

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій

РОЗРОБЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИНХРОННОГО ДЕТЕКТОРА

© Анна Хома

Розроблено математичну модель синхронного детектора, яка враховує динамічні похибки операційного підсилювача. Обґрунтовано підхід до одержання спрощеної моделі, на основі якої розроблено алгоритми корекції. Досліджено, що застосування алгоритмів корекції дає можливість на два порядки розширити діапазон робочих частот синхронного детектора.

Phase detector mathematical model, that includes operational amplifier dynamical properties of is designed. Simplified model was received by linearization. This model was used for development of correction algorithms. Application of the developed algorithms allows to expand frequency range of the phase detector on two decades.

Вступ. Синхронне детектування широко застосовується для перетворення сигналів у різних областях науки і техніки, зокрема у телекомунікаційних пристроях, медичній апаратурі, вимірювальній техніці [1, 2, 3]. Крім забезпечення високої завадостійкості, синхронне детектування дає можливість здійснювати розклад комплексної напруги на складові у декартовій системі координат. Таке завдання є традиційним у вимірювачах комплексного опору та провідності [4, 5].

Як приклад, на рис. 1 наведено схему, яка ілюструє застосування синхронних детекторів для вимірювання активної та реактивної складових комплексної провідності.

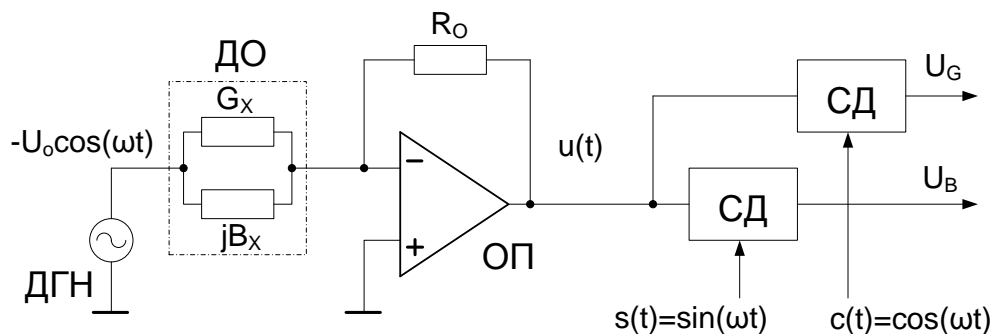


Рис. 1. Синхронні детектори у структурі вимірювача комплексної провідності

Активний перетворювач на операційному підсилювачі ОП здійснює перетворення комплексної провідності досліджуваного об'єкта ДО у пропорційну комплексну напругу:

$$u(t) = U_0 R_0 G_X \cos(\omega t) + U_0 R_0 B_X \sin(\omega t),$$

де G_X і B_X - активна та реактивна складові комплексної провідності;

R_0 - опір зразкового резистора;

U_0 і ω - амплітуда та частота джерела гармонічної напруги ДГН.

Далі, синхронні детектори СД залежно від прикладеного опорного сигналу виділяють синфазну U_G і квадратурну U_B компоненти напруги $u(t)$, що пропорційні відповідно активній та реактивній складовим вимірюваної комплексної провідності.

Постановка задачі та мета роботи. Принцип дії синхронних детекторів передбачає перемноження інформаційного і опорного сигналів з виділенням із одержаного добутку сталої складової. Найбільш простим та поширеним на цей час варіантом побудови є синхронний детектор релейного типу на операційному підсилювачі, схема якого наведена на рис. 2.

