**УДК 519.2:621.391**

**С. В. Заболотній**
Черкаський державний технологічний університет
кафедра радіотехніки

# РЕКУРЕНТНЕ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФОРМУВАННЯ СЛАР ДЛЯ АДАПТАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ УЗГОДЖЕНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ



**У роботі розглянуто рекурентне статистичне оцінювання точності формування коефіцієнтів систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що застосовуються для знаходження адаптивних значень параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.**

**In this paper the recurrent statistical evaluation of precision of forming of coefficients of the systems of linear algebraic equalizations, applied for finding of adaptive values of parameters of the matched polynomial filters is considered.**

**Вступ.** Класичний підхід до побудови оптимальних методів опрацювання в негаусових умовах полягає у використанні нелінійних перетворювачів (фільтрів), структура та алгоритм роботи яких визначається видом та параметрами густин розподілу ймовірностей (ГРЙ) сигналів і завад. Проте, на практиці типовою є ситуація повної або часткової апріорної невизначеності щодо реальних ГРЙ, а тому виникає необхідність побудови адаптивних процедур, реалізація яких потребує вирішення достатньо складних задач, пов'язаних із визначення типу ГРЙ та знаходженням оцінок їх параметрів [1].

Одним із компромісних варіантів нелінійного опрацювання є підхід, що базується на застосуванні апарату стохастичних поліномів, запропонованого Ю.П.Кунченко [2]. Його ефективність, з точки зору реалізаційної простоти, базується на тому факті, що поліном є лінійною комбінацією деяких функціональних перетворень, а як математичну модель сигналів і завад використовують опис у вигляді математичних сподівань базисних функцій. Зокрема, якщо як базис використати степеневі функції, то таким описом буде послідовність моментів або кумулянтів. Оскільки такий спосіб опису є неповним, то результуючі поліноміальні методи опрацювання сигналів потенційно поступаються оптимальним. Проте їх точність, загалом, переважає лінійні методи і буде зростати при підвищенні степеня стохастичного поліному. Ще однією важливою перевагою поліноміального підходу є суттєве алгоритмічне спрощення реалізації адаптивних режимів роботи, оскільки вирішення задачі знаходження лінійних оцінок (середніх значень) скінченої кількості базисних перетворень, зокрема моментів або кумулянтів є значно простішою порівняно із оцінюванням параметрів ГРЙ.

У роботі [3], на основі розкладу в просторі з порідним елементом (просторі Кунченко), запропонована процедура узгодженої поліноміальної фільтрації, що базується на властивості стохастичних поліномів зменшувати дисперсію статистичних даних. У наступних роботах розглянута можливість застосування таких фільтрів для вирішення задач, пов'язаних із виявленням [4] і розпізнаванням [5] сигналів. Результати імітаційного моделювання [6] підтверджують можливість застосування стохастичних степеневих поліномів для побудови адаптивних систем, здатних функціонувати в умовах апріорної невизначеності щодо ймовірнісних характеристик завад. Показано, що процедура адаптації зводиться до пошуку оцінок послідовності початкових моментів та необхідності вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розв'язком яких є оптимальні значення параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.

**Метою даної роботи** є розробка методики рекурентного оцінювання точності формування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які застосовуються для адаптивного відшукання параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів.

**Постановка задачі.** Нехай фонові завади в деякому інформаційному каналі описуються моделлю адитивного білого негаусового шуму $x(t)$. При дискретному способі опрацювання послідовність відліків завади $x_n = x(nT)$, де $T$ - період дискретизації, можна трактувати як однаково розподілені елементи вибірки із випадкової величини, яку називають порідною [3]. Застосуємо до послідовності $x_n$ поліноміальне перетворення виду:

$$g_S(x_n) = k_0 + \sum_{i=2}^{S} k_i (x_n)^i . \tag{1}$$

Якщо вектор $\mathbf{K}$ коефіцієнтів $k_i$, $i = \overrightarrow{2,S}$ степеневого стохастичного поліному (1) знаходити із вирішення СЛАР:

$$\mathbf{KF} = \mathbf{B}, \tag{2}$$

де $\mathbf{F}$ - квадратна матриця розміру $(S-1)\times(S-1)$, елементами якої є центровані кореляти

$$F_{i,j} = \alpha_{i+j} - \alpha_i \alpha_j \ , \ i,j = \overrightarrow{2,S} , \tag{3}$$

