

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИКИ МЕРЕЖ ГРОМАДСЬКОГО ТРАНСПОРТУ НАЙБІЛЬШИХ МІСТ ЗАХІДНОГО РЕГІОНУ УКРАЇНИ

© Пасічник В.В., Іванушак Н.М., 2011

Наведено систематичний огляд статистичних властивостей мереж ГТ чотирьох міст західного регіону України: Львова, Тернополя, Івано-Франківська та Чернівців, розглянута топологія, локальні та глобальні характеристики цих мереж. Продемонстровано, що розподіл ступенів вузлів підпорядковується степеневому закону  $p(k) \sim k^{-\beta}$  в L-просторі та експоненційному  $p(k) \sim \exp(-ak)$  у P-просторі.

Ключові слова: мережі громадського транспорту, розподіл ступенів, коефіцієнт розгалуження, середня міжвузлова відстань.

This work deals with a systematical review of the statistical properties of public transport networks of four cities of Ukraine: Lviv, Ternopil, Ivano-Frankivsk and Chernivtsi, there are considered topology, local and global characteristics of these networks. There was demonstrated that the degree distribution of nodes subjects to power law in L-space and exponential law in P-space.

Key words: public transport networks, degree distribution, branching factor, average internode distance.

### Вступ. Постановка проблеми

Мережі громадського транспорту (ГТ) належать до класу штучних мереж, які в результаті свого розвитку перетворюються у самоорганізовані складні системи. Загальний інтерес до штучних та природних мереж привів до їх ретельного аналізу за допомогою емпіричних, симуляційних і теоретичних інструментів. Відкриваються широкі можливості для вивчення їх глобальної топології, структури, ієрархічної організації, локальних властивостей. Зазвичай ці мережі не є статичними, а такими, що розвиваються, тому для розуміння їхньої структури важливо знати принцип їх еволюції.

Мережі громадського транспорту, з якими ми найчастіше стикаємося, докладно досліджені та проаналізовані порівняно недавно [1–3]. Еволюція мереж громадського транспорту міста відбувається під впливом численних факторів: географічних, історичних та соціальних. Тим не менше, є достатньо доказів того, що мережі ГТ різних міст мають загальні статистичні властивості, які, можливо, виникають через їхнє функціональне призначення. Вони є прикладом транспортних мереж, для яких характерні загальні ознаки цих систем: динаміка росту, оптимізація, вкладення у двовимірний простір. Однак, про топологічні властивості мереж ГТ відомо значно менше ніж, скажімо, про властивості мереж аеропортів, які також належать до транспортних мереж [4–10].

Кожен окремих тип громадського транспорту (мережа автобусів, тролейбусів, трамваїв) не є замкнутою системою, а є лише підграфом ширшої системи – мережі ГТ міста. Попередні дослідження часто стосувалися аналізу конкретних підмереж громадського транспорту [12,13,21–26]. Прикладом можуть слугувати дослідження мереж метро у Бостоні [12,13,21,22] та Відні [22] та мереж автобусних маршрутів міст у Польщі [23], Китаї [3,25,26]. Однак оскільки автобусні, трамвайні та метро-мережі не є замкнутими системами, включення додаткових підмереж істотно впливає на загальні властивості мережі, як це було показано на прикладі метро та автобусних мереж міста Бостона [12,13].

Тому для розуміння та опису властивостей мережі, загалом, необхідно розглядати мережу ГТ повністю, не поділяючи її на окремі частини. І справді, під час переходу від аналізу окремої мережі

трамвайних маршрутів до мережі “трамвай+автобус” її властивості значно змінюються. У [1] проаналізовані та досліджені транспортні мережі Берліна, Парижа та Дюссельдорфа, в [2] – мережі ГТ найбільших міст Польщі, а в [3] – великих міст світу.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

#### Топологія мереж

Для аналізу різних властивостей мереж ГТ потрібно почати з визначення належної топології мережі. Використовують різні способи зображення графів мережі. Зрозуміло, що відстані для подорожуючих не такі самі, як фізичні відстані, якщо необхідно потрапити від точки міста А в точку В з використанням наявного громадського транспорту. Іноді так трапляється, що фізична відстань між точками А і В не дуже велика, але подорож між цими точками в місті, на жаль, може займати багато часу, тому що або прямий автобус робить багато петель на своєму шляху, або ми повинні змінити автобус або трамвай кілька разів. Звідси випливає, що можна ввести принаймні два різні зображення мережі міського транспорту, де мережа представляється безліччю вузлів (вершин) і з'єднань (ребер) між ними.