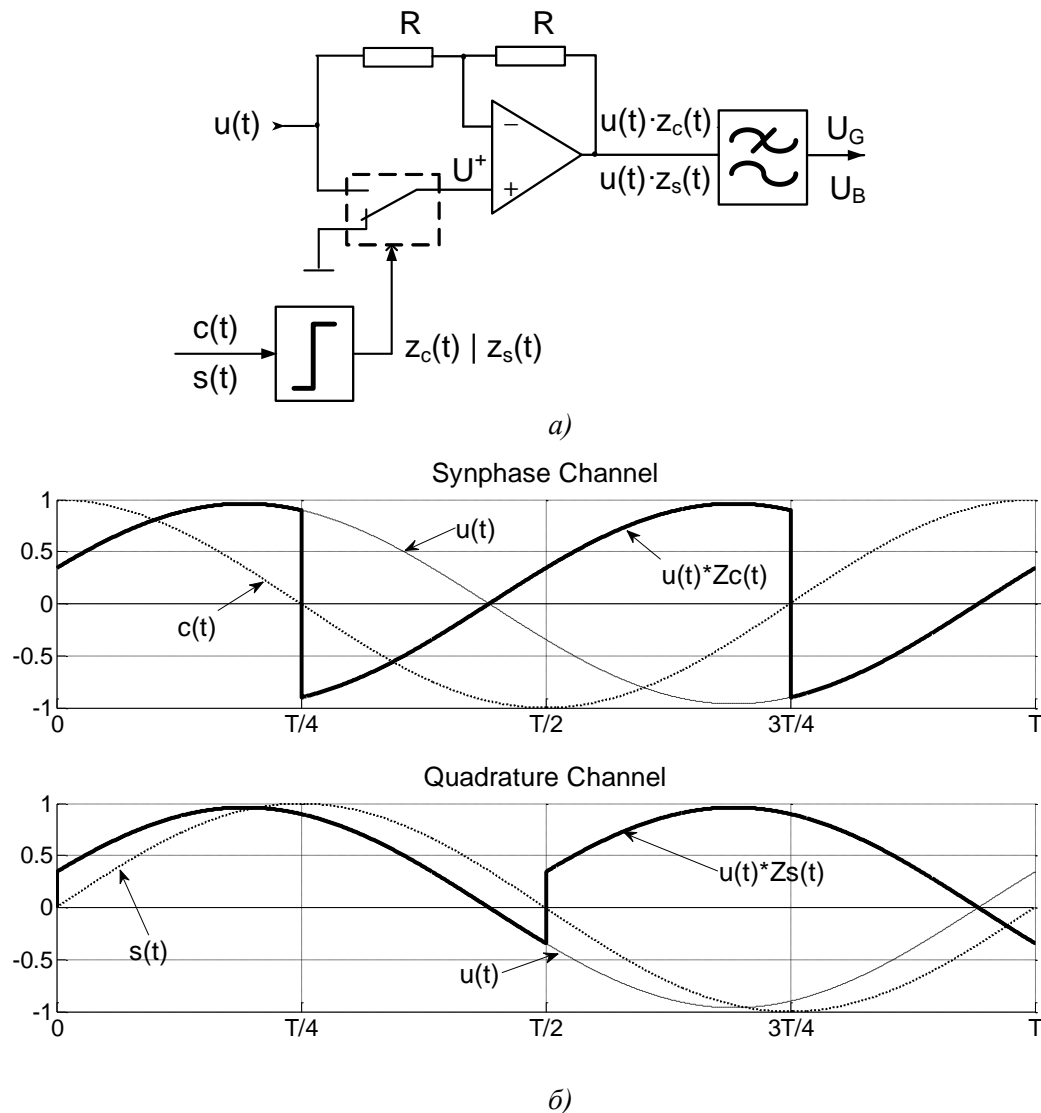


Рис. 2. Схема синхронного детектора (а) та вигляд сигналів у різних точках (б)

Базою фазоквадратурного розкладу комплексного сигналу $u(t)$ є ортогональні коливання: синфазне $c(t) = U_o \cos(\omega t)$ до зондувальної напруги, а також квадратурне - $s(t) = U_o \sin(\omega t)$. Для керування електронним аналоговим перемикачем компаратор формує послідовність прямокутних імпульсів

$$z_c(t) = \text{sign} [\cos(\omega t)] \quad \text{і} \quad z_s(t) = \text{sign} [\sin(\omega t)] \quad (1)$$

У ідеальному випадку схема на операційному підсилювачі забезпечує коефіцієнт передачі $K = -1$ (коли неінвертуючий вхід ОП коротко замкнений на землю - $U^+ = 0$) або $K = +1$ (коли неінвертуючий вхід ОП замкнений із входом СД - $U^+ = u(t)$), тобто виконує функції перемноження миттєвих значень сигналу $u(t)$ на ± 1 . Якщо перетворюваний сигнал подати у вигляді виразу

$$u(t) = G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (2)$$

то фільтр нижніх частот виділяє активну складову

$$G = \pi \overline{u(t) \cdot z_c(t)} = -\frac{\pi}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt \quad (3,а)$$

або реактивну -

$$B = \pi \overline{u(t) \cdot z_s(t)} = \frac{\pi}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt \quad (3,б)$$

за умови, що масштабувальний коефіцієнт фільтра - π , а T - період сигналу.

Однак інерційність операційного підсилювача, насамперед обмежена швидкість зміни його вихідної напруги (англ. Slew Rate) зумовлює виникнення похибок фазоквадратурного розкладу сигналу [6, 7]. Рівень цих похибок зростає у міру збільшення робочої частоти СД.

Метою роботи є розроблення придатної до використання у інженерній практиці математичної моделі синхронного детектора, а також застосування цієї моделі для алгоритмічного коригування динамічних похибок СД.