$\mathbf{B}$ - вектор-стовбець розміру $S-1$, що складається із елементів $F_{1,i}$ , $i = \overrightarrow{2,S}$, $k_0$ - нормуючий коефіцієнт, що формується за співвідношенням:

$$k_0 = \alpha_1 - \mathbf{KA},$$

де $\mathbf{A}$ - вектор-стовбець розміру $S-1$, що складається із початкових моментів $\alpha_i$, $i = \overrightarrow{2,S}$, порідної випадкової величини, то перетворення (1) можна трактувати як узгоджену поліноміальну фільтрацію випадкової послідовності $x_n$ в базисі степеневих перетворень [3].

В даній ситуації, під терміном «узгодження» розуміється забезпечення мінімально можливої (при відповідній степені поліному $S$) величини дисперсії випадкової послідовності $y_n^{(S)}$, що формується як різниця між відліками порідної послідовності $x_n$ та її поліноміальним перетвореннями виду (1), тобто

$$y_n^{(S)} = x_n - g_s(x_n) = \sum_{i=1}^{S} h_i \left[ (x_n)^i - \alpha_i \right], \tag{4}$$

де для узагальнення виразу (4) введені позначення $h_1 = 1$, $h_i = -k_i$, $i = \overrightarrow{2,S}$.

Узгоджена поліноміальна фільтрація може бути ефективно застосована для вирішення ряду прикладних статистичних задач, зокрема, при розпізнаванні детермінованих сигналів [5] або виявленні слабких сигналів невідомої форми [6] на фоні негаусових завад. Необхідним фактором синтезу алгоритмів виду (4) є наявність ймовірнісного опису завади (порідної випадкової величини) у вигляді скінченої послідовності її початкових моментів. При апріорній відсутності подібної інформації необхідно здійснити навчання системи, що можна реалізувати при наявності навчальної вибірки, яка містить послідовність відліків лише фонової завади. При цьому виникає задача оцінки точності знаходження «узгоджених» адаптивних параметрів поліноміальних фільтрів (коефіцієнтів стохастичних поліномів) в залежності від довжини навчальної вибірки.

**Результати дослідження.**

**1. Особливості вирішення СЛАР при неточно заданих даних**

У відповідності до постановки задачі, процедура адаптивного пошуку узгоджених значень параметрів поліноміальних степеневих фільтрів порядку $S$ полягає у розв'язку системи $S-1$ СЛАР виду (2). При цьому виникає проблема, пов'язана із неточністю формування значень коефіцієнтів системи рівнянь, оскільки в процесі навчання вони отримуються шляхом статистичного оцінювання і при обмеженій вибірці є випадковими величинами, які характеризуються певною точністю (середньоквадратичним відхиленням).

Відомо, що застосування в подібних ситуаціях прямих методів розв'язку (Крамера, Гауса та ін.) потребує додаткових спеціальних досліджень, пов'язаних із визначенням ступеня обумовленості матриць коефіцієнтів СЛАР, що дозволяє оцінити результуючу точність їх рішення [7]. Не менш важливим є цей фактор і при застосуванні ітераційних методів (Якобі, Зейделя та ін.), оскільки аналіз величини неточності заданих даних дозволяє оцінити оптимальне значення максимальної кількості ітерацій, необхідне для забезпечення узгодження початкових погрішностей і результуючої точності кінцевих рішень систем [8]. В обох випадках критерії оцінки точності формування СЛАР базуються на визначенні відносних величин сукупності похибок виду:

$$\delta F=\frac{\|\Delta \mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|},\ \delta B=\frac{\|\Delta \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|},$$

де $\|\cdot\|$ - оператор, що визначає евклідову норму відповідної матриці або вектора.

При нашій постановці задачі елементами матриці $\Delta\mathbf{F}$ та вектору $\Delta\mathbf{B}$ є середньоквадратичні відхилення статистичних оцінок відповідних центрованих корелянтів

$$\Delta F_{i,j}=\sqrt{D\left\{\hat{F}_{i,j}\right\}}=\sqrt{E\left\{\hat{F}_{i,j}-\left\{\hat{F}_{i,j}\right\}\right\}^2}\,, \qquad (5)$$

де $E\{\cdot\}$ і $D\{\cdot\}$ - оператори, що визначають математичне сподівання та дисперсію відповідних оцінок.