Перше зображення – L-простір, що складається з вузлів, які є автобусними, тролейбусними або трамвайними зупинками у наборі маршрутів, кожен з яких обслуговує певний набір станцій, у той час як зв'язок між двома вузлами існує за умови, що вони є послідовними зупинками на цих лініях. Відстань у такому просторі вимірюється загальною кількістю зупинок, пройдених по найкоротшому шляху між двома вузлами. Проте відстань, виміряна таким способом не відображає необхідність пересадки під час поїздки. Цей фактор враховується в другому означенні сусідства між станціями, яке приводить до іншого зображення – до Р-простору [11]. Вузли в такому просторі є такими самими як і в попередньому випадку, але тепер ребро, що з'єднує два вузли, означає, що існує зв'язок на одному автобусному, тролейбусному або трамвайному шляху між ними. Звідси випливає, що у Р-просторі відстані є номерами пересадок (плюс один), які необхідно здійснити під час поїздки. Очевидно, що відстані, визначені у Р-просторі, набагато менші, ніж у L-просторі, і немає універсального співвідношення між ними. У L-просторі дві станції вважаються сусідами, якщо вони розміщені безпосередньо поруч на одному і тому самому маршруті [12,13], у Р-просторі дві станції означені як сусіди, якщо вони належать одному і тому самому маршруту [14]. Обидва простори наведені на рис. 1.

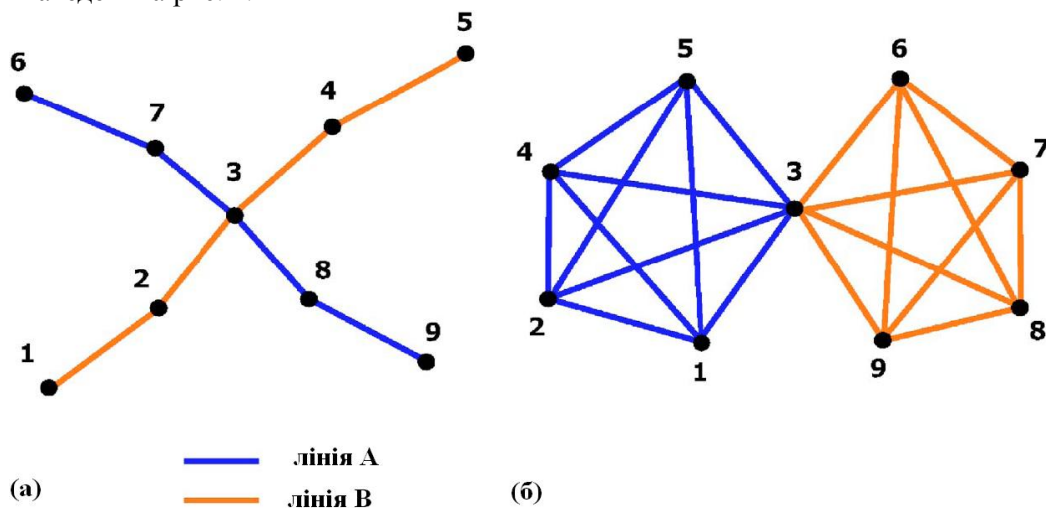


Рис. 1. Перетворення L-простору (а) у Р-простір (б) для двох ліній А та В громадського транспорту

Зазначимо, що стандартні характеристики мережі (такі, як середній ступінь вузла  $\langle k \rangle$ , середня довжина найкоротшого шляху  $\langle l \rangle$  тощо), зображені в різних просторах, стають специфічними характеристиками, важливими для оцінювання мереж ГТ міста. Так, наприклад,

середня довжина найкоротшого шляху  $\langle l_L \rangle$  – це мінімальна кількість зупинок, які треба в середньому проїхати між двома довільними станціями. Водночас у Р-просторі величина  $\langle l_P \rangle - 1$  вказує, яку мінімальну кількість разів у середньому необхідно поміняти маршрут у разі мандрівки між будь-якими двома станціями. Ще одним прикладом є ступінь вузла  $k$ :  $k_L$  – це кількість сусідніх зупинок;  $k_P$  – це кількість зупинок, до яких можна доїхати, не змінюючи маршруту.

Потрібно зазначити, що у L- і Р- просторах не враховується евклідова відстань між вузлами. Подібний підхід використовується для опису декількох інших типів мережевих систем: Інтернету, електричних, залізничних мереж та мереж аеропортів.

### Локальні та глобальні характеристики мереж

Не всі вершини мережі мають однакову кількість ребер. Головною характеристикою мережі, яка задає розподіл ребер вершини, тобто ступінь вершини, є розподіл ступенів вузлів  $P(k)$ , що визначає імовірність того, що вузол  $i$  має ступінь  $k_i=k$ , інакше кажучи, випадково вибрана вершина матиме рівно  $k$  ребер. Мережі, які характеризуються різними  $P(k)$ , демонструють дуже різноманітну поведінку. До найчастіше спостережуваних прикладів розподілу ступенів вузлів належать:

$$\text{розподіл Пуассона } P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (1)$$

$$\text{експоненційний розподіл } P(k) \sim e^{-k/\langle k \rangle}, \quad (2)$$

$$\text{степеневий розподіл } P(k) \sim 1/k^g, \quad k \neq 0, \quad g > 0. \quad (3)$$

Попри те, що всі вищенаведені функції  $P(k)$  спадають при великих  $k$ , принципова відмінність між розподілами (1), (2), з одного боку, і розподілом (3), з іншого, полягає в тому, що і (1), і (2) характеризуються певним масштабом. Це положення максимуму для розподілу Пуассона чи характерна довжина спадання для експоненційного розподілу. Степеневий розподіл (3) не характеризується типовим масштабом. Мережі зі степеневим розподілом ступенів (3) називають *безмасштабними* (scale-free). Саме безмасштабні мережі часто спостерігаються у складних реально існуючих системах, зокрема в мережах громадського транспорту у L- просторі.

