

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У АНАЛІЗІ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ВАЖКОГО КАНАТА ВАНТАЖОПІДЙОМНОГО КРАНА

© Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Почка К.І., 2014

Наведено метод скінчених інтегральних перетворень для аналізу поперечних коливань важкого каната вантажопідйомного крана. Досліджено вільні та вимушені коливання каната під дією зосередженої та гармонічної сил.

The method of final integrated transformations for the analysis of cross fluctuations of a heavy rope of the load-lifting crane is given. The free and compelled fluctuations of a rope under the influence of concentrated and harmonious forces are investigated.

Постановка проблеми. Сучасний рівень розвитку технології видобутку й переробки корисних копалин зумовлює широке застосування у гірничій промисловості протяжних транспортних пристроїв, характерною особливістю яких є те, що один із розмірів суттєво перевищує інші. Це стрічкові та скребкові конвеєри, шахтні піднімальні пристрої, горизонтальні та вертикальні вібраційні конвеєри. До таких об'єктів слід зарахувати й важкі канати/троси вантажопідйомних кранів, котрі перебувають під постійним впливом зовнішніх поздовжніх і поперечних вимушених сил. Правильне врахування динамічних процесів, які відбуваються у зазначених об'єктах, є одним із основних факторів, що визначають працездатність, надійність і економічність конструкції (крана) загалом. Оскільки всебічний розгляд цих процесів практично неможливий, для наближеного їх опису зазвичай використовують різноманітні розрахункові моделі.

Переважна більшість досліджень динаміки шахтних підйомних канатів, а також канатів/тросів вантажопідйомних кранів ґрунтується на рівняннях поздовжніх та поперечних коливань пружних стрижнів або важких ниток.

Розмаїття моделей, що використовуються для динамічного розрахунку важких канатів вантажопідйомних кранів, можна зарахувати до групи розрахункових моделей, протяжні елементи яких мають фіксовану, наперед задану довжину. Вони доволі добре описують більшість розрахункових режимів роботи як шахтних канатів, так і канатів/тросів вантажопідйомних кранів у момент пуску та гальмування підйомних установок. Такі механічні системи можна розв'язувати методом розділення змінних. Найактуальніші задачі динаміки подібних систем вже можна вважати вирішеними, проте, на думку авторів цієї роботи, потребують подальшого уточнення та вдосконалення розрахункові моделі для аналізу поперечних коливань важких канатів/тросів вантажопідйомних кранів під дією різноманітних зовнішніх впливів.

Аналіз публікацій з теми дослідження. Автори [1] розглянули коливання вантажонесучого органа вертикальних віброконвеєрів, підйомних шахтних установок на основі стрижневих моделей. Започаткував дослідження динаміки підйомних канатів за

допомогою хвильового рівняння, яке розв'язується методом розділення змінних, академік О.М. Динник [2]. Етапи розвитку цього напрямку відображено у монографіях [3–6]. Метод скінченних інтегральних перетворень наведено у [7]. Результати цитованих робіт будуть використані у цьому дослідженні.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні методу скінченних інтегральних перетворень для задач динамічного аналізу поперечних коливань (вимушених та вільних) важкого каната вантажопідійомного крана.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Коливання важкого каната. Обґрунтування методу.

Розглянемо задачу Д. Бернуллі про коливання важкого каната.

Диференціальне рівняння малих коливань однорідного нерозтяжного важкого каната (нитки), який підвішений за верхній кінець, має вигляд [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{X^*}{g \cdot d} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де d – лінійна щільність каната (нитки); $X^*(x, t)$ – питоме поперечне навантаження нитки; $u(x, t)$ – відхилення нитки від положення рівноваги; g – прискорення вільного падіння ($g = 9,81 \text{ М/с}^2$); t – час. Вісь Ox вважається спрямованою

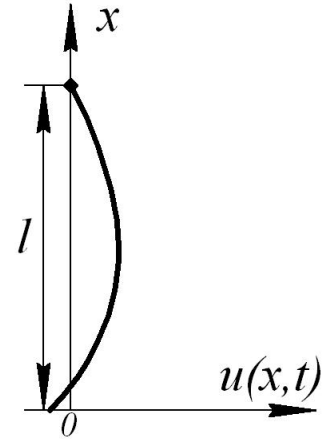


Рис. 1. Геометрія задачі

вздовж нитки/каната вгору (рис. 1). Вибираючи початок координат у точці, яка збігається з положенням рівноваги нижнього кінця нитки/каната, граничну умову можна записати у вигляді:

$$u(x, t)|_{x=0} < \infty; \quad u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

де l – довжина каната.