Розроблення математичної моделі синхронного детектора. Механізм виникнення паразитних фазових зсувів через обмежену швидкість зміни вихідної напруги операційного підсилювача ілюструє рис. 3.

У момент перемикавання $t = T_C = T/4$ вихідна напруга операційного підсилювача мала б стрибкоподібно змінитися із значення

$$u(T_C) = G \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) + B \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right) = B$$

до значення

$$u(T_C) = -G \cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) - B \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right) = -B,$$

але через обмежену динаміку операційного підсилювача змінюється поступово зі швидкістю S зміни напруги виходу ОП згідно виразу

$$l_G(t) = -S \cdot \left(t - \frac{T}{4}\right) + B \quad (4)$$

Кінець процесу перемикавання τ_G настає в момент, коли значення прямої (4) і коливання (2) збігаються (див. рис. 3)

$$-S \cdot \left(\tau_G - \frac{T}{4}\right) + B = -G \cos(\omega \tau_G) - B \sin(\omega \tau_G) \quad (5)$$

Наведене рівняння є нелінійним відносно невідомої величини τ_G , а отже не існує його точного аналітичного розв'язку. Можна провести лінеаризацію правої частини цього рівняння через заміну функції (2) її дотичною в точці T_C або ще краще в точці

$$\theta_G = T_C + \frac{B}{S} = \frac{T}{4} + \frac{B}{S},$$

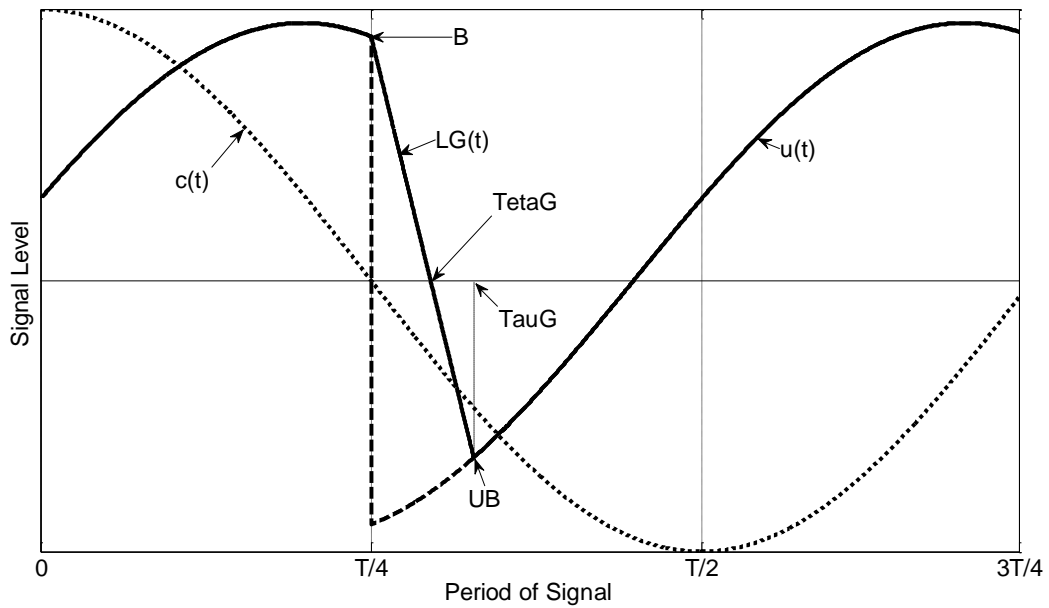
що відповідає моменту зміни полярності прямою (4). Після лінеаризації рівняння (5) набуває вигляду

$$-S \cdot \left(\tau_G - \frac{T}{4}\right) + B = D(\theta_G) \cdot \tau_G - B.$$