Інша принципова відмінність цих розподілів полягає в тому, що всі моменти  $P(k)$  існують для розподілів (1), (2), але не для безмасштабного розподілу (3). Справді, для  $P(k)$  (3) моменти розбіжні

$$M_n = \sum_{k=0}^{\infty} k^n P(k) \quad \text{з } m \geq g - 1.$$

У разі степеневого розподілу можливе існування вузлів з дуже високим ступенем (габів, hubs або концентраторів), які практично відсутні в мережах із пуассоновим чи експоненційним розподілами (1), (2). Саме наявність концентраторів пояснює поведінку моментів і спричиняє багато різних специфічних властивостей безмасштабних мереж.

Розмір околу вузла, який визначається його ступенем, вказує на його важливість, наприклад, в якості концентратора в мережі. У великих мережах, створених випадковим приєднанням вузлів, концентратори є рідкісними, у той час як в реальних мережах вони часто зустрічаються з набагато вищою ймовірністю. Формально це визначається поведінкою хвоста розподілу ступенів вузлів. Позначивши через  $p(k)$  нормований розподіл ступенів вузлів, середній ступінь розподілу  $k$  визначається так:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{k_{\max}} p(k) \cdot k = \frac{2M}{N}.$$

Тут  $M$  – кількість вузлів,  $N$  – кількість ребер мережі,  $k_{\max}$  – максимальний ступінь вузла. Для кінцевого розміру випадкового графа Ердоша-Рені розподіл ступенів вузлів  $p(k)$  є біноміальним, який за фіксованого  $\langle k \rangle$  в нескінченній границі стає розподілом Пуассона.

Вища організація мереж реального світу зазвичай призводить до уповільнення загасання розподілу. Типові класи мереж мають або експонентні, або степеневі хвости розподілу. Експоненційно загасаючі розподіли у разі великих ступенів  $k$  характеризуються розподілом

$$p(k) \sim \exp(-k/\hat{k}),$$

де масштаб  $\hat{k}$  має порядок середнього ступеня вузла. Безмасштабні розподіли ступенів, які спадають за степеневим законом, мають хвіст такої форми:

$$p(k) \sim 1/k^g.$$

Показник  $g$  у подальшому класифікує мережі. Якщо  $g < 2$ , розподіл не має кінцевого середнього  $\langle k \rangle$  при нескінченній границі мережі. Якщо  $g < 3$ , тоді не існує кінцевого другого моменту, і мережа не має перколяційного порогу по відношенню до розростання її вузлів. Її компонент зв'язаності залишається стійким до випадкових роз'єднань будь-якої кількості вузлів. Коли  $g < 4$ , перколяція та інші властивості, як очікується, будуть аналогічні експоненційно спадаючій мережі.

Обидва степеневий і експоненціальний закони спадання розподілу ступенів дають змогу змодельовати нерівноважний процес зростання мережі, згідно з яким при послідовних часових кроках вузли та ребра додаються до наявної мережі. Якщо вузли довільно приєднуються до будь-яких з наявних вузлів, то результатом буде спадаючий хвіст експоненційної форми, однак, якщо ймовірність приєднання до наявних вузлів лінійно залежить від ступеня вузла, то можна показати, що хвіст результуючого розподілу ступенів має степеневий характер. Останній механізм, що пояснює часту появу степеневих законів, також називається переважним приєднанням або принципом “багаті стають ще багатшими”. Очевидно, що мережі громадського транспорту є зростаючими, їх еволюція відбувається за аналогічними принципами та механізмами.

Зазначимо, що для Р-простору сукупний розподіл ступенів визначається згідно з формулою

$$P(k) = \sum_{q=k}^{k_{\max}} p(q).$$

“Лінійний розмір” мережі характеризується поняттями середнього  $\langle l \rangle$  і максимального  $l_{\max}$  найкоротших шляхів. Відстань між вузлами визначається як кількість кроків, які необхідно здійснити, щоб добратися по наявних ребрах від одного вузла до іншого. Природно, вузли можуть бути з'єднані прямо або опосередковано. Шляхом між вузлами  $l_{ij}$  назовемо найкоротшу відстань між ними.

Для зв'язаної мережі з  $N$  вузлів середній найкоротший шлях означається як:

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} l_{ij},$$

$l_{ij}$  – довжина найкоротшого шляху між вузлами  $i$  та  $j$ ,  $l_{\max}$  – найбільше значення з усіх  $l_{ij}$ , заданих для цієї мережі.