**2. Рекурентне статистичне усереднення**

У відповідності до співвідношення (3), оціночні значення центрованих корелянтів $\hat{F}_{i,j}$, необхідних для формування СЛАР, можуть визначені на основі оцінок початкових моментів $\hat{\alpha}_i$, які достатньо просто знайти шляхом усереднення степеневих перетворень $N$ вибіркових даних, тобто:

$$\hat{\alpha}_i=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n\right)^i\,. \qquad (6)$$

Оцінки виду (6) є слушними та асимптотично незміщеними [9]. І хоча величина дисперсії таких оцінок може відрізнятися від ефективних значень, проте їх основною перевагою є простота та відсутність обмежень на наявність будь-якої додаткової апріорної інформації.

У випадку, коли для навчання доступна достатньо велика послідовність (навчальна вибірка), і передбачається, що її ймовірнісні характеристики надалі будуть незмінними, то для формування оцінок моментів можна використати рекурентну алгоритмічну процедуру виду:

$$\hat{\alpha}_{i,n}=\frac{1}{n}\left[(n-1)\hat{\alpha}_{i,n-1}+\left(x_n\right)^i\right]. \qquad (7)$$

Очевидно, що з обчислювальної точки зору, спосіб оцінювання (7) порівняно із (6) є значно більш ефективним, оскільки суттєво зменшує обсяг пам'яті, необхідний для збереження проміжних даних. Крім того, застосування рекурентного оцінювання надає можливості для визначення необхідного обсягу вибірки в процесі навчання за рахунок поточного контролю точності отримуваних оцінок [10].

На рис.1, як приклад функціонування рекурентної процедури (7), представлені результати статистичного оцінювання послідовності перших 6-ти початкових моментів для реалізації випадкової величини із гамма-розподілом.

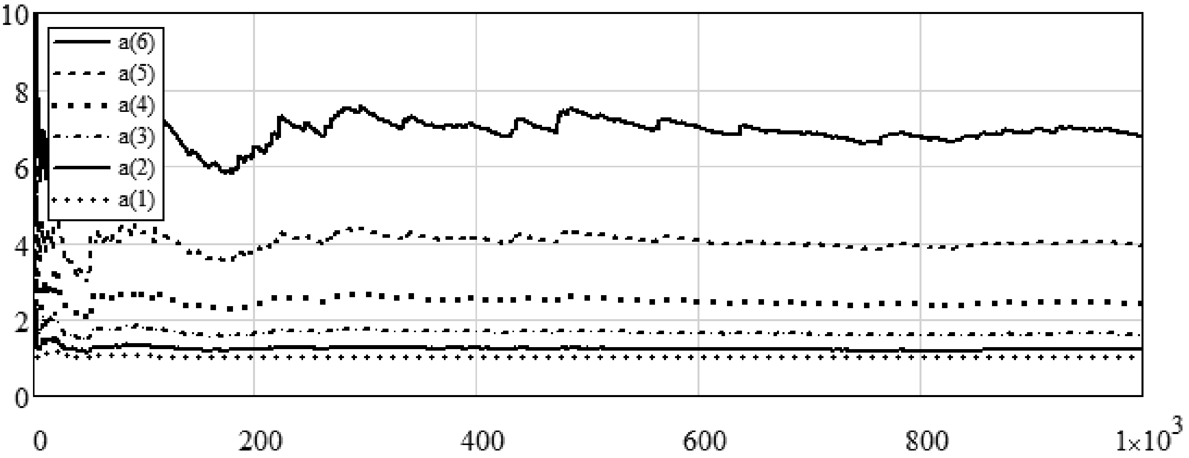


*Рисунок 1 – Рекурентні оцінки початкових моментів*

Аналіз наведених графіків та інших отриманих експериментальних результатів статистичного оцінювання моментів випадкових величин з різними розподілами (рівномірним, гаусовим, логнормальним, експоненційним, бігаусовим та ін.) вказує на загальну тенденцію зростання відносної величини дисперсій оцінок моментів при збільшенні їх порядку. Тому збільшення степені стохастичного поліному, який застосовується при синтезі поліноміальних фільтрів, вимагає не лише ускладнення самого алгоритму, але й потребує збільшення обсягу навчальної вибірки $N$, необхідної для адаптації параметрів, оскільки, як відомо, дисперсія оцінок (6) і (7) є величиною обернено пропорційною до $N$ [9].

