УДК 681.3.06+519.6(075.8)
Л. І. Танцюра
Державний університет телекомунікацій, Київ

АНАЛІЗ НАДІЙНОСТІ КОМП'ЮТЕРНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ БІНАРНОЇ ДІАГРАМИ РІШЕНЬ

Досліджено спосіб оцінки надійності комп'ютерних мереж на основі бінарної діаграми рішень (БДР). Розглянуто різні алгоритми обчислення надійності комп'ютерної мережі на основі БДР: алгоритм факторизації, алгоритм, що ґрунтується на пошуку мінімальних шляхів або перерізів, алгоритм створення БДР без отримання булевого виразу. Методи обчислення надійності на основі БДР дають змогу обчислити надійність мережі із сотень елементів.

Ключові слова: надійність мережі, мінімальний шлях, мінімальний переріз, декомпозиція Шеннона, бінарна діаграма рішень (БДР), алгоритм Дейкстри, 2-термінальна надійність.

L. I. Tantsiura
State university of Telecommunication, Kyiv

COMPUTER NETWORK RELIABILITY ANALYSIS BASED ON BINARY DECISION DIAGRAM

The present paper is aimed at investigating modelling and analysis techniques for the calculating the reliability of computer communication network using binary decision diagram. The network can be represented in a form of a graph, whose elements (vertices and edges) are considered as binary objects characterized by a working or a failed condition. Nodes and communication links of computer network may fail with known probability. The network reliability is defined as the probability that all nodes, or a subset of the nodes, of the graph communicate through at least one path of working edges. Failure of a single component may directly affect the functioning of a network. Determination of the probability properties of the network is based on Binary Decision Diagram and Shannon's decomposition principle. Binary decision diagram is a modern data structure proved to be compact in representation and efficient in manipulation of Boolean formulas. A path is defined as asset of edges so that if these edges are all up, the system is up. A path is minimal if it has no proper subpaths. A cut is defined as a set of edges so that if these edges are all down, the system is down. A cut is minimal if it has no proper subcuts. Different approaches are based on the use of BDD. One is factoring algorithm. The idea is to choose an edge and break the model down into two cases: the first assumes the edge has failed, the second assumes it has not failed. For each case, a new reliability graph is built by taking into account the behavior of the chosen edge. The alternative class of methods is to directly obtain minpaths or mincuts. Minpaths are searched by means of the Dijkstra algorithm, while mincuts are searched by means of a recursive algorithm. In these methods we first enumerate all the minpaths and mincuts of the given network and then the reliability expression is evaluated using different methods, like inclusion-exclusion method or sums of disjoint products. There are some disadvantages in the above methods. In the factoring algorithm, the number of factored reliability graphs will increase exponentially with the number of edges increases. In the minpaths or mincuts methods, as the number of edges becomes large, the number of minpaths or mincuts will be large and

inclusion-exclusion or sums of disjoint products expression will be increased too large. Size of BDD strongly depends on the ordering of variables. The size of BDD means the total number of non-terminal vertices in the BDD and the number of vertices in particular level. There is no polynomial search algorithms for optimal variable ordering.

The present paper introduces BDD representation of the 2-terminal connectivity of a graph without preliminary search for the minpaths or mincuts. The algorithm starts from the source node and visits the graph until the destination node is reached. The BDD construction starts recursively once the destination node is reached. The BDD's of the nodes along a path from source node to destination node are combined in AND. If a node possesses more than one outgoing edge the BDD of the paths starting from each edge are combined in OR. A bridge network with directed arcs is considered as an example under assumption that only arcs can failure.

Key words: network reliability, minpath, mincut, Shannon's decomposition, Binary Decision Diagram (BDD), Dijkstra algorithm, 2-terminal reliability.

Вступ

Аналізу надійності мережі приділяється значна увага під час проектування та технічного обслуговування комп'ютерних та телекомунікаційних мереж. Відмова кожного компонента може безпосередньо впливати на функціонування мережі. Тому надійність кожного компонента мережі є вирішальним фактором в обчисленні надійності мережі, а задача ефективного оцінювання роботи компонентів мережі з урахуванням їх взаємозв'язків і взаємовпливу є *актуальною*. Результати такого аналізу є основою для розроблення методів оптимального управління мережевими ресурсами та навантаженням [1, 2].