Середня довжина найкоротшого шляху дає уявлення про мережу, загалом, і є її глобальною характеристикою.

Відзначимо, що  $l_{ij}$  визначається коректно, тільки якщо вузли  $i$  та  $j$  належать до одного компоненту зв'язаності мережі. Надалі вважатимемо, що вузли належать до найбільшого (так

званого гігантського) компоненту зв'язаності, GCC. Позначивши розподіл довжини шляху для GCC як  $P(l)$ , середній найкоротший шлях визначається:

$$\langle l \rangle = \sum_{l=1}^{l_{\max}} P(l) \cdot l,$$

де  $l_{\max}$  – максимальна довжина найкоротшого шляху, знайдена в GCC. У загальному розподіл довжини найкоротшого шляху визначається в L- та P-просторах і обчислюється як асиметричний унімодальний розподіл:

$$P(l) = A \cdot l \exp(-B \cdot l^2 + C \cdot l),$$

де A, B, C – певні параметри.

Особливий практичний інтерес становить середня довжина найкоротшого шляху між вузлами, заданими розподілами  $k$  та  $q$  -  $l(k, q)$ . Як було показано в [2], це співвідношення можна апроксимувати як

$$l(k, q) = A - B \log(kq). \quad (4)$$

Для випадкових мереж коефіцієнти A і B можна обчислити доволі точно. Доволі добре узгодження з рівнянням (4) було знайдено для більшості графів L-простору польських мереж громадського транспорту проаналізованих в [2]. У межах нашого дослідження, яке включає в себе мережі громадського транспорту меншого розміру, ми спостерігаємо аналогічні вирівнювання для всіх міст. Запропонована логарифмічна залежність (4) має місце також і для графів L-простору великих міст, однак, з набагато вираженішим розкидом даних при великих значеннях добутку  $k \cdot q$ . Потрібно зазначити, що через розкид даних, логарифмічна залежність часто відрізняється від степеневого закону з малим показником.

### Виклад основного матеріалу

#### Досліджувані системи ГТ найбільших міст західного регіону України

В роботі зібрані дані та на основі багатьох фактичних матеріалів проаналізовані мережі ГТ чотирьох найбільших міст західного регіону України: Львова, Івано-Франківська, Тернополя та Чернівців. Ми не стали штучно розділяти централізовані мережі досліджуваних міст на підмережі з різними видами транспорту такими, як автобуси, тролейбуси чи трамваї або мережі в “міських” та “приміських” частинах, а розглядали їх як єдине ціле.

#### Характеристики мереж ГТ міст України

Місто	N	R	$\langle k \rangle$	$\gamma$	$\Delta\gamma$	$\alpha$	$\Delta\alpha$
Львів	209	110	3,212	2.33	0.23	0.0322	0.0006
Івано-Франківськ	89	60	4,292	1.67	0.20	0.0461	0.0009
Тернопіль	84	45	3,606	2.1	0.30	0.0253	0.0004
Чернівці	118	53	5,402	2.05	0.17	0.0414	0.0006

У таблиці N – кількість зупинок на різних маршрутах, R – кількість маршрутів,  $\gamma$  і  $\alpha$  – показники розподілів  $P(k)$  в L- та P-просторах відповідно з їхніми стандартними відхиленнями  $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\alpha$ .

Предмет огляду та дослідження – складні поняття для аналізу статистичних властивостей мереж громадського транспорту міст України – є новим, вивчення їх топологічних властивостей є актуальним. Вперше проаналізовані розподіли ступенів вузлів  $P(k)$  для даних мереж в обох L-та P-просторах. У межах комплексного підходу обчислені характеристики мереж громадського

транспорту у цих різних представленнях і виконано порівняльний аналіз. Результати досліджень наведені в таблиці.

На рис. 2 зображені типові графіки для розподілів ступенів вузлів  $P(k)$  у логарифмічному масштабі, в яких знехтувано внеском точки  $k = 1$ , яка відповідає закінченню лінії мережі. Всі розподіли наближено описуються степеневими законами

$$p(k) \sim k^{-g},$$

показники  $g$  якого для різних міст наведені у таблиці.

