

Ю. В. Човнюк¹, М. Г. Діктерук², К. І. Почка²¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України² Київський національний університет будівництва і архітектури

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ ПУСКУ/ГАЛЬМУВАННЯ МЕХАНІЧНИХ (КРАНОВИХ) СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ РУХУ

© Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Почка К. І., 2014

Наведені основні теоретичні положення та алгоритм оптимізації кінематично-силових параметрів механічних (кранових) систем у режимах їх пуску/гальмування в межах дискретних моделей з одним ступенем вільності руху. Критерієм оптимальності обрано систему умов, які накладаються на силові та кінематичні параметри системи, що задовольняють певні умови гладкості траєкторії руху у перехідних режимах її функціонування.

Ключові слова: кранова система, критерій оптимальності, перехідний режим, кінематичні параметри, траєкторія руху.

The basic theoretical principles and the algorithm for optimization of kinematic and power parameters of mechanical (crane) systems in modes of their start-up/braking within discrete models with one degree of freedom movement are given. The system of conditions was chosen as an optimality criterion; these conditions are imposed on the power and kinematic parameters of the system that meet certain smoothness conditions of movement trajectory in transitional modes of its functioning.

Keywords: crane system, optimality criterion, transitional mode, kinematics parameters, movement trajectory.

Постановка проблеми. З позиції динамічного розрахунку вантажопідіймальний кран являє собою єдину динамічну систему, яка складається з механізмів, несучої металоконструкції, приводів і будівельної частини споруди, у якій працює кран. Врахувати усе розмаїття взаємодіючих елементів крана у динамічних розрахунках доволі важко, але здебільшого у цьому немає ніякої потреби, оскільки не всі фактори однаково впливають на формування динамічних навантажень. При переході від реальної машини до її розрахункової динамічної схеми нехтують тими фізичними факторами, які для цього розрахунку мають неістотне значення. Зокрема, здебільшого особливості функціонування вантажопідіймальних кранів, зокрема у перехідних режимах роботи (пуск/гальмування), розглядають у межах моделей механічних систем з одним ступенем вільності руху.

У загальному випадку під час складання розрахункових динамічних схем вантажопідіймальних кранів слід враховувати кількість зосереджених (дискретних) мас; піддатливість силових елементів та можливість її зміни у конкретній ситуації; залежність рушійних та гальмівних зусиль приводних двигунів від частоти обертання ротора чи якоря; перехідні електромагнітні процеси у приводних електродвигунах чи термодинамічні процеси у пневмодвигунах; зміни приведених мас механізмів тощо. У кожному конкретному випадку динамічного розрахунку одні фізичні фактори є головними, визначальними, а інші – другорядними.

Розрахункова динамічна схема механічної (кранової) системи, тобто модель реальної системи, повинна задовольняти дві головні вимоги: по-перше, вона повинна бути певною мірою адекватною реальній системі і, на скільки це можливо, відображати основні фізичні властивості досліджуваної системи; по-друге, вона повинна бути не дуже складною, щоб розв'язок динамічної задачі виявився не занадто трудомістким. Всяке ускладнення розрахункової схеми повинно бути виправдане отриманням точнішого розв'язку. У той самий час спрощення розрахункової схеми не повинно призводити до спотворення реального фізичного процесу.

Динамічні навантаження, як діють на елементи механізму піднімання та кранову металоконструкцію, виникають при пуску двигуна для піднімання чи опускання висячого на канатах вантажу; під час гальмування вантажу, що піднімається чи опускається.

Розрахункова схема, яка відображає динаміку піднімання вантажу, у загальному випадку залежить від досліджуваного періоду руху вантажу, типу крана тощо.

Складною є й розрахункова схема крана мостового типу з однією балкою та консольним візком при його розміщенні у середині прольоту, коли необхідно брати до уваги як вертикальні згинні, так і крутні коливання прольотної споруди крана.

Для практичних розрахунків кранів у режимах їх пуску/гальмування по першій групі граничних станів (розрахунок на міцність та стійкість) необхідно знати і враховувати, у які періоди руху механізмів, за яких режимів керування та за якого стану кранової системи сумарні навантаження (статичні та динамічні) досягають максимальних значень.