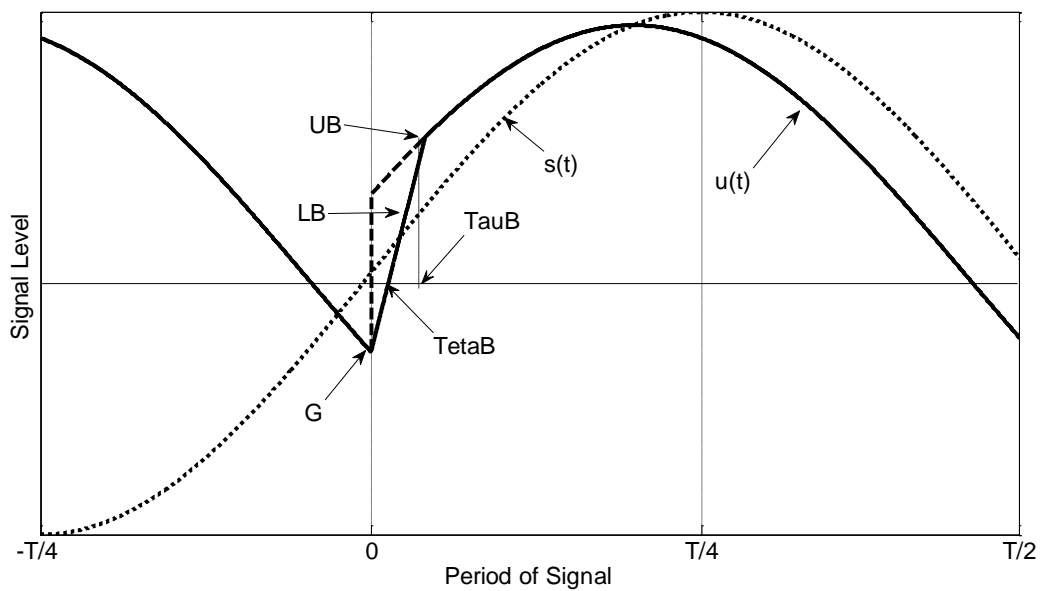
Розв'язок наведеного рівняння дає можливість визначити момент завершення перемикавання

$$\tau_G = \frac{T_0}{4} + \frac{2 \cdot B}{S - D(\theta_G)} \quad (6)$$

де $D(\theta_G) = \omega \cdot B \cdot \cos(\omega \theta_G) - \omega \cdot G \cdot \sin(\omega \theta_G) \approx \omega \cdot B$ - значення похідної сигналу (2) в точці θ_G .



a)



б)

Рис. 3. Ілюстрація виникнення похибок від обмеженої швидкості зміни вихідної напруги операційного підсилювача для синфазної (а) та квадратурної (б) складових

В аналогічний спосіб було одержано вирази для квадратурної складової:

- початковий момент перемикання $T_S = 0$;
- рівняння зростаючої прямої $s_B(t) = S \cdot t - G$;
- момент часу, коли змінюється полярність зростаючої напруги $\theta_B = G / S$;
- момент завершення перемикання

$$\tau_B = \frac{2 \cdot G}{S - D(\theta_B)}; \quad (7)$$

- значення похідної сигналу (2) в точці θ_B

$$D(\theta_B) = \omega \cdot B \cdot \cos(\omega\theta_B) - \omega \cdot G \cdot \sin(\omega\theta_B) \approx \omega \cdot B .$$

Дослідження динамічних похибок СД. Достатньо навіть візуально проаналізувати діаграми на рис. 3, щоб помітити різницю значень інтегралів під дійсним сигналом (графік грубою лінією) від ідеального випадку, що описується інтегралами (3,а) і (3,б).

Результат виділення синхронним детектором синфазної складової можна подати як суму двох інтегралів (див. рис. 3,а):

- під прямою $l_G(t)$ вираз (4) на інтервалі перемикання, тобто від $t_1 = T/4$ до $t_2 = \tau_G$

$$C_1 = \int_{\frac{T}{4}}^{\tau_G} \left[B - S \left(t - \frac{T}{4} \right) \right] dt = \left(B + S \frac{T}{4} \right) \left(\tau_G - \frac{T}{4} \right) - \frac{S}{2} \left(\tau_G^2 - \frac{T^2}{16} \right) = B \left(\tau_G - \frac{T}{4} \right) - \frac{S}{2} \left(\tau_G - \frac{T}{4} \right)^2$$

- під коливанням $u(t)$ на відрізку лінійної роботи операційного підсилювача, тобто між сусідніми інтервалами перемикання $t_2 = \tau_G$ і $t_3 = 3T/4$

$$C_2 = - \int_{\tau_G}^{\frac{3T}{4}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt = \frac{G}{\omega} + \frac{G}{\omega} \sin(\omega \tau_G) - \frac{B}{\omega} \cos(\omega \tau_G).$$

Отже, дійсне значення напруги на виході фільтра нижніх частот при виділенні синфазної складової становить

$$U_G = \frac{\pi}{T} \cdot (C_1 + C_2) = \frac{G}{2} [1 + \cos(\omega \tau_G)] + \frac{B}{2} \sin(\omega \tau_G) + \frac{\pi}{T} \left(\frac{S}{2} \Delta \tau_G^2 - B \Delta \tau_G \right), \quad (8)$$

де $\Delta \tau_G = \tau_G - T/4$ - інтервал перемикання ОП при виділенні активної складової.