**3. Ковзне оцінювання точності**

Враховуючи зазначені вище статистичні властивості оцінок (6), можемо трактувати послідовність оцінок $\hat{\vartheta}_n$ деякого параметра $\vartheta$ (початкового моменту або центрованого корелянту), що отримується в результаті застосування рекурентної процедури (7), як нестаціонарний дискретний випадковий процес, який характеризується математичним сподіванням, що дорівнює істинному значенню оцінюваного параметра та дисперсією, яка поступово (з кожним новим вибірковим значенням) лінійно зменшується.

Для того, щоб реалізувати поточний контроль точності оцінок значень параметрів застосуємо процедуру ковзного віконного згладжування типу:

$$\overline{z_n} = \frac{1}{M}\left[\overline{z_{n-1}} + z_n - z_{n-M}\right], \tag{8}$$

де $\overline{z_n}$ - поточне усереднення попередніх $M$ значень деякої випадкової послідовності $z_n$.

Користуючись (8), можемо наближено визначати величину середньоквадратичних похибок оцінювання параметра $\vartheta$ шляхом формування послідовності:

$$\Delta\hat{\vartheta}_n = \sqrt{\overline{\left(\hat{\vartheta}_n - \overline{\hat{\vartheta}}_n\right)^2}}\ . \qquad (9)$$

Послідовності виду (9) є випадковими величинами, дисперсія яких обернено пропорційна ширині ковзного вікна $M$. Врахувуючи властивості ковзного усереднення, необхідно зазначити, що поточне $n$-те значення послідовності $\Delta\hat{\vartheta}_n$ відображає оцінку точності параметра $\vartheta$, характерну для середини ковзного вікна, тобто точки $n - M/2$. Тому збільшення ширини вікна $M$, крім покращення якості усереднення, може призвести до надмірного зростання «інерційності» процедури адаптації, яке буде проявляється у надлишковості обсягу навчальної вибірки.

Як приклад застосування оцінок (9), на рис.2 наведена залежність (лінія «norma(dF)»), що демонструє динаміку зменшення відносної похибки рекурентного формування матриці коефіцієнтів **F** СЛАР для узгодження параметрів поліноміального фільтра при степені $S = 4$. Наведені графіки отримані для вхідної випадкової послідовності із гамма-розподілом та при застосуванні ковзного вікна шириною $M = 100$.

Оскільки обчислення норми матриць є достатньо складною і ресурсномісткою задачею, то для поточного контролю точності можна використати оціночні величини відносних похибок рекурентного визначення лише тих параметрів матриці **F** та вектору **B**, які вносять найбільш визначний вклад у величину їх норми. Про це свідчать графіки відносних похибок рекурентного оцінювання корелянту $F_{S,S}$ (лінія «dF(S,S)») та початкового моменту $\alpha_{2S}$ (лінія «da(2S)»), представлені на рис.2, що демонструють спільність характеру та мінімальну розбіжність між цими залежностями, яка нівелюється з ростом обсягу навчальної вибірки. Аналогічним чином, замість оцінок відносної точності визначення норми вектору **B**, можна використати оцінки центрованого корелянту $F_{1,S}$ або початкового моменту $\alpha_{S+1}$.