Зрозуміло, що подібні розрахунки вимагають подальших уточнень, вдосконалень і обґрунтування у межах обраної моделі механічної (кранової) системи.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Динаміку машинних агрегатів на граничних режимах руху вивчали у роботі [1]. Основні динамічні моделі вантажопідіймальних кранів наведені у [3–6]. Для аналізу механічних коливань кранових систем застосовуються методи, розвинені у [2]. У цій роботі використаний підхід авторів [7].

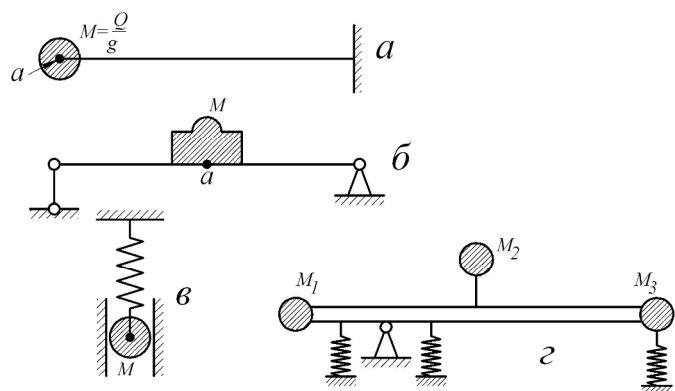
Мета даної роботи полягає у обґрунтуванні алгоритму оптимізації режимів пуску/гальмування механічних (кранових) систем з одним ступенем вільності руху. Для досягнення зазначеної вище мети цього дослідження використаний підхід, розвинутий у роботі [7].

Виклад основного матеріалу дослідження.

Відомо [7], що системами з одним ступенем вільності руху називають такі, у яких для повної фіксації їх геометричного стану у будь-який момент часу достатньо знати лише один параметр, наприклад, положення у просторі певної точки.

Класичним прикладом системи з одним ступенем вільності є невагома пружна балка (наприклад, мостового крана) з однією зосередженою масою, що має можливість переміщуватися у одному напрямку (рис. 1, а–в). при коливаннях такої маси переміщення всіх точок балки будуть визначатись переміщеннями вказаної маси, але характер переміщень (пружна крива балки, діаграма переміщень точок осі пружини) не буде пов'язаний з динамічними якостями системи і може бути визначений звичайними статистичними методами.

Рис. 1. Розрахункові схеми систем з одним ступенем вільності руху



Відомим наближенням до такої розрахункової схеми може бути реальна балка зі встановленим на ній важким вантажем (двигун, вантажний візок мостового крана тощо), порівняно з яким вагою балки можна знехтувати.

Системою з одним ступенем вільності руху може бути механізм, що складається з кількох мас (рис. 1, з), закріплених на жорсткій недеформованій балці, що має можливість обертатись відносно певного центра (шарнірна опора); балка підперта кількома пружинами, масою котрих порівняно з масами M_1 , M_2 та M_3 можна знехтувати. У такому випадку для повної фіксації у будь-який момент часу геометричного стану системи (будь-якої маси, будь-якої точки, взятої на пружині тощо) досить знати лише один параметр – кут повороту жорсткої балки.

Реальні інженерні споруди (такі, як вантажопідіймальні крани) зазвичай далекі від системи з одним ступенем вільності руху. Однак для практичних цілей низки задач динамічного розрахунку (кранів) може бути замінений вивченням еквівалентної за остаточною результатами, спеціально підібраної системи з одним ступенем вільності руху. На основі вказаних міркувань вивчення коливань кранових систем з одним ступенем вільності руху становить одну із важливих частин динаміки вантажопідіймальних кранів.