Початкову умову в загальному випадку вибираємо таку:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x), \quad (3)$$

де $u_0(x)$ та $u_1(x)$ – відомі функції.

Поставимо мету знайти інтегральне перетворення, яке дозволяє виключити диференціальні операції по x .

Нехай:

$$M_x \cdot u = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Ядро перетворення (K) є розв'язком такої граничної задачі:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \lambda^2 \cdot K = 0; \quad (5)$$

$$K|_{x=0} < \infty, \quad K|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

За допомогою підстановки:

$$z = 2 \cdot \sqrt{x} \quad (7)$$

рівняння (5) зведемо до рівняння Бесселя нульового порядку:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} + \lambda^2 \cdot K = 0. \quad (8)$$

Його розв'язками, обмеженими при $z=0$, є функції Бесселя $J_0(\lambda \cdot z)$ нульового порядку дійсної змінної $(\lambda \cdot z)$. Тому функції $J_0(\mu_\gamma \cdot \sqrt{x})$, де прийнято $\mu_\gamma = 2 \cdot \lambda_\gamma$, – це обмежені при $x=0$ розв'язки рівняння (5). Щоб задовольнити другу з граничних умов (6), прийємо:

$$J_0(\mu_\gamma \cdot \sqrt{l}) = 0. \quad (9)$$

Корені μ_γ цього рівняння і визначають набір власних чисел задачі (5)–(6), $\gamma = 1, 2, 3, \dots$

Зазначимо, що розмірність $[\mu_\gamma] = m^{-1/2}$.

Ядро перетворення, нормоване відповідно до співвідношення [7]:

$$\int_a^b K_j(\zeta) \cdot K_k(\zeta) \cdot \rho(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k \end{cases}, \quad (10)$$

має вигляд:

$$K(x, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma} \cdot J_0(\mu_\gamma \cdot \sqrt{x}), \quad (11)$$

де $C_\gamma = \int_0^{\tilde{a}} [J_0(\mu_\gamma \cdot \sqrt{x})]^2 dx$; $\rho(\zeta)$ – щільність (“вага”) $K_n(\zeta)$ на відрізку $\zeta \in [a, b]$. У цій задачі $a=0$,

$b=l$, $\tilde{a}=l$.

Для обчислення C_γ використаємо співвідношення:

$$\int_0^a z \cdot J_0^2(\lambda \cdot z) dz = \frac{a^2}{2} \cdot J_1^2(\lambda \cdot a). \quad (12)$$

Прийємо у (12) $a=l$, $z=2 \cdot \sqrt{x}$ та $\lambda = 1/2 \cdot \mu_\gamma$, тоді матимемо:

$$C_\gamma = l \cdot J_1^2(\mu \cdot \sqrt{l}). \quad (13)$$

Здійснюючи інтегральне перетворення з ядром (11) та інтервалом інтегрування $(0, l)$ і враховуючи, що $\lambda_\gamma = 1/2 \cdot \mu_\gamma$, перетворимо задачу (1)–(3) до виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{g}{2} \cdot \mu_\gamma \cdot \bar{u} = \bar{X}^*; \quad (14)$$

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0(g); \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}|_{t=0} = \bar{u}_1(g), \quad (15)$$

де $\bar{u} = \bar{u}(g, t) = \frac{1}{C_g} \cdot \int_0^l u(x, t) \cdot J_0(m_g \cdot \sqrt{x}) dx$; $\bar{X}^* = \bar{X}^*(g, t) = \frac{1}{C_g} \cdot \int_0^l X^*(x, t) \cdot J_0(m_g \cdot \sqrt{x}) dx$;

$\bar{u}_0(g) = \frac{1}{C_g} \cdot \int_0^l u_0(x) \cdot J_0(m_g \cdot \sqrt{x}) dx$; $\bar{u}_1(g) = \frac{1}{C_g} \cdot \int_0^l u_1(x) \cdot J_0(m_g \cdot \sqrt{x}) dx$.