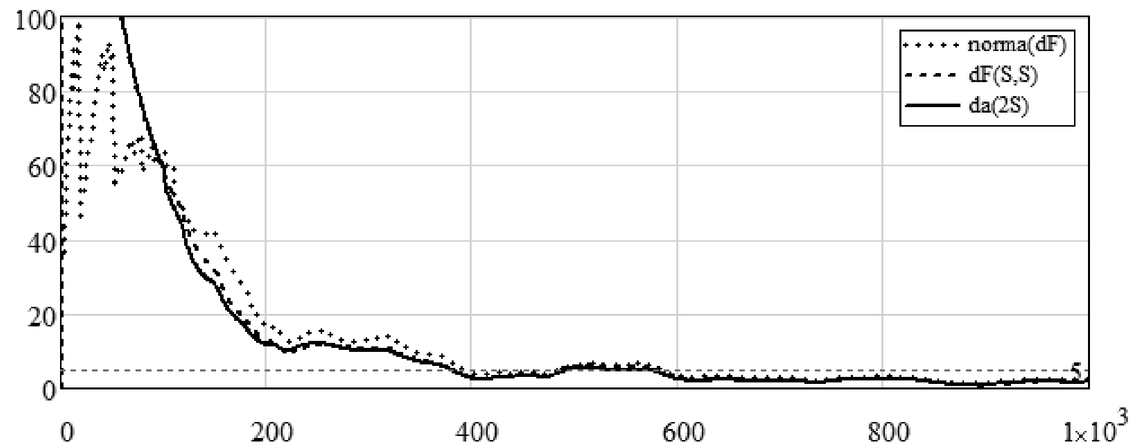


*Рисунок 2 – Відносні похибки рекурентного оцінювання (у відсотках)*

Аналіз наведеного прикладу показує, що якщо задатися відносною точністю на рівні 5%, то процес рекурентного оцінювання можна зупиняти приблизно після отримання 600 відліків навчальної послідовності. Зазначимо, що математично-коректні правила точного визначення моменту зупинки подібних експериментальних досліджень відомі достатньо давно і активно застосовуються при експрес-аналізі випадкових процесів [10]. Вони базуються на контролі різниць між поточними рекурентними оцінками параметрів і використовують елементи теорії серії успіхів [11].

**Висновки.** Наведена евристична методика визначення похибок формування коефіцієнтів систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які застосовуються для адаптивного пошуку узгоджених значень параметрів поліноміальних фільтрів. Отримана методика базується на рекурентному статистичному оцінюванні початкових моментів і центрованих корелянтів випадкових послідовностей та дозволяє реалізовувати поточний контроль необхідного обсягу навчальної вибірки за рахунок аналізу точності отримуваних оцінок у вигляді ковзного віконного усереднення їх середньоквадратичних відхилень.

*1. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. – М.: Радио и связь, 1998. – 310 с. 2. Кунченко Ю.П. Стохастические полиномы. – К.: Наук. думка, 2006. – 275 с. 3. Заболотній С.В. Зменшення дисперсії випадкових послідовностей на основі нелінійної поліноміальної узгодженої фільтрації методом ковзного вікна // Вісник ЧДТУ. – 2008, - № 2. – С.14-19. 4. Заболотній С.В., Коваль В.В., Салипа С.В. Виявлення відеосигналів із застосуванням нелінійних дискретних фільтрів з постійними коефіцієнтами // Електроніка та системи управління. – 2008. – № 3. – С.77-83. 5. Заболотній С.В. Синтез поліноміальних алгоритмів розпізнавання детермінованих сигналів на тлі завад засобами просторів Кунченка // Праці X Всеукраїнської міжнародної конференції «УкрОБРАЗ-2010»: – Київ, 2010. С.41-44. 6. Заболотный С.В., Салыпа С.В., Чепинога А.В. Синтез и моделирование непараметрических адаптивных обнаружителей энергетического типа с использованием стохастических полиномов Кунченко // Сб. научн. трудов 4-го Международного радиоэлектронного форума «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития»: – Харьков, 2011. – Т. I, Ч. 1. С.164-167. 7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: – М.: Наука, 1977. – 432 с. 8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: – М.: Наука, 1977. – 456 с. 9. Крамер Г. Математические методы статистики: – М.: Мир, 1975. – 648с. 10. Жовинский А.Н., Жовинский В.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов: – М.: Энергия, 1979. – 113 с. 11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1963. – 512 с.*

**В работе рассмотрено рекуррентное статистическое оценивание точности формирования коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений, применяемых для нахождения адаптивных значений параметров согласованных полиномиальных фильтров.**

**In this paper the recurrent statistical evaluation of precision of forming of coefficients of the systems of linear algebraic equalizations, applied for finding of adaptive values of parameters of the matched polynomial filters is considered.**