Якщо порушувати рівновагу системи з одним ступенем вільності руху (прикласти імпульс до маси чи відхилити масу від стану статичної рівноваги і потім дозволити їй вільно самостійно рухатись), тоді за відсутності сил опору система здійснюватиме вільні коливання за гармонічним законом:

$$y = y_0 \cdot \cos \omega \cdot t + \left(\frac{v_0}{\omega} \right) \cdot \sin \omega \cdot t ; \quad (1)$$

$$v = v_0 \cdot \cos \omega \cdot t + y_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t , \quad (2)$$

де y та v – переміщення та швидкість маси у момент часу t ; y_0 та v_0 – початкове відхилення та швидкість маси у момент часу $t = 0$; ω – кругова частота, тобто число коливань за 2π секунд.

Переміщення y та y_0 у формулах (1) та (2) відрховуються від того стану, у якому знаходилась маса до моменту початку коливного процесу, тобто від статичного рівня.

Амплітуда переміщень залежить від початкових умов руху і виражається формулою

$$y_{\max} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} . \quad (3)$$

Кругова частота визначається одним з таких виразів:

$$\omega = \sqrt{c/M} = \sqrt{c \cdot g/Q} = \sqrt{g/y_{cm}} = \sqrt{1/(M \cdot \delta_{aa})} . \quad (4)$$

Тут y_{cm} – статичне переміщення (прогин), тобто переміщення маси у заданому напрямку під дією сили, що діє у цьому напрямку, яка дорівнює за величиною власній силі тяжіння; g – прискорення вільного падіння; c – жорсткість системи, тобто сила, яка викликає при її статичному прикладанні одиничне безрозмірне переміщення; Q – вага тіла; $M = Q/g$ – зосереджена маса тіла; δ_{aa} – податливість системи, тобто статичне переміщення точки закріплення маси від безрозмірної одиничної сили, прикладеної у тій самій точці, у напрямку цієї сили (ці переміщення прийнято називати “можливими”).

Кругова частота ω та період T (тривалість одного циклу коливань) зв’язані залежністю:

$$T = 2 \cdot \pi / \omega . \quad (5)$$

Кількість коливань у одну хвилину (так звана технічна частота) визначається виразом:

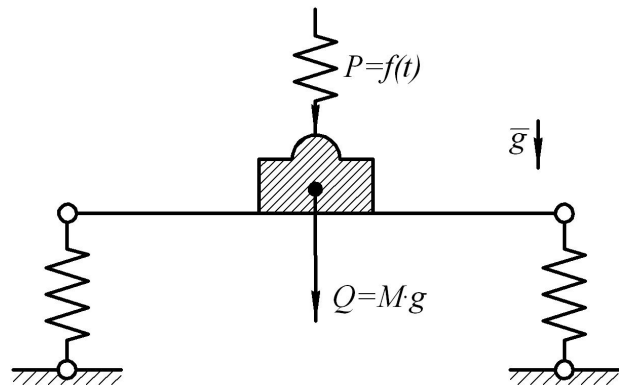
$$f_T = 60/T .$$

Період вільних коливань та пов’язана з ним частота коливань є головними динамічними характеристиками конструкцій (кранів, механічних систем).

Якщо навантаження зростає чи взагалі змінюється у проміжку часу, який становить менше двох чи трьох періодів вільних коливань, тоді таке навантаження по відношенню до кранової конструкції буде вважатись динамічним чи швидкозмінним.

Якщо навантаження зростає чи змінюється у часі протягом 5–10 і більше періодів вільних коливань, тоді ефект таких навантажень буде близький до статичного.

Рис. 2. Розрахункова схема для аналізу вимушених коливань механічної (кранової) системи



При дії на масу сили, яка змінюється у часі за будь-яким законом $P = f(t)$, система здійснюватиме вимушені коливання (рис. 2). У такому випадку переміщення маси у момент часу t буде визначатися виразом:

$$y = \frac{1}{\omega \cdot M} \cdot \int_0^t f(t_1) \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_1)] dt_1 \quad (6)$$

Якщо до моменту прикладання вказаної сили система здійснювала вільні коливання, тоді повне переміщення маси буде визначатись сумою виразів (1) та (6).