Огляд досліджень та публікацій

Сучасні комп'ютерні та телекомунікаційні мережі належать до категорії складних систем [3, 4]. Ускладнення телекомунікаційних мереж є прямим наслідком постійного зростання відповідальності виконуваних ними функцій, складності й різноманіття цих функцій. В цих умовах чи не найважливішого значення набувають питання забезпечення високої надійності інфокомунікаційних мереж, і питання оцінювання надійності та оптимізації за цим ключовим показником ефективності складних систем є унікальною проблемою [5, 6].

Для оптимізації складних систем за показником надійності розроблено численні формальні методики і з цих питань опубліковано багато робіт [3, 7]. В [8, 9] розглянуто основи теорії функціональної стійкості складних комп'ютерних систем, на основі яких побудовані інфокомунікаційні мережі.

Традиційні методи аналізу надійності мережі [9] ґрунтуються на пошукових алгоритмах повного перебору, які забезпечують кількісну і якісну інформацію про зв'язки в мережі, її надійність і вразливість. Їх можна поділити на такі категорії: метод повного перебору; редукція або декомпозиція; прямі методи; метод наближення.

Важливо зауважити, що вказані методи часто комбінуються один з одним. Метод повного перебору – найпростіший, але найменш ефективний метод (кількість можливих станів зростає експоненційно). Складнішим є перебір мінімальних шляхів та мінімальних перерізів і представлення функції структури у диз'юнктивній нормальній формі. У вигляді бінарної діаграми рішень функцію структури отримують за допомогою декомпозиції Шеннона, найпоширенішого методу розкладення.

Другий класичний метод – метод включення-виключення. В [10] розглянуті методи аналізу надійності систем зі складними структурами, зокрема, ієрархічною, а саме:

– метод надійнісного аналізу на основі декомпозиції симетричної або несиметричної ієрархічної структури простого підпорядкування на вкладені підструктури;

– метод логіко-імовірнісного траєкторного моделювання для надійнісного аналізу несиметричних ієрархічних структур складного підпорядкування.

Постановка завдання

Метою представленої роботи є дослідження використання бінарної діаграми рішень для аналізу надійності комп’ютерних мереж, структуру яких можна подати у вигляді графу $G=(V,E)$, в якому елементи вважаються бінарними об’єктами, що характеризуються двома станами: працюють і не працюють. Стан системи і кожного елемента можна описати за допомогою булевих змінних, які набувають значення 1 (у випадку працездатності) і 0 (у випадку відмови). Надійність мережі визначається як ймовірність того, що всі вузли або підмножина вузлів графа зв’язані хоча б через один шлях ребер, що працюють.

Бінарна діаграма рішень

Бінарна діаграма рішень (БДР) є формою представлення булевої функції від змінних у вигляді напрямленого ациклічного графу, що складається з внутрішніх вузлів (помічених x_i), кожен з яких має по два породження, і двох термінальних вузлів (помічених 0 і 1), кожен з яких відповідає одному з двох значень булевої функції. Якщо F – булева функція від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, то, використовуючи декомпозицію Шеннона, отримаємо такий вираз

$$F = x_1 F_{x1=1} \vee \overline{x_1}\, F_{x1=0}. \tag{1}$$

Будь-який булевий вираз можна подати у вигляді бінарного дерева. Декомпозицією Шеннона по змінній x_i називається метод представлення булевої функції від n змінних у вигляді суми двох підфункцій від $n-1$ змінних, кожна з яких може бути розкладена на дві підфункції від $n-2$ змінних. Бінарна діаграма рішень називається впорядкованою, якщо різні змінні з’являються в тій самій послідовності на всьому шляху від кореневого вузла графа. Бінарна діаграма рішень називається скороченою, якщо для графу застосовані такі два правила скорочення:

- злиття будь-яких ізоморфних підграфів;
- видалення всіх вузлів з ізоморфними породженнями.