За аналогією дійсне значення напруги на виході фільтра нижніх частот при виділенні реактивної складової становить (див. рис. 3,б)

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{\pi}{T} \int_0^{\tau_B} (S t - G) dt + \frac{\pi}{T} \int_{\tau_B}^{\frac{T}{2}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt = \\ &= \frac{B}{2} [1 + \cos(\omega \tau_B)] - \frac{G}{2} \sin(\omega \tau_B) + \frac{\pi}{T} \left(\frac{S}{2} \Delta \tau_B^2 - G \Delta \tau_B \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Похибка фазоквадратурного розділення детектором активної G і реактивної B складових визначається виразами

$$\Delta_G = U_G - G \quad \text{і} \quad \Delta_B = U_B - B$$

Аналіз виразів (8) і (9) доводить негативний взаємний вплив активної G і реактивної B складових на точність синхронного детектора, оскільки похибка фазоквадратурного розкладу напруги в нелінійний спосіб залежить від значення самих складових G і B , а вагові коефіцієнти цього впливу визначаються величинами S і ω .

На рис. 4 подано залежності вихідних напруг синхронного детектора від робочої частоти. Для прикладу прийнято, що детектор побудований на операційному підсилювачі із швидкістю наростання $S=100$ В/мкс. Симуляція стосувалася розкладу напруги амплітудою 1 В за однакових складових, тобто $G=B=1,0$ В. Спостерігається різке зниження точності синхронного детектора для робочих частот вище 100 кГц.

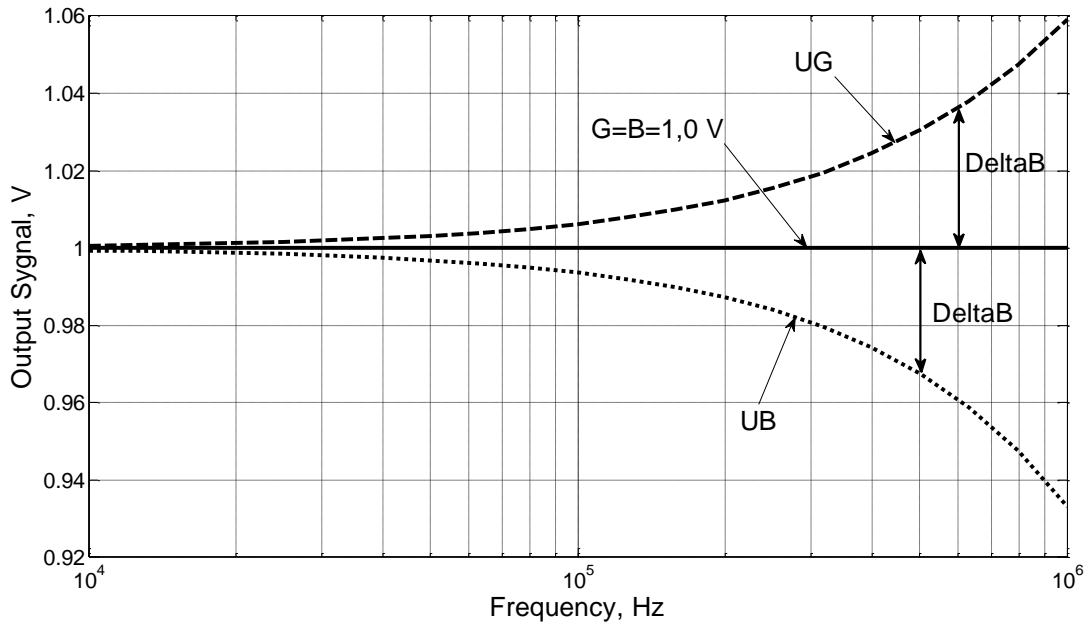


Рис.4. Залежність похибок синхронного детектора від робочої частоти

Одержані вирази (8) і (9) утворюють математичну модель СД релейного типу, яка враховує обмежену динаміку операційного підсилювача. Ця модель є досить складною, беручи до уваги залежності (6) і (7) для інтервалів перемикування, що фігурують у виразах U_G і U_B . Проте дослідження показали, що існує можливість істотного спрощення моделі синхронного детектора.