За наявності у механічній (крановій) системі малих загасань, які пропорційні першому ступеню швидкості руху, що характерно для таких конструкцій, рівняння вільних коливань записується у вигляді:

$$y = \exp(-\varepsilon \cdot t) \cdot \left[y_0 \cdot \left(\cos \omega_1 \cdot t + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 \cdot t \right) + \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 \cdot t \right], \quad (7)$$

де частота $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}$, період $T_1 = 2 \cdot \pi / \omega_1$, $\varepsilon = \alpha / (2 \cdot M)$, α – коефіцієнт опору (сила опору, яка реалізується за швидкості руху, що дорівнює одиниці (1 M/c)); ω – частота вільних коливань за відсутності сил опору.

При дії на таку систему вимушеної сили переміщення записується так:

$$y = \frac{1}{\omega_1 \cdot M} \cdot \int_0^t \exp(-\varepsilon \cdot (t - t_1)) \cdot f(t_1) \cdot \sin[\omega_1 \cdot (t - t_1)] dt_1 \quad (8)$$

Зрозуміло, що у разі наявності вільних коливань у системі до прикладання вимушеної сили, до виразу (8) треба додати вираз (7), щоб знайти повне переміщення маси.

У подальшому розглядатимемо коливання (та інші рухи) механічної (кранової) системи за умови: $\varepsilon \rightarrow 0$.

Використовуючи підхід роботи [7], застосуємо до виразу (6) відоме правило інтегрування по частинах:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad (9)$$

Спочатку зробимо заміну $\sin[\omega \cdot (t - t_1)] dt_1 = dv$; $f(t_1) = u$, а після підстановки її у (9) до отриманого нового інтегралу знову застосуємо правило інтегрування по частинах (9) і так далі. Визначення інтегралу (6) вказаним способом призведе до нескінченного ряду, а для випадку, коли $f(t_1)$ являє собою алгебраїчний поліном зі скінченним числом членів, будемо мати скінченний ряд.

Отже, якщо закон зміни навантаження у часі $P = f(t)$ являє собою неперервну функцію, тоді вираз (6) можна розкласти у ряд так:

$$y = \frac{1}{\omega \cdot M} \cdot \int_0^t f(t_1) \cdot \sin[\omega \cdot (t - t_1)] dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[f(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{f}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(IV)}(t) - \dots \right] - \left[\frac{1}{\omega} \cdot \dot{f}(0) - \frac{1}{\omega^3} \cdot \ddot{f}(0) + \dots \right] \cdot \sin \omega \cdot t - \\ & - \left[f(0) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{f}(0) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(IV)}(0) - \dots \right] \cdot \cos \omega \cdot t \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

де $\dot{f}(t)$, $f^{(IV)}(t)$ і так далі – вирази похідних (другої, четвертої і так далі) по часу t від рівняння навантаження; $f(0)$, $\dot{f}(0)$, $\ddot{f}(0)$ і так далі – значення навантаження та похідних по часу при $t = 0$.

3. Оптимізація силових та кінематичних параметрів механічної (кранової) системи у режимі її пуску.

Нехай навантаження має такий закон зміни часу t :

$$P = f(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + C_3 \cdot t^3 + C_4 \cdot t^4 + C_5 \cdot t^5 + C_6 \cdot t^6 + C_7 \cdot t^7 + C_8 \cdot t^8 = \sum_{i=0}^8 C_i \cdot t^i, \quad (11)$$

де C_i – константи, які визначаються з наведених нижче міркувань:

а) у законі $y(t)$ відсутні коливання системи з частотою ω , тобто коефіцієнти при функціях $\sin \omega \cdot t$ та $\cos \omega \cdot t$ у виразі (10) дорівнюють нулю. Це означає, що

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{\omega} \cdot \dot{f}(0) - \frac{1}{\omega^3} \cdot \ddot{f}(0) + \frac{1}{\omega^5} \cdot f^{(V)}(0) - \frac{1}{\omega^7} \cdot f^{(VII)}(0) \right] = 0; \\ & \left[f(0) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{f}(0) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(IV)}(0) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VI)}(0) + \frac{1}{\omega^8} \cdot f^{(VIII)}(0) \right] = 0; \end{aligned} \right. \quad (12)$$

