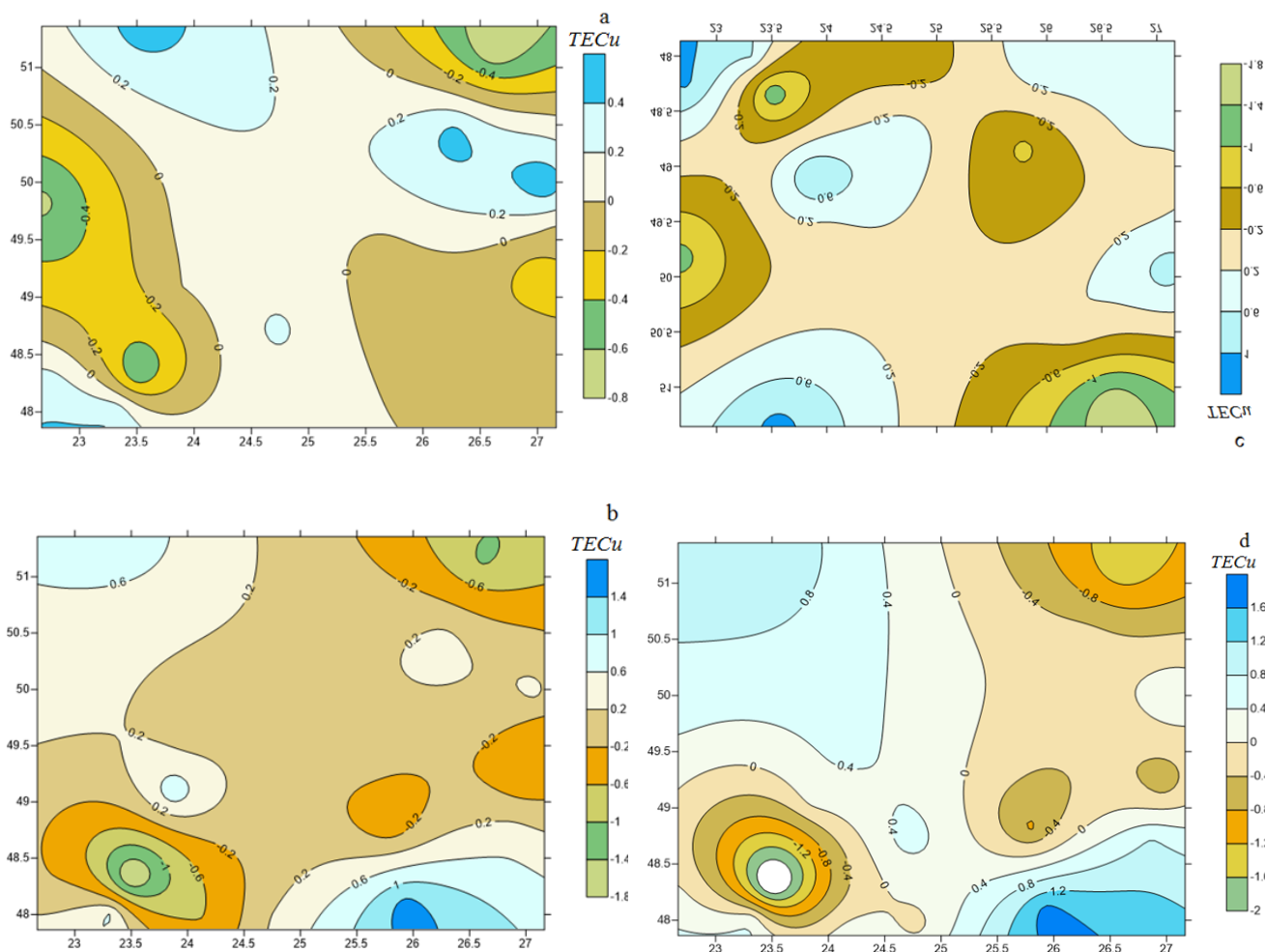


Рис. 5. Різниці між виміряними та модельними значеннями VTEC на
 а – 0 годину, б – 6 годину, с – 12 годину, д – 18 годину

Обчислено стандартне відхилення вимірянних та модельних значень параметру VTEC, а також їх різниць, що показано в таблиці 3.