Спрощена математична модель синхронного детектора та оцінка її точності. Як можна відмітити на рис. 5 робота детектора на ідеальному операційному підсилювачі, який би керувався затриманими опорними сигналами під час виділення синфазної і квадратурної складових відповідно на час $\theta_G = B/S$ і $\theta_B = G/S$ забезпечує подібне значення сталої складової у вихідному сигналі ОП. У перерахунку на фазовий зсув значення цих затримок можна оцінити виразами:

$$\phi_G = B \frac{\omega}{S} \text{ і } \phi_B = G \frac{\omega}{S}. \quad (10)$$

Отже, динамічні похибки синхронного детектора для моделі можна врахувати вводячи еквівалентні паразитні фазові зсуви до опорних сигналів (1)

$$c_e(t) = \sin\left(\omega t - \omega \frac{B}{S}\right), \quad s_e(t) = \cos\left(\omega t - \omega \frac{G}{S}\right).$$

У спрощеній моделі детектора напруга на виході фільтра нижніх частот, що відповідає синфазній і квадратурній складовим, становить

$$V_G = -\frac{\pi}{T} \int_{\frac{T}{4} + \frac{B}{S}}^{\frac{3T}{4} + \frac{B}{S}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt = G \cos\left(B \frac{\omega}{S}\right) + B \sin\left(B \frac{\omega}{S}\right) \quad (11,a)$$

$$V_B = -\frac{\pi}{T} \int_{\frac{G}{S}}^{\frac{T}{2} + \frac{G}{S}} [G \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] dt = B \cos\left(G \frac{\omega}{S}\right) - G \sin\left(G \frac{\omega}{S}\right) \quad (11,b)$$

Неточність спрощеної моделі синхронного детектора можна оцінити виразами

$$E_G = (V_G / U_G - 1) \cdot 100\% \text{ і } E_B = (V_B / U_B - 1) \cdot 100\%.$$

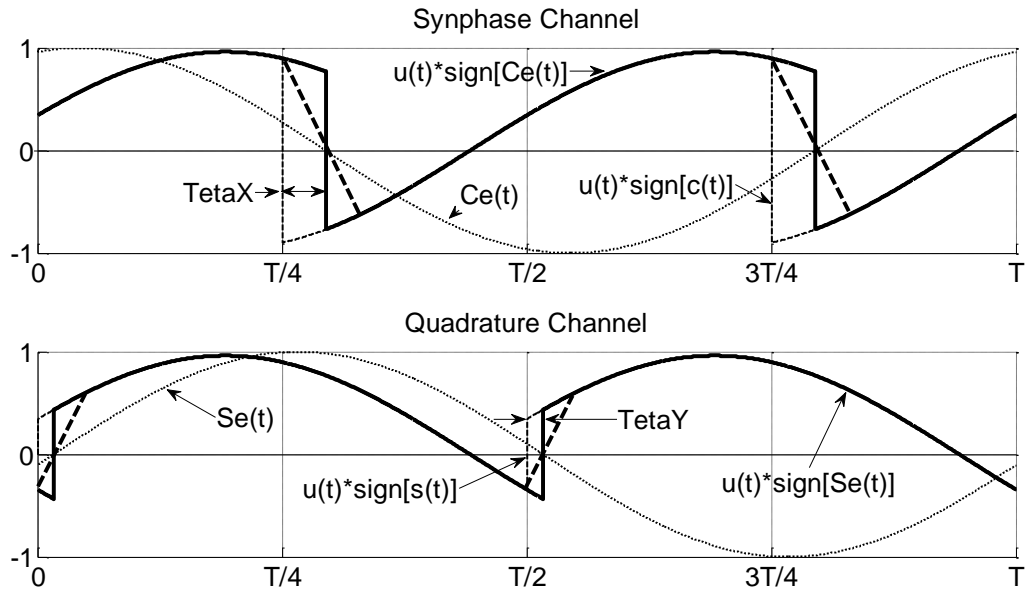


Рис.5. Порівняння сигналів на виході операційного підсилювача для повної та спрощеної моделей синхронного детектора

Результати оцінювання адекватності спрощеної моделі залежно від частоти для випадку рівності складових $G=B=1$ В наведено на рис. 6.