б) на початку руху механічної системи (у момент $t = 0$) виконуються нульові початкові умови:

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0; \quad \ddot{y}(0) = 0; \quad \ddot{\ddot{y}}(0) = 0; \quad y^{(IV)}(0) = 0; \quad (13)$$

в) при завершенні процесу пуску системи ($t = t_p$) виконуються такі умови (гладкості траєкторії її руху):

$$\dot{y}(t_p) = V; \quad \ddot{y}(t_p) = 0; \quad \ddot{\ddot{y}}(t_p) = 0; \quad y^{(IV)}(t_p) = 0, \quad (14)$$

де V – усталена швидкість руху механічної (кранової) системи у моменті часу $t \geq t_p$.

Слід зазначити, що величини V та t_p визначаються вимогами штатного режиму (паспортного режиму) функціонування цієї механічної (кранової) системи.

З умов (12) при врахуванні (11) маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{\omega} \cdot C_1 - \frac{1}{\omega^3} \cdot 3! \cdot C_3 + \frac{1}{\omega^5} \cdot 5! \cdot C_5 - \frac{1}{\omega^7} \cdot 7! \cdot C_7 \right] = 0; \\ & \left[C_0 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 2! \cdot C_2 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^6} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^8} \cdot 8! \cdot C_8 \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Перша умова (13) збігається з другим рівнянням (15). З другої умови (13) отримуємо той самий результат, що й з першого рівняння (15). З інших трьох умов (13) маємо:

$$2! \cdot C_2 + \frac{1}{\omega^2} \cdot 4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^4} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^6} \cdot 8! \cdot C_8 = 0; \quad (16)$$

$$3! \cdot C_3 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 5! \cdot C_5 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 7! \cdot C_7 = 0; \quad (17)$$

$$4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 8! \cdot C_8 = 0. \quad (18)$$

Аналіз співвідношень (15) та (16)–(18) дає змогу встановити, що: $C_0 = C_1 = C_2 = 0$. Тоді закон для $P = f(t)$ розшукуємо у вигляді:

$$P = f(t) = \sum_{j=3}^8 C_j \cdot t^j. \quad (19)$$

(До речі, перші дві умови (13) означають, що вільні коливання у розглядуваній системі типу (1) відсутні).

Для констант C_j , $j = \overline{(3, 8)}$ з (12) та (14) маємо таку лінійну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3!}{\omega^3} \cdot C_3 + \frac{5!}{\omega^5} \cdot C_5 - \frac{7!}{\omega^7} \cdot C_7 = 0; \quad \frac{4!}{\omega^4} \cdot C_4 - \frac{6!}{\omega^6} \cdot C_6 + \frac{8!}{\omega^8} \cdot C_8 = 0; \\ \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=3}^8 j \cdot C_j \cdot t_p^{j-1} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot C_j \cdot t_p^{j-3} + \\ + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=5}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot C_j \cdot t_p^{j-5} - \\ - \sum_{j=7}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot (j-6) \cdot C_j \cdot t_p^{j-7} \end{array} \right\} = V; \\ \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot C_j \cdot t_p^{j-2} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=4}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot C_j \cdot t_p^{j-4} + \\ + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=6}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot C_j \cdot t_p^{j-6} - \frac{1}{\omega^6} \cdot 8! \cdot C_8 = 0; \\ \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot C_j \cdot t_p^{j-3} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=5}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot C_j \cdot t_p^{j-5} + \\ + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=7}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot (j-6) \cdot C_j \cdot t_p^{j-7} = 0; \\ \sum_{j=4}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot C_j \cdot t_p^{j-4} - \\ - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=6}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot C_j \cdot t_p^{j-6} - \frac{1}{\omega^4} \cdot 8! \cdot C_8 = 0. \end{array} \right. \quad (20)$$

Система рівнянь (20) легко розв'язується за правилом Крамера.

На рис. 3 та 4 зображені залежності $y(t)$ та $\dot{y}(t)$, які відповідають закону навантаження (19) для процесу пуску механічної (кранової) системи.