Розв'язок задачі (14), (15) за заданого значення γ позначимо через \bar{u}_γ . При цьому розв'язок $u(x, t)$ задачі (1)–(3) можемо записати у вигляді ряду:

$$u(x, t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \bar{u}_\gamma \cdot J_0(\mu_\gamma \cdot \sqrt{x}). \quad (16)$$

2. Вільні коливання ($X^* = 0$) важкого каната.

За початкових умов (3) вільні коливання важкого каната/нитки можна подати у вигляді ряду:

$$u(x, t) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{x}) \cdot \left\{ A_{\gamma} \cdot \cos \left[\frac{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}}{2} \cdot t \right] + B_{\gamma} \cdot \frac{2}{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}} \cdot \sin \left[\frac{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}}{2} \cdot t \right] \right\}, \quad (17)$$

де

$$\begin{cases} A_{\gamma} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{l})} \cdot \int_0^l u_0(\xi) \cdot J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{\xi}) \, d\xi, \\ B_{\gamma} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{l})} \cdot \int_0^l u_1(\xi) \cdot J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{\xi}) \, d\xi. \end{cases} \quad (18)$$

3. Вимушені коливання важкого каната під дією сили, зосередженої у точці.

Розглянемо вимушені коливання важкого каната під дією сили $F(t)$, зосередженої у точці $x = a$ ($0 \leq a \leq l$), за нульових початкових умов.

Зосереджену силу розглядатимемо як граничний випадок сили, рівномірно розподіленої на ділянці каната ($a - \eta$, $a + \eta$). Переходячи до границі ($\eta = 0$), враховуємо співвідношення:

$$\frac{d}{dz} \{J_1(z)\} = J_0(z) - \frac{1}{z} \cdot J_1(z). \quad (19)$$

Тоді вимушені коливання важкого каната описуються співвідношенням:

$$u(x, t) = \frac{1}{l \cdot d \cdot \sqrt{g}} \cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{\gamma}} \cdot \frac{J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{a})}{J_1^2(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{l})} \cdot J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{x}) \cdot \int_{-\infty}^t F(\zeta) \cdot \sin \left[\frac{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}}{2} \cdot (t - \zeta) \right] \, d\zeta. \quad (20)$$

4. Вимушені коливання важкого каната під дією гармонічної сили.

Розглянемо вимушені коливання важкого каната під дією гармонічної сили $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega \cdot t$, де F_0 – амплітуда, ω – кругова частота цієї сили. Вважатимемо початкові умови нульовими. Тоді розв'язок задачі має вигляд:

$$u(x, t) = \frac{F_0}{d \cdot l \cdot \omega^2} \cdot \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{l})} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\mu_{\gamma}^2 \cdot g}{4 \cdot \omega^2} - 1 \right]} \cdot J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{x}) \cdot \left[\sin \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \omega}{\mu_{\gamma} \cdot g} \cdot \sin \left(\frac{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}}{2} \cdot t \right) \right]. \quad (21)$$

В умовах резонансу, коли виконується співвідношення:

$$\omega = \frac{\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{g}}{2} \quad (22)$$

у розкладі $u(x, t)$ (21) у ряд з'являється член, який зростає з плинном часу $t \sim t^3$. Вважаючи, що перші три значення коренів рівняння $J_0(\mu_{\gamma} \cdot \sqrt{l}) = 0$ є: $\mu_1 \cdot \sqrt{l} = 2,4$; $\mu_2 \cdot \sqrt{l} = 5,5$ та $\mu_3 \cdot \sqrt{l} = 8,5$, можемо знайти

три перші резонансні лінійні частоти ($f_i = \frac{\mu_i \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{l} \cdot 4 \cdot \pi}$, Γ_{ζ}), $\mu_i = \overline{(1, 3)}$, які набувають таких значень:

$$f_1 = \frac{2,4}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{4 \cdot \pi} \approx 0,6 \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad \Gamma_{\zeta}; \quad f_2 = \frac{5,5}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{4 \cdot \pi} \approx 1,37 \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad \Gamma_{\zeta}; \quad f_3 = \frac{8,5}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{4 \cdot \pi} \approx 2,12 \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad \Gamma_{\zeta}.$$

У табл. 1 обчислено значення f_i, Γ_{ζ} для різних значень l, m .