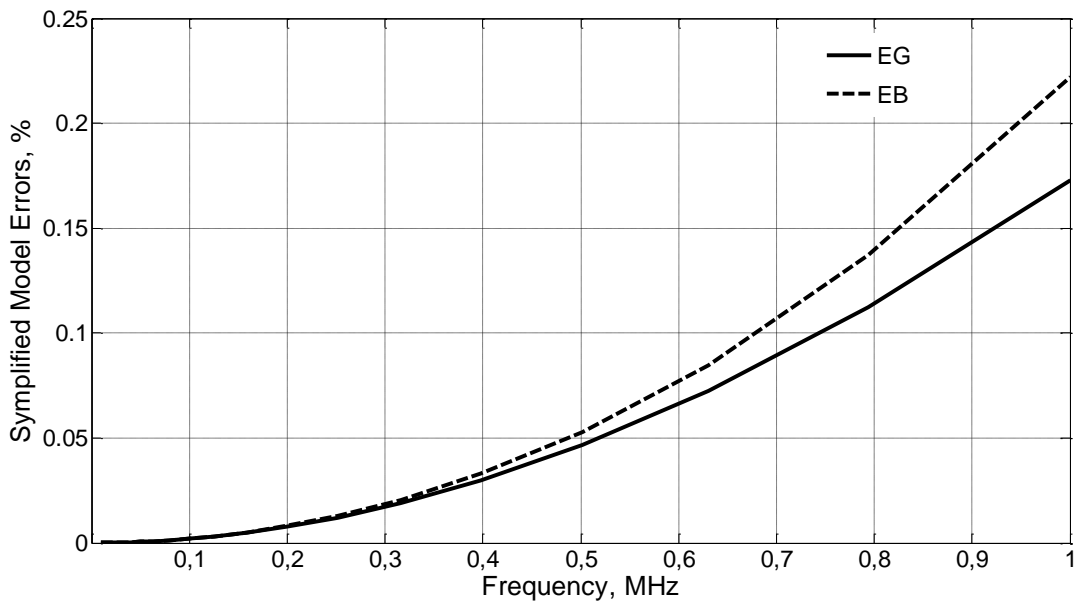


Рис. 6. Залежність похибок спрощеної моделі СД від частоти

Для спрощеної моделі фазоквадратурного детектора вирази (11), які відображають результати перетворення синфазної і квадратурної складових, можна розвинути записуючи фазові зсуви за формулами (10)

$$\begin{cases} V_G = G \cos\left(B \frac{\omega}{S}\right) - B \sin\left(B \frac{\omega}{S}\right) \\ V_B = B \cos\left(G \frac{\omega}{S}\right) + G \sin\left(G \frac{\omega}{S}\right) \end{cases} \quad (12)$$

Подані вирази утворюють систему нелінійних рівнянь відносно величин G і B , які відображають дійсні значення синфазної і квадратурної складових.

Провівши лінеаризацію цих рівнянь через заміну лише в аргументах тригонометричних функцій дійсні значення G і B на їх наближення, отримані як грубі результати перетворення, тобто

$$B \approx U_B \quad \text{і} \quad G \approx U_G \quad (13)$$

Отже після лінеаризації система рівнянь (12) набуває вигляду

$$\begin{cases} \tilde{G} \cos\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) - \tilde{B} \sin\left(U_B \frac{\omega}{S}\right) = U_G \\ \tilde{B} \cos\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) + \tilde{G} \sin\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) = U_G \end{cases} \quad (14)$$

(значки тильда над величинами G і B означають, що ці значення одержано з лінеаризованої системи рівнянь). Розв'язки цієї системи можна подати у вигляді

$$\tilde{G} = \frac{U_G \cos\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) - U_B \sin\left(U_B \frac{\omega}{S}\right)}{DN} \quad (15,а)$$

$$\tilde{B} = \frac{U_B \cos\left(U_B \frac{\omega}{S}\right) + U_G \sin\left(U_G \frac{\omega}{S}\right)}{DN} \quad (15,б)$$

$$DN = \cos\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) \cos\left(U_B \frac{\omega}{S}\right) + \sin\left(U_G \frac{\omega}{S}\right) \sin\left(U_B \frac{\omega}{S}\right)$$

а також розглядати як вирази алгоритму коригування грубих результатів перетворення U_G і U_B , тобто компенсації динамічних похибок синхронного детектора.

Залежності залишкових похибок, тобто похибок після алгоритмічного коригування результатів розкладу активної і реактивної складових, розраховані за виразами

$$\varepsilon_G = (\tilde{G}/G - 1) \cdot 100\% \quad \text{і} \quad \varepsilon_B = (\tilde{B}/B - 1) \cdot 100\%$$

разом з похибками синхронного детектора

$$\delta_G = (U_G/G - 1) \cdot 100\% \quad \text{і} \quad \delta_B = (U_B/B - 1) \cdot 100\%$$

наведено на рис. 7.