Порядок змінних у БДР сильно впливає на розмір БДР. Порядок називається оптимальним, якщо генерується БДР мінімального розміру.

Бінарну діаграму рішень можна створити, використовуючи стандартні логічні операції [11]. Тобто якщо змінна x_i набуває значення “істина” з ймовірністю p_i (значення хибне з ймовірністю $(1-p_i)$), можемо обчислити ймовірність функції $\Pr\{F\}$, використовуючи рівняння (2) рекурсивно.

$$\Pr\{F\} = p_1 \Pr\{F_{x_1=1}\} + (1-p_1)\Pr\{F_{x_1=0}\} = \Pr\{F_{x_1=0}\} + p_1(\Pr\{F_{x_1=1}\} - \Pr\{F_{x_1=0}\}). \tag{2}$$

Аналізуючи надійність мережі, алгоритми, основані на використанні БДР, можна поділити на три класи:

1) алгоритми, що ґрунтуються на прямому алгоритмі факторизації [12];
2) алгоритми, що ґрунтуються на пошуку мінімальних шляхів (перерізів) [13];
3) алгоритми створення БДР за допомогою перегляду графу без отримання булевого виразу.

Обчислення надійності методом факторизації

Створення БДР за допомогою факторизації представлене в [14]. Вираз $F_{x_i=1}$ у рівнянні (1) – це граф, що отримується, якщо ребро x_i функціонує, тобто вважається надійним. Ця операція називається скороченням [12] і означає видалення ребра з’єднанням вузлів відправника і отримувача. Подібно вираз $F_{x_i=0}$ в рівнянні (1) – це граф, що отримується, якщо ребро x_i відмовило. Ця операція називається видаленням і означає видалення ребра з роз’єднанням вузлів відправника і отримувача.

Вираз, отриманий за допомогою факторизації, декомпозиції Шеннона (1), можна переписати так:

$$G = x_i M \vee \overline{x_i} L \tag{3}$$

де M – граф, отриманий з графа G з'єднанням ребра x_i і L – граф, отриманий видаленням ребра x_i. В графічному представленні у вигляді двійкового дерева надалі відображатимемо скорочення в лівій гілці безперервною лінією і видалення в правій гілці пунктирною лінією.

Візьмемо підмножину $K(\le N_v))$ вершин, зв'язок K терміналів – це булева функція, що набуває значення "істина", якщо K вершин зв'язані (враховуючи спрямування ребер у напрямленій мережі), і може бути представлена за допомогою БДР, з використанням рекурсивного покрокового скорочення (3) довільної впорядкованої послідовності ребер. На кожному кроці декомпозиції контролюємо K – зв'язність на скорочених графах M і L. Якщо K – зв'язність на підграфі M оцінюється як істина (за будь-якої комбінації змінних, що залишилися), то термінальний вузол 1 БДР досягнуто, якщо K – зв'язність на підграфі L оцінюється як хибна, то досягнуто термінальний вузол 0, в іншому випадку ми продовжуємо декомпозицію. У напрямлених мережах перевіряється напрямленість дуг.

Розглянемо приклад 1. Мережа типу "сітка" з напрямленими ребрами має структуру, представлену на рис. 1, і ми маємо обчислити надійність між вузлами S і T. Використовуємо таку послідовність змінних $x_2 \mathbf{p}\, x_6 \mathbf{p}\, x_3 \mathbf{p}\, x_5 \mathbf{p}\, x_4 \mathbf{p}\, x_1$

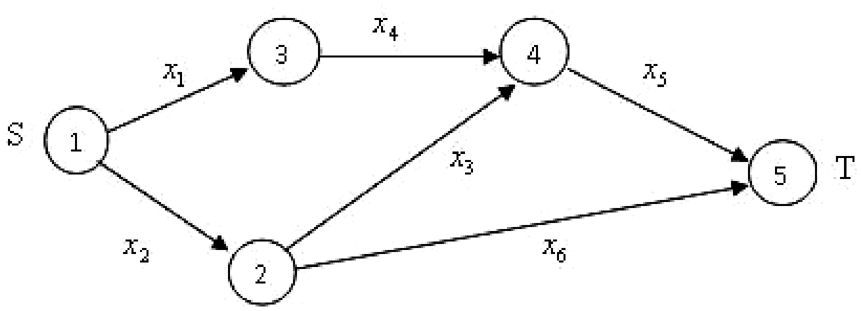

Рис. 1. Напрямлена мережа типу "сітка"