Стандартне відхилення вимірних та модельних значень параметру VTEC,
а також їх різниць

| Епоха, год. | Ст. відхилення вимірних значень, <i>TECU</i> | Ст. відхилення модельних значень, <i>TECU</i> | Ст. відхилення різниць, <i>TECU</i> |
|----------------|---|--|--|
| 0 | 0,785 | 0,624 | 0,385 |
| 6 | 1,688 | 1,388 | 0,778 |
| 12 | 1,838 | 1,466 | 0,840 |
| 18 | 2,376 | 1,996 | 0,988 |

Наукова новизна та практична значущість

В даній роботі запропоновано для побудови просторово-часової моделі параметра іоносфери VTEC використовувати комбінацію сферичних функцій Лежандра дійсного порядку та степеневих поліномів. Вищезгадану методику можна рекомендувати для розроблення технології визначення просторово-часового розподілу TEC, нестабільного стану іоносфери та побудови динамічної карти змін її параметрів в реальному часі над територією мережі активних референцних станцій. Це дало змогу отримати модель іоносфери високої розрізняювальної здатності, яку можна використовувати для дослідження і прогнозування космічної погоди, а також для геодезичних задач щодо забезпечення необхідної точності при визначенні координат пункту, в тому числі для одночастотних приймачів, використання яких в Україні на сьогоднішній день сягає більше 50 %. Відповідно в подальшому планується розробити алгоритм для знаходження поправки в координати пункту, що визначається, з використанням таких моделей іоносфери.

Висновки

Аналізуючи результати досліджень, можна зробити такі висновки:

- запропоновано різні системи функцій для просторово-часового моделювання регіонального поля показника іоносфери VTEC;
- розроблено алгоритм для побудови моделі показника іоносфери VTEC. Для просторового моделювання використовуються сферичні функції Лежандра дійсного порядку, але цілого ступеня; в свою чергу для часового моделювання використовуються степеневі поліноми;
- побудовано просторово-часову модель параметру іоносфери VTEC, а також знайдено стандартне відхилення між вимірним та модельним значеннями, яке не перевищує 1 *TECU*.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Джуман Б.Б. Апроксимація аномалій сили ваги методом ASHA на територію Арктики / Б.Б. Джуман – Геодезія, картографія та аерофотознімання, 80, 2014. – 62-68 сс.
- Джуман Б.Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля / Б.Б. Джуман – Геодинаміка - №1(14), 2013. – 29-33 сс.
- Тихонов А.Н. Методи решения некорректных задач: 2-е издание / Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1979.
- Янків-Вітковська Л.М. Методика визначення параметрів іоносфери у мережі супутникових станцій західної України. / Л.М. Янків-Вітковська – Космічна наука і технологія – 2013.—Т.19, № 6. С. 47-52.
- Янків-Вітковська Л.М. Методика усереднення даних для побудови регіональної моделі іоносфери. // Геодезія, картографія і аерофотознімання. Вип. 79, 2014. Львів – 2014, С. 35-41.
- Abdelazeem M. On the development of a regional ionospheric correction model for low-cost single frequency GNSS users / M. Abdelazeem, R. Celik, A. El-Rabbany – The 10th International conference on mobile mapping technology, Cairo, Egypt, 2017.
- Gao Y. Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data / Y. Gao, Z. Liu – Journal of Global Positioning Systems – 1, 2002. – 18-24 pp.
- Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields / G.V. Haines – Comput. Geosci. – 14, 1988. – 413-447 pp.
- Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis / G.V. Haines – J. Geophys. Res. – 90, 1985. – 2583-2591 pp.

- Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics / E.W. Hobson – New York: Cambridge Univ. Press, 1931. – 476 p.
- Kelvin L. Treatise on natural philosophy / L. Kelvin, P. Tait – New York: Cambridge Univ. Press, 1896. – 852 pp.
- Liu J. Spherical cap harmonic analysis of the Arctic ionospheric TEC for one solar cycle / J. Liu, R. Chen, J. An, Z. Wang and J. Hyypä – Journal of Geophysical Research, vol. 119, 2014. – 601-619 pp.
- Marchenko A. Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project / A. Marchenko, B. Dzhuman – Geodynamics, Vol. 1(18), 2015. – 7-17 pp.
- Ohashi M. Studies on Spherical Cap Harmonic Analysis for Japanese Regional Ionospheric Delays and its Prediction / M. Ohashi, Y. Sato, A. Yamada, Y. Kubo and S. Sugimoto – Proceedings of the 47th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications Honolulu, Dec. 5-8, 2015
- Schaer S. Mapping and predicting the earth's ionosphere using the global positioning system / S. Schaer – PhD thesis, Astronomical Institute, University of Berne, Switzerland, 1999, 205p.
- Schmidt M. Regional gravity modeling in terms of spherical base functions / M. Schmidt, M. Fengler, T. Mayer-Gurr, A. Eicker, J. Kusche, L. Sanchez, S.C. Han – J. Geod. V. 81, 2007. – 17-38 pp.
- Yankiv-Vitkovska L.M., Savchuk S., Pauchok V. // The determination and procedure transformation of the ionosphere parameters with GNSS-observations// Геодезія, картографія і аерофотознімання. - 2015. - Вип. 82. - С. 5-12.
- Yankiv-Vitkovska L.M., Savchuk S.H., Pauchok V.K., Matviichuk Ya.M. and Bodnar D.I. Recovery of the Spatial State of the Ionosphere Using Regular Definitions of the TEC Identifier at the Network of Continuously Operating GNSS Stations of Ukraine // Journal of Geodesy and Geomatics Engineering, (2016) 1-9. 3.37-48.

Надійшла 11.05.2017