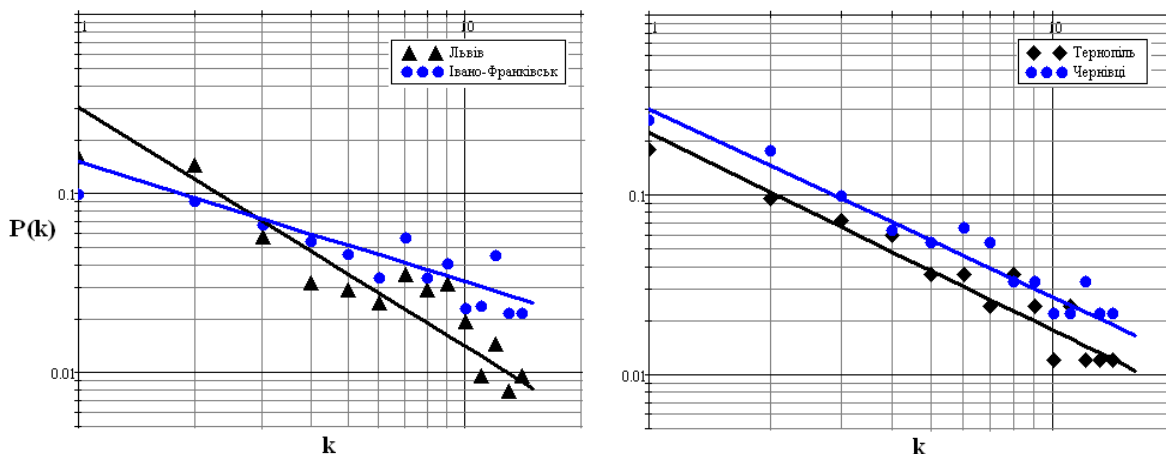


Рис. 2. Розподіл ступенів вузлів  $P(k)$  у  $L$ -просторі. Львів -  $g = 2.33 \pm 0.23$ , Івано-Франківськ -  $g = 1.67 \pm 0.2$ , Тернопіль -  $g = 2.1 \pm 0.3$ , Чернівці -  $g = 2.05 \pm 0.17$ .

Значення показників відрізняються від значення показника  $\gamma = 3$ , який характерний для моделі мереж переважного приєднання Барабаші-Альберта. Більші показники розподілів відповідають більшій кількості вершин  $N$  у мережі.

Відповідні сукупні розподіли ступенів у  $P$ -просторі для досліджуваних мереж ГТ

обчислювалися згідно з формулою  $P(k) = \int_k^{k_{\max}} p(k') dk'$  і результати обчислень наведені на рис. 3.

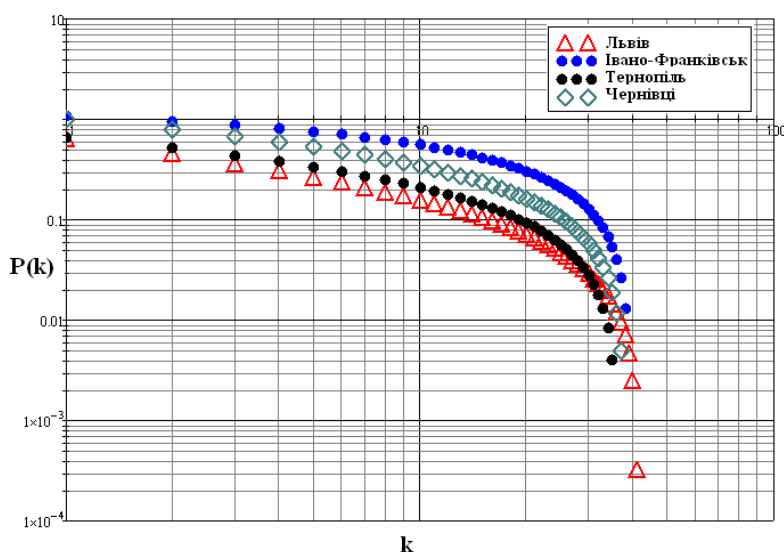


Рис. 3. Сукупний розподіл  $P(k)$  у  $P$ -просторі для Львова, Івано-Франківська, Тернополя і Чернівців

Розподіли  $P(k)$  і  $p(k)$  описуються експоненціальним представленням  $p(k) \sim \exp(-ak)$ .

У таблиці наведені показники  $g$  і  $a$  для досліджуваних міст, значення яких були отримані стандартним методом лінійної регресії.

### Універсальна залежність відстаней від розподілу ступенів у мережах ГТ

Аналіз емпіричних результатів для складних реальних мереж [15–18] виявив наявність для них декількох універсальних законів масштабування. Найвідоміший степеневий закон розподілу ступенів вузлів  $P(k) \sim k^{-g}$  [19] спостерігається в соціальних, біологічних та технологічних системах.

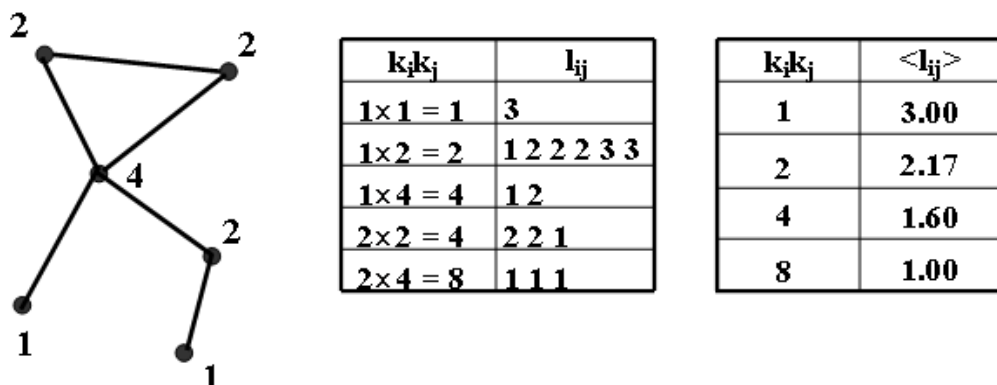
У роботі [20] розглянута аналітична модель для середніх довжин шляху у випадкових нескорельованих мережах. Показано, що довжина найкоротшого шляху між вузлами  $i$  та  $j$  зі ступенями розподілу  $k_i$  та  $k_j$  може бути описана як:

$$l_{ij}(k_i, k_j) = \frac{-\ln k_i k_j + \ln(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle) + \ln N - g}{\ln(\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle - 1)} + \frac{1}{2},$$