Таблиця 1

Значення “резонансів” f_i, Γ_{ζ} для різних значень l, m

l, m		5	10	15	20
f_i, Γ_{ζ}	f_1	0,27	0,19	0,15	0,13
	f_2	0,61	0,43	0,35	0,31
	f_3	0,95	0,67	0,55	0,47

5. Вимушені коливання підвішеного каната під дією неперервно розподіленої горизонтальної сили.

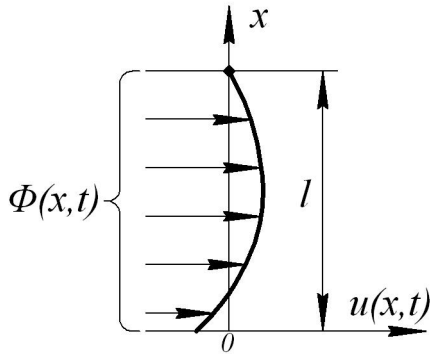
Вважатимемо, що на підвішений канат діє неперервно розподілена горизонтальна сила $\Phi(x, t)$, розрахована на одиницю довжини каната l , тобто розмірність $[\Phi(x, t)] = \frac{H}{M}$ (рис. 2).

Тоді рівняння вимушених коливань набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Y(x, t), \quad (23)$$

де $a^2 = g$; $Y(x, t) = \frac{\Phi(x, t)}{\rho}$; ρ – щільність матеріалу каната.

До цього рівняння слід додати граничні й початкові умови:



$$u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (24)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (23)–(24) методом, наведеним у [7]. Відхилення $u(x, t)$ підвішеного каната від вертикального положення рівноваги виражається формулою:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cdot \cos \left(\frac{a \cdot \tilde{\mu}_k \cdot t}{2 \cdot \sqrt{l}} \right) + B_k \cdot \sin \left(\frac{a \cdot \tilde{\mu}_k \cdot t}{2 \cdot \sqrt{l}} \right) \right] \cdot J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right), \quad (25)$$

Рис. 2. Геометрія задачі за дії на канат горизонтальної сили $\Phi(x, t)$

де $T_k(t)$, A_k і B_k визначаються рівностями:

$$T_k(t) = \frac{1}{l \cdot \omega_k \cdot J_0(\tilde{\mu}_k)} \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l Y(\xi, \tau) \cdot J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{\xi}{l}} \right) \cdot \sin[\omega_k \cdot (t - \tau)] d\xi; \quad (26)$$

$$A_k = \frac{1}{l \cdot J_1^2(\tilde{\mu}_k)} \cdot \int_0^l f(x) \cdot J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx; \quad B_k = \frac{1}{a \cdot \sqrt{l} \cdot \tilde{\mu}_k \cdot J_1^2(\tilde{\mu}_k)} \cdot \int_0^l F(x) \cdot J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx, \quad (27)$$

а $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \dots$ – додатні корені рівняння $J_0(\tilde{\mu}) = 0$.

У випадку, коли зовнішня сила діє гармонічно, тобто:

$$Y(x, t) = A \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (28)$$

коефіцієнти $T_k(t)$ визначаються за формулою:

$$T_k(t) = \frac{A}{l \cdot \omega_k \cdot J_1^2(\tilde{\mu}_k)} \cdot \int_0^t \sin[w_k \cdot (t - t)] \cdot \sin[w \cdot t] dt \cdot \int_0^l J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx, \quad (29)$$

де $w_k = \frac{\tilde{\mu}_k \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l}} = \frac{\tilde{\mu}_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Використовуючи формулу $\int_0^x J_0(\sqrt{x}) dx = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot J_1(\sqrt{x})$, яка легко виводиться із розкладу функцій $J_0(x)$ та $J_1(x)$ у степеневі ряди, знаходимо:

$$\int_0^l J_0 \left(\tilde{\mu}_k \cdot \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx = \frac{2 \cdot l}{\tilde{\mu}_k} \cdot J_1(\tilde{\mu}_k), \quad (30)$$

і оскільки:

$$\int_0^t \sin[w_k \cdot (t-t)] \cdot \sin(w \cdot t) dt = \frac{w_k \cdot \sin(w \cdot t)}{(w_k^2 - w^2)} - \frac{w \cdot \sin(w_k \cdot t)}{(w_k^2 - w^2)}, \quad (31)$$