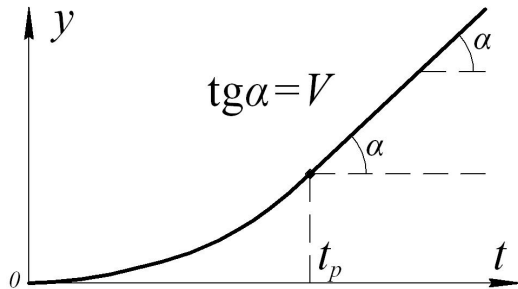


Рис. 3. Залежність $y(t)$ для процесу пуску механічної (кранової) системи

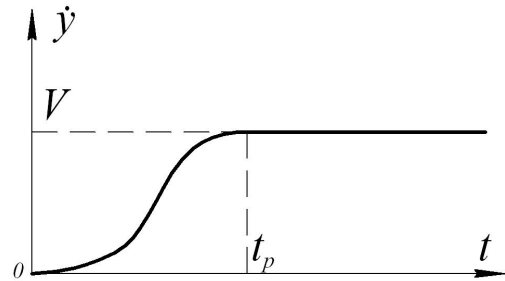


Рис. 4. Залежність $\dot{y}(t)$ для процесу пуску механічної (кранової) системи

Аналітичні вирази для $y(t)$ та її похідних по часу t наведені нижче:

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ f(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{y}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(IV)}(t) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VI)}(t) + \frac{1}{\omega^8} \cdot f^{(VIII)}(t) \right\}, \quad (21)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ \dot{f}(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{\dot{y}}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(V)}(t) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VII)}(t) \right\}, \quad (22)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ \ddot{f}(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(IV)}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VI)}(t) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VIII)}(t) \right\}, \quad (23)$$

$$\ddot{\dot{y}}(t) = \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ \ddot{\dot{f}}(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(V)}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VII)}(t) \right\}, \quad (24)$$

$$y^{(IV)}(t) = \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ f^{(IV)}(t) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(VI)}(t) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VIII)}(t) \right\}. \quad (25)$$

У виразах (21)–(25) введені позначення:

$$\left\{ \begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=3}^8 C_j \cdot t^j; & \dot{f}(t) &= \sum_{j=3}^8 j \cdot C_j \cdot t^{j-1}; & \ddot{f}(t) &= \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot C_j \cdot t^{j-2}; \\ \ddot{\dot{y}}(t) &= \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot C_j \cdot t^{j-3}; & f^{(IV)}(t) &= \sum_{j=4}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot C_j \cdot t^{j-4}; \\ f^{(V)}(t) &= \sum_{j=5}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot C_j \cdot t^{j-5}; \\ f^{(VI)}(t) &= \sum_{j=6}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot C_j \cdot t^{j-6}; \\ f^{(VII)}(t) &= \sum_{j=7}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot (j-6) \cdot C_j \cdot t^{j-7}; & f^{(VIII)}(t) &= 8! \cdot C_8. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

4. Оптимізація силових та кінематичних параметрів механічної (кранової) системи у режимі її гальмування.

Нехай навантаження має закон зміни у часі t , аналогічний (11). Оскільки процес гальмування передбачає існування у системі руху, тоді в початковий момент $t = 0$ швидкість руху ненульова і вільні коливання системи автоматично присутні (мають місце). Початкові умови руху системи та умови гладкості траєкторії цього руху мають у цьому випадку такий вигляд:

$$\begin{cases} y(0) = 0; & \dot{y}(0) = \tilde{V}; & \ddot{y}(0) = 0; & \dddot{y}(0) = 0; & y^{(IV)}(0) = 0; \\ \dot{y}(\bar{t}_p) = 0; & \ddot{y}(\bar{t}_p) = 0; & \dddot{y}(\bar{t}_p) = 0; & y^{(IV)}(\bar{t}_p) = 0, \end{cases} \quad (27)$$

де \tilde{V} – початкова швидкість руху механічної системи ($\tilde{V} = \text{const}$) у момент часу $t = 0$, \bar{t}_p має той самий зміст, що й t_p , але тепер \bar{t}_p означає тривалість процесу гальмування системи до її повної зупинки. До умов (27) додаються знову умови (12), які символізують відсутність у процесах гальмування механічної системи коливних процесів (при $t > 0$), що пропорційні $\sin \omega \cdot t$ та $\cos \omega \cdot t$.