де  $g = 0.5772$  є постійною Ейлера, а  $\langle k \rangle$  та  $\langle k^2 \rangle$  відповідають першому та другому моментам розподілу ступенів вузлів  $P(k)$ . Звідси випливає, що середня відстань між двома вузлами лінійно залежить від логарифма добутку їх ступенів:

$$\langle l_{ij} \rangle = A - B \log(k_i k_j). \quad (5)$$

Продемонструємо принцип знаходження середньої міжвузлової відстані на такому прикладі:



Співвідношення (5) також можна отримати з простої моделі розгалуження дерев у просторі випадкових мереж [21].

Для більшості досліджуваних мереж середня міжвузлова відстань  $\langle l_{ij} \rangle$  описується співвідношенням (5) і приймає своє максимальне значення  $l_{\max}$  при мінімально можливих значеннях  $k_i$  і  $k_j$ , тобто  $k_i = k_j = 1$ . Тоді згідно з (5) отримуємо, що  $A = l_{\max}$ .

Зауважимо, що слідуючи вздовж випадкового напрямку по випадково вибраному ребру, наближуємося до вузла  $j$  з імовірністю  $p_j = \frac{k_j}{2E}$ , де  $2E$  – це подвоєна кількість зв'язків. Це означає, що в середньому потрібно  $M_j = \frac{1}{p_j} = \frac{2E}{k_j}$  випадкових блукань, щоб прийти до вузла  $j$ .

Розглянемо процес розгалуження, зображений у вигляді дерева (рис. 4), яке починається у вузлі  $i$  і для якого середній коефіцієнт розгалуження дорівнює  $k$  (всіма петлями знехтувано).

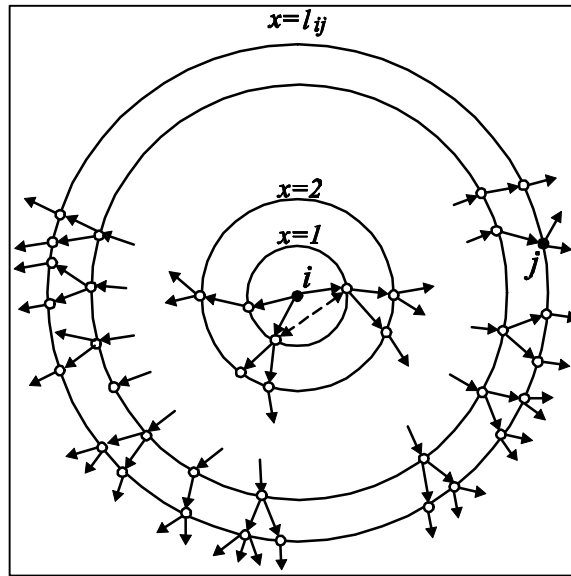


Рис. 4. Дерево, сформоване випадковими процесами, які починаються у вузлі  $i$  та закінчуються у вузлі  $j$

Якщо відстань між вузлом  $i$  і поверхнею дерева дорівнює  $x$ , тоді на цій поверхні в середньому є  $N_i = k_i k^{x-1}$  вузлів. Є така сама кількість з'єднань (ребер), які закінчуються в цих вузлах. Звідси слідує, що дерево дотикається до вузла  $j$ , коли  $N_i = M_j$ , звідси

$$k_i k_j k^{x-1} = N \cdot \langle k \rangle. \quad (6)$$

Оскільки середня відстань від вузла  $i$  до вузла  $j$  є  $\langle l_{ij} \rangle = x$ , звідси отримаємо масштабування для співвідношення (5):

$$A = 1 + \frac{\log N \langle k \rangle}{\log k}, \quad B = \frac{1}{\log k}, \quad (7)$$

де коефіцієнти  $A$  і  $B$  залежать від середнього фактора розгалуження  $k$  розглядуваного дерева і від загальної кількості його ребер  $E = N \langle k \rangle / 2$ .