тоді:

$$T_k(t) = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{A}{m_k^2 \cdot J_1(m_k)} \cdot \left[\frac{w_k \cdot \sin(w \cdot t)}{(w_k^2 - w^2)} - \frac{w \cdot \sin(w_k \cdot t)}{(w_k^2 - w^2)} \right]. \quad (32)$$

Припустимо, що початкові відхилення та початкові швидкості у цьому випадку відсутні й канат здійснює коливання тільки внаслідок дії вимушеної сили. Тоді з формул (25) та (32) випливає, що відхилення каната від вертикального положення рівноваги виражатиметься формулою:

$$u(x, t) = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot A \cdot \sin(w \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k \cdot J_0\left(\frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(w_k^2 - w^2) \cdot m_k^2 \cdot J_1(m_k)} - 4 \cdot A \cdot w \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \cdot \sin(w_k \cdot t)}{(w_k^2 - w^2) \cdot m_k^2 \cdot J_1(m_k)}. \quad (33)$$

Після нескладних перетворень можна отримати спрощений вираз для $u(x, t)$ такого вигляду:

$$u(x, t) = \frac{A}{w^2} \cdot \left[\frac{J_0\left(2 \cdot w \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}\right)}{J_0\left(2 \cdot w \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\right)} - 1 \right] \cdot \sin(w \cdot t) - 4 \cdot A \cdot w \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \cdot \sin(w_k \cdot t)}{(w_k^2 - w^2) \cdot m_k^2 \cdot J_1(m_k)}. \quad (34)$$

Зазначимо, що перший член у (34) описує вимушені коливання каната з частотою w , а другий – коливання каната на частотах w_k (власні частоти коливань (поперечних відносно його осі) каната) під дією вимушеної сили.

Отже, у цьому випадку виникають два типи резонансів:

$$1) \quad w = w_k \Rightarrow w = \frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad (35)$$

$$2) \quad 2 \cdot w \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = m_k \Rightarrow w = \frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (36)$$

Хоча умови резонансу (35) та (36) збігаються, проте вони призводять у першому випадку до розгойдування каната на одній із його власних частот, а у другому – до розгойдувань вимушених коливань каната. У цих резонансів різні амплітуди поблизу $w_{рез} \cong \frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$:

$$1) \quad A_{1рез} = 4 \cdot A \cdot w_{рез} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{m_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{(w_k^2 - w_{рез}^2) \cdot m_k^2 \cdot J_1(m_k)}; \quad (35)$$

$$2) \quad A_{2рез} = \frac{A}{w_{рез}^2} \cdot \left[\frac{J_0\left(2 \cdot w_{рез} \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}\right)}{J_0\left(2 \cdot w_{рез} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\right)} - 1 \right]. \quad (36)$$

Висновки

1. Обґрунтовано метод скінченних інтегральних перетворень для аналізу поперечних коливань важкого каната вантажопідйомного крана за дії вимушеної сили різних видів. Отримано основні кінематичні характеристики вказаних коливань за дії як зосереджених, так і розподілених у просторі зовнішніх збурень, що діють на канат.

2. Отримані у цій роботі результати можуть надалі слугувати для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку канатів вантажопідйомних кранів, що перебувають під впливом зовнішніх сил різних видів і суттєво змінюють/формують їх напружено-деформований стан.

1. Червоненко А.Г. Динамика протяжённных горных транспортных машин / А.Г. Червоненко, А.Г. Раздольский, Ю.В. Заболотный. – К.: Наукова думка, 1983. – 192 с. 2. Динник А.И. Статьи по горному делу / А.И. Динник. – М.: Углетехиздат, 1957. – 195 с. 3. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – К.: Наукова думка, 1971. – 224 с. 4. Савин Г.Н. Динамика нити переменной длины (применительно к шахтным подъёмам). / Г.Н. Савин, О.А. Горошко. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 332 с. 5. Савин Г.Н. Динамическая теория расчёта подъёмных канатов / Г.Н. Савин. – К.: Изд-во АН УССР, 1949. – 104 с. 6. Флоринский Ф.В. Динамика шахтного подъёмного каната / Ф.В. Флоринский. – М.: Углетехиздат, 1955. – 239 с. 7. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.