Тепер для визначення коефіцієнтів C_i , $i = \overline{(1, 8)}$ маємо такі співвідношення (умови $y(0) = 0$ та $\dot{y}(0) = \tilde{V}$ виконуються автоматично, якщо врахувати вільні коливання системи за (1)):

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega} \cdot C_1 - \frac{1}{\omega^3} \cdot 3! \cdot C_3 + \frac{1}{\omega^5} \cdot 5! \cdot C_5 - \frac{1}{\omega^7} \cdot 7! \cdot C_7 = 0; \\ C_0 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 2! \cdot C_2 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^6} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^8} \cdot 8! \cdot C_8 = 0; \\ 2! \cdot C_2 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 4! \cdot C_4 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 6! \cdot C_6 - \frac{1}{\omega^6} \cdot 8! \cdot C_8 = 0; \\ \frac{1}{\omega^2 \cdot M} \cdot \left\{ 3! \cdot C_3 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 5! \cdot C_5 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 7! \cdot C_7 \right\} = \tilde{V} \cdot \omega^2; \\ 4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 8! \cdot C_8 = 0; \\ f(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{f}(\bar{t}_p) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(IV)}(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VI)}(\bar{t}_p) = 0; \\ \ddot{f}(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(IV)}(\bar{t}_p) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VI)}(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^6} \cdot f^{(VIII)}(\bar{t}_p) = 0; \\ \dddot{f}(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(V)}(\bar{t}_p) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VII)}(\bar{t}_p) = 0; \\ f^{(IV)}(\bar{t}_p) - \frac{1}{\omega^2} \cdot f^{(VI)}(\bar{t}_p) + \frac{1}{\omega^4} \cdot f^{(VIII)}(\bar{t}_p) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Аналіз рівнянь системи (28) дозволяє встановити, що $C_0 = C_2 = 0$. Тоді система (28) спрощується, а закон зміни у часі навантаження $P = f(t)$ шукаємо тепер у вигляді:

$$P = f(t) = C_1 \cdot t + \sum_{j=3}^8 C_j \cdot t^j. \quad (29)$$

Остаточно система рівнянь (лінійного типу) для визначення коефіцієнтів у (29) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{\omega} \cdot C_1 - \frac{1}{\omega^3} \cdot 3! \cdot C_3 + \frac{1}{\omega^5} \cdot 5! \cdot C_5 - \frac{1}{\omega^7} \cdot 7! \cdot C_7 = 0 ; \\
 & \frac{1}{\omega^2} \cdot M \cdot \left\{ 3! \cdot C_3 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 5! \cdot C_5 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 7! \cdot C_7 \right\} = \tilde{V} \cdot \omega^2 ; \quad 4! \cdot C_4 - \frac{1}{\omega^2} \cdot 6! \cdot C_6 + \frac{1}{\omega^4} \cdot 8! \cdot C_8 = 0 ; \\
 & C_1 + \sum_{j=3}^8 j \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-1} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-3} + \\
 & + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=5}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-5} - \\
 & - \frac{1}{\omega^6} \cdot \sum_{j=7}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot (j-6) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-7} = 0 ; \\
 & \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-2} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=4}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-4} + \\
 & + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=6}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-6} - \frac{1}{\omega^6} \cdot 8! \cdot C_8 = 0 ; \\
 & \sum_{j=3}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-3} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=5}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-5} + \\
 & + \frac{1}{\omega^4} \cdot \sum_{j=7}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot (j-6) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-7} = 0 ; \\
 & \sum_{j=4}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-4} - \\
 & - \frac{1}{\omega^2} \cdot \sum_{j=6}^8 j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3) \cdot (j-4) \cdot (j-5) \cdot C_j \cdot (\bar{t}_p)^{j-6} + \frac{1}{\omega^4} \cdot 8! \cdot C_8 = 0 ;
 \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Систему (30) легко розв'язати за правилом Крамера.