У першому наближенні для мереж без кореляції  $k$  може бути оцінений як середнє арифметичне значення ступеня найближчого сусіда мінус одиниця:  $k = \langle k \rangle_{nn} - 1$ . Проте таке середнє значення буде неточним, оскільки в (6) локальні фактори розгалужень перемножуються один на одного. Точніше середнє значення  $k$  необхідно визначити як середнє арифметичне значення всіх геометричних величин з різних дерев, однак це важко здійснити чисельно. Ми обчислили середнє арифметичне значення фактора розгалуження для найближчих сусідів вузла “ $m$ ”, тобто  $k^{(m)} = \langle k \rangle_{mm}^{(m)} - 1$ , а потім здійснили геометричні усереднення по всіх вузлах “ $m$ ”, тобто  $k = \langle k^{(m)} \rangle_m$ . Результати, наведені на рис. 5, були розраховані для чотирьох перших десятків значень  $k_i k_j$ .



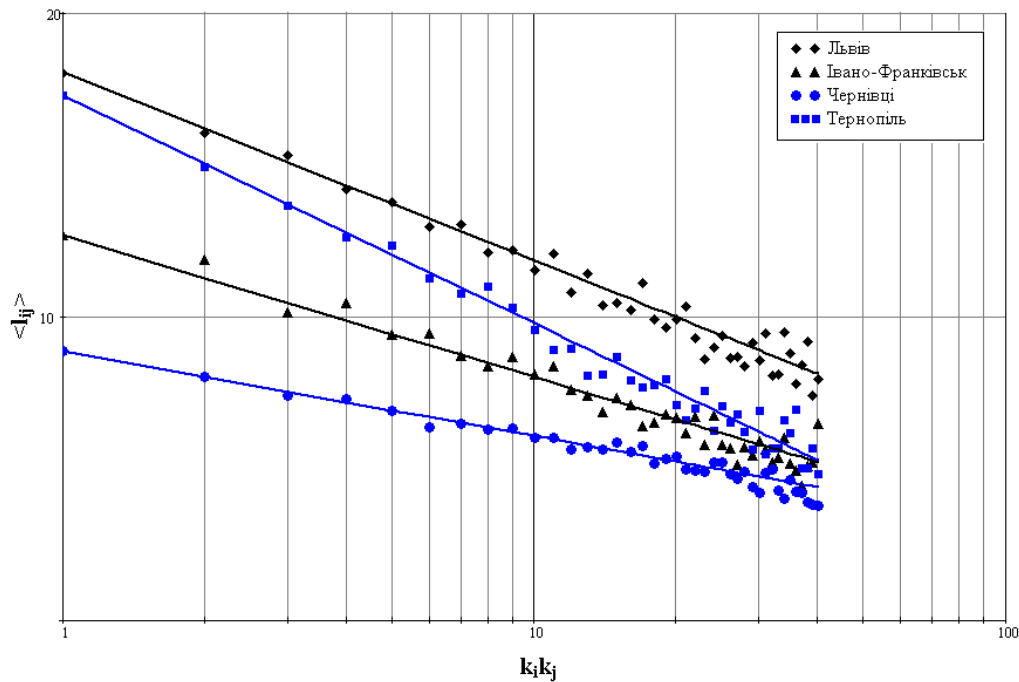


Рис. 5. Залежність  $\langle l_{ij} \rangle$  від  $k_i k_j$  у L-просторі

Виявлено, що для розглядуваних мереж ГТ масштабування (7) добре виконується для відстаней, виміряних в L-просторі. Спостережувані значення коефіцієнтів А і В у середньому відрізняються на 15–20% від теоретичних значень, отриманих для випадкових графів.

Доцільно було б дослідити співвідношення (5) у Р-просторі. Насправді через структуру цього простору набір  $l_{ij}$  містить, як правило, 2–3 точки, а це означає, що потрібно всього 2–3 зміни автобуса або трамваю, щоб дістатися з однієї точки міста в іншу [21].

### Висновки

Наведений систематичний огляд статистичних властивостей мереж ГТ чотирьох міст західного регіону України: Львова, Тернополя, Івано-Франківська та Чернівців на основі зібраних фактичних даних (кількість трамвайних, тролейбусних та автобусних маршрутів, кількість зупинок на різних маршрутах та ін.) з використанням універсальних інструментів складних мереж, встановлені закони розподілів ступенів вузлів цих мереж та залежності середніх відстаней між вузлами для цих розподілів. Відмінною особливістю нашого дослідження є те, що ми мережу ГТ міст інтерпретуємо як мережі всіх видів громадського транспорту, які наявні в цих містах. Зокрема, корисним у нашому аналізі було використання різних уявлень про мережі громадського транспорту (зображення мережі в L- та Р-просторах). Розглянуті мережі є безмасштабними для L-простору та сильно скорельованими структурами тісного світу у Р-просторі з порівняно малим середнім значеннями найкоротших шляхів.