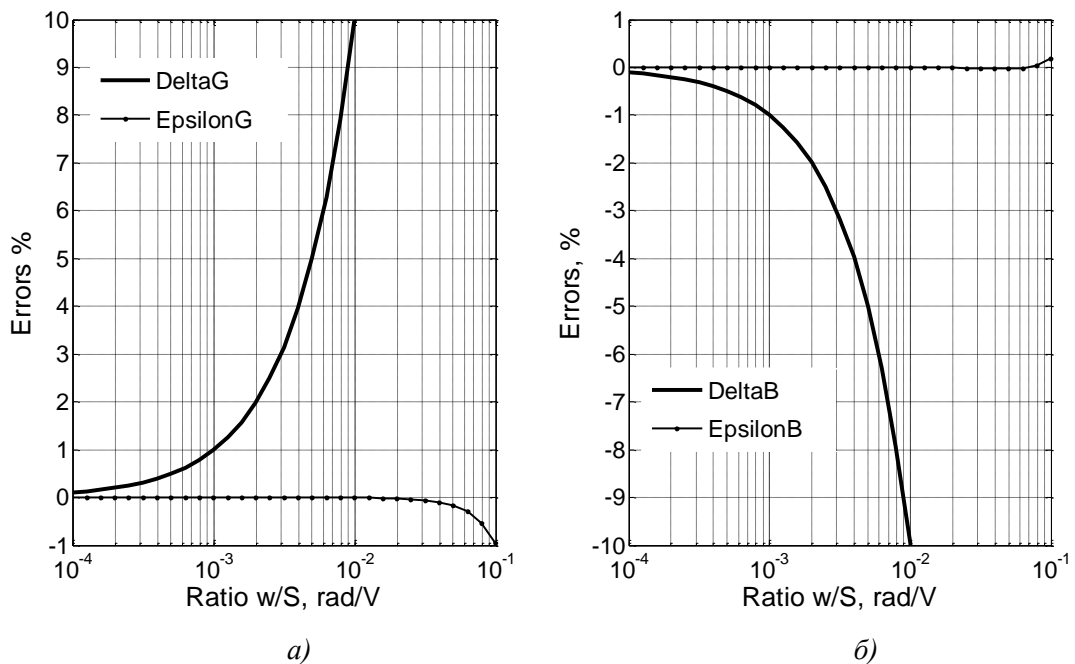


Рис. 7. Розширення діапазону робочих частот шляхом коригування динамічних похибок

З метою узагальнення залежності похибок подано не від частоти, а до відношення кругової частоти до швидкості наростання ω/S . Крім того, результати дослідження відображають складніші щодо коригування похибок випадки:

- рис. 7,а стосується виділення активної складової $G = 0,1 V$ на тлі переважаючої реактивної $B = 1,0$;
- рис. 7,б стосується виділення реактивної складової $B = 0,1 V$, на тлі переважаючої активної $G = 1,0$.

Як впливає із наведених графіків застосування алгоритмів коригування динамічних похибок синхронних детекторів дає можливість на два порядки розширити діапазон робочих частот вимірювача активної та реактивної складових комплексної провідності. Алгоритми втрачають ефективність, коли відношення $\omega/S > 0,05$, через зростання залишкових похибок. Можна вказати на два джерела залишкових похибок:

- неточність спрощеної моделі (11);
- неточність привнесена лінеаризацією системи рівнянь (14).

Висновки. На основі розгляду механізму виникнення паразитних фазових зсувів через обмежену швидкість зміни вихідної напруги операційного підсилювача побудовано математичну модель синхронного детектора. Складність моделі утруднює її застосування в інженерній практиці. Обґрунтовано можливість істотного спрощення математичної моделі СД шляхом введення еквівалентних фазових зсувів. Дослідження підтвердили адекватність спрощеної моделі у широкому діапазоні частот.

Спрощена модель послужила підставою до розроблення алгоритмів коригування динамічних похибок СД. Результати дослідження показали високу ефективність цих алгоритмів для підвищення точності фазоквадратурного розділення складових. Зокрема коригування похибок синхронних детекторів у складі вимірювача комплексної провідності дає можливість на два порядки розширити діапазон робочих частот.

1. Schmalzel J.L., Rauth D.A. *Sensors and signal conditioning. // Instrumentation & Measurement Magazine, IEEE. 2005. – Vol. 8. № 2.– p. 48 –53.* 2. Рыбин Ю.К., Будейкин В.П. *Синхронные детекторы в селективных измерительных приборах // Измерения, контроль, автоматизация. – 1984. - №30. С. 53-61.* 3. Готра та ін. *Завадостійкий сигнальний перетворювач на базі синхронного детектора // Вимірювальна техніка та метрологія. - №71, 2010, с.110-116.* 4. Гаврилюк М.А., Соголовский Е.П. *Электронные измерители CLR. - Львов: Вища школа, 1978. - 134с.* 5. *The Impedance Measurement Handbook. A Guide to Measurement Technology and Techniques. Agilent Technologies, Inc. Printed in USA, 2006, 5950-3000.* 6. Достал И. *Операционные усилители: Перевод с английского.- М.: Мир, 1982.- 512 с.* 7. Соклоф С. *Аналоговые интегральные схемы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 583 с.*