На рис. 5 та 6 зображені залежності $y(t)$ та $\dot{y}(t)$, які відповідають закону навантаження (29) для процесу гальмування (до повної зупинки) механічної (кранової) системи.

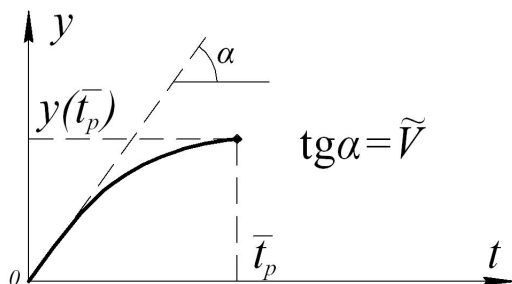


Рис. 5. Залежність $y(t)$ для процесу гальмування механічної (кранової) системи

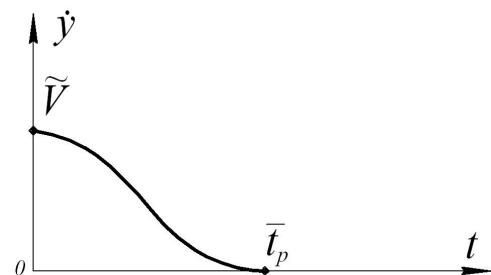


Рис. 6. Залежність $\dot{y}(t)$ для процесу гальмування механічної (кранової) системи

Аналітичні вирази для $y(t)$ та її похідних по часу t (для $t > 0$) збігаються з виразами (21)–(25). Але тепер позначення, введені у (26) вище, відрізняються. Вирази для $\ddot{y}(t)$, $\overset{\text{IV}}{y}(t)$, $f^{(IV)}(t)$, $f^{(V)}(t)$, $f^{(VI)}(t)$, $f^{(VII)}(t)$ та $f^{(VIII)}(t)$ збігаються з наведеними у (26), а для перших двох маємо інші співвідношення:

$$f(t) = C_1 \cdot t + \sum_{j=3}^8 C_j \cdot t^j; \quad \ddot{y}(t) = C_1 + \sum_{j=3}^8 j \cdot C_j \cdot t^{j-1}. \quad (31)$$

Слід зазначити, що $y(t)$ для режиму пуску поблизу $t \rightarrow 0$ поводить себе як функція $\sim t^3$, у той час як для режиму гальмування $y(t)|_{t \rightarrow 0} \sim t^1$. Останній результат цілком виправданий, оскільки при $t = 0$ система рухалась з $\tilde{V} = \text{const}$ рівномірно (і прямолінійно).

Висновки

7. Обґрунтовані кінематичні та силові параметри (зовнішнього впливу) для механічних (кранових) систем у режимах їх пуску/гальмування в межах моделей дискретного типу з одним ступенем вільності руху.

8. Сплайн-апроксимація динамічних та кінематичних параметрів системи поліномами восьмого порядку по часу t дозволяє оптимізувати вказані режими її функціонування і уникнути небажаних вільних коливань.

9. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку та розрахункових схем режимів пуску/гальмування вантажопідіймальних кранів як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

1. Артоболевский И. И. Динамика машинных агрегатов на предельных режимах движения / И. И. Артоболевский, В. С. Лоцинин. – М.: Наука, 1977. – 325 с. 2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с. 3. Грузоподъёмные машины / М. П. Александров, Л. Н. Колобов, Н. А. Лобов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с. 4. Грузоподъёмные краны / Под ред. М. П. Александрова. – М.: Машиностроение. Кн. 1. – 1981. – 216 с.; Кн. 2. – 1981. – 287 с. 5. Казак С. А. Динамика мостовых кранов / С. А. Казак. – М.: Машиностроение, 1968. – 472 с. 6. Лобов Н. А. Динамика грузоподъёмных кранов / Н. А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с. 7. Безухов Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.