1. Von Ferber, C. *Scaling in public transport networks [Text]* / C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov // *Condens. Matter Phys.* – 2005. – №8. – P. 225-234.
2. Sienkiewicz, J. *Public transport systems in Poland: From Bialystok to Zielona Gora by bus and tram using universal statistics of complex networks [Text]* / J. Sienkiewicz, J. A. Holyst // *Acta Phys. Polonica.* – 2005. – Vol.36, №5. – P. 1771–1778.
3. Von Ferber, C. *Public transport networks: empirical analysis and modeling [Text]* / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // *Physica A.* – 2007. – №380. – P. 585–591.
4. Scala, A. *Classes of small-world networks [Text]* / L. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, H. Stanley // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* – 2000. – №97. – P. 11149–11152.
5. Guimera, R. *Modeling the world-wide airport network [Text]* /

R. Guimera, L. Amaral // *Eur. Phys. J.* – 2004. – №38. – P. 381–385. 6. Guimera, R. *The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities' global roles* [Text] / R. Guimera, S. Mossa, A. Turtschi, L. Amaral // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* – 2005. – №102. – P. 7794–7799.

7. Barrat, A. *Virtual Round Table on ten leading questions for network research* [Text] / A. Barrat, Al. Barabasi, G. Caldarelli, P. De los Rios, A. Erzan, B. Kahng, R. Mantegna, J. Mendes, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // *Eur. Phys. J.* – 2004. – №38. – P. 143–145. 8. Li, W. *Statistical analysis of airport network of China* [Text] / W. Li, X. Cai // *Phys. Rev.* – 2004. – №69. – P.461–466.

9. Wang, Q. *A composition of different  $q$  nonextensive systems with the normalized expectation based on escort probability* [Text] / Q.A. Wang, L. Nivanen, A. Le Mehaute // *Eur. Phys. J.* – 2005. – №48. – P. 95–100.

10. Guida, M. *Topology of the Italian airport network: A scale-free small-world network with a fractal structure?* [Text] / M. Guida, F. Maria // *Chaos Solitons & Fractals.* – 2007. – №31. – P. 527–536.

11. Strogatz, S.H. *Exploring complex networks* [Text] / S.H. Strogatz // *Nature.* – 2001. – №410. – P. 268–231.

12. Latora, V. *Efficient behavior of small-world networks* [Text] / V. Latora, M. Marchiori // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – №87. – P. 197–201. 13. Latora, V. *Is the Boston subway a small-world network?* [Text] / V. Latora, M. Marchiori // *Physica A.* – 2002. – №314. – P. 109–115. 14. Sen, P. *Small-world properties of the Indian railway network* [Text] / P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram, G. Mukherjee, S. S. Manna // *Phys. Rev.* – 2003. – №67. – P. 125–129. 15. Albert R. *Statistical mechanics of complex networks* [Text] / R. Albert, A.-L. Barabasi // *Rev. Mod. Phys.* – 2002. – №74. – P. 47–97.

16. Bornholdt, S. *Handbook of graphs and networks* [Text] / S. Bornholdt, H.G. Schuster // *Wiley-Vch*, 2003. – 401 p. 17. Dorogovtsev, S.N. *Evolution of networks* [Text] / S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes. – *Oxford Univ.Press*, 2003. – 356 p. 18. Pastor-Satorras R. *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach* [Text] / R. Pastor-Satorras, A. Vespignani. – *Cambridge Univ. Press*, 2004. – 452.– p. 19. Barabasi A.-L. *Emergence of scaling in random networks* [Text] / A.-L. Barabasi and R. Albert // *Science.* – 1999. – №286. – P. 509–512. 20. Fronczak A. *Average path length in random networks* [Text] / A. Fronczak, P. Fronczak, J.A. Holyst // *e-print: cond-mat/0502663.* – 2003. – P. 216–221. 21. Holyst J.A. *Universal scaling of distances in complex networks* [Text] / J.A. Holyst, J. Sienkiewicz, A. Fronczak, P. Fronczak, K. Suchecki // *e-print: cond-mat/0411160.* – 2004. – P. 45–49. 21. Marchiori M. *Harmoni in the S mall World* [Text] / M. Marchiori, V. Latora // *Physica A.*– 2000.– № 285. – P.539.

22. Seaton K.A. *Stations, trains and small-world networks* [Text] / K.A. Seaton, L.M. Hackett // *Physica A.* – 2004. – 339, P. 635–644. 23. Sienkiewicz J. *Statistical analysis of 22 public transport networks in Poland* [Text] / J. Sienkiewicz, J.A. Holyst // *Phys. Rev.*– 2005. – № 72. – P. 461–472. 24. Angeloudis P. *Large subway systems as complex networks* [Text] / P. Angeloudis, D. Fisk // *Physica A.*– 2006. – № 15.– Vol. 367. – P. 553–558. 25. Zhang, P. *Model and empirical study on some collaboration networks* [Text] / P.– P. Zhang, K. Chen, Y. He, T. Zhou, B.-B. Su, Y. Jin, H. Chang, Y.-P. Zhou, L.-C. Sun, B.-H. Wang, D.-R. He // *Physica A.* – 2006. – Vol.360. – P. 599–616. 26. Xu. X.. *Scaling and correlations in three bus-transport networks of China* [Text] / X.. Xu., J. Hu, F. Liu, L. Liu, // *Physica A.* – 2007.– Vol. 374, – P. 441–444 .