Обчислення ймовірності за допомогою БДР на рис. 2 виконується рекурсивно з використанням рівняння (2). Обчисливши ймовірність в проміжних вузлах, отримаємо ймовірність всієї мережі між вузлами у формулі (4)

$$\begin{aligned} R = {} & p_1p_4p_5 + p_2p_6 + p_2p_3p_5 - p_1p_2p_4p_5p_6 - p_1p_2p_3p_4p_5 - \\ & -p_2p_3p_5p_6 + p_1p_2p_3p_4p_5p_6 \end{aligned} \tag{4}$$

Обчислення 2-термінальної надійності через аналіз мінімальних шляхів

Шлях H – мінімальний шлях, якщо будь-яка підмножина елементів H не є шляхом. Нехай h – кількість мінімальних шляхів між відправником S і отримувачем T у графі $G = (V, E)$ і нехай $H_1, H_2,, H_h$ – h мінімальних шляхів. Всі елементи мінімального шляху повинні працювати, щоб існував зв'язок. Елементи мінімального шляху пов'язані логічним AND. Однак, якщо одного із мінімальних шляхів достатньо, щоб мережа була працездатною, зв'язок між S і T можна подати як логічне OR мінімальних шляхів.

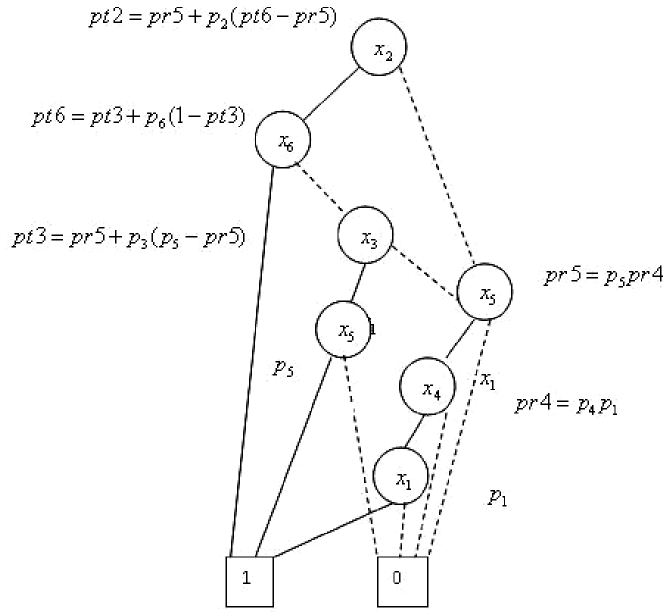

Рис. 2. Обчислення ймовірності схеми рис. 1

2-термінальна надійність може бути обчислена за формулою (5)

$$R_{(s,t)} = P\{S_{(s,t)}\} = P\{H_1 \vee H_2 \vee ...H_h\} \tag{5}$$

Надійність мережі згідно з формулою (5) можна обчислити як ймовірність об'єднання неперетинних подій за допомогою різних методів [11], але ми розглядаємо тільки аналіз на основі БДР.

Використовуючи алгоритм Дейкстри, визначаємо, що мережа на рис. 1 має три мінімальні шляхи (6)

$$S_{1-4} = H_1 \vee H_2 \vee H_3$$
$$H_1 = \{x_1, x_4, x_5\} H_2 = \{x_2, x_6\} H_3 = \{x_2, x_3, x_5\} \tag{6}$$

Відповідно до вищенаведених формул наявність зв'язку між S і T можна виразити формулою

$$S_{1-6} = x_1x_4x_5 \vee x_2x_6 \vee x_2x_3x_5 \tag{7}$$

Використовуючи ту саму послідовність змінних, що і в попередньому розділі, і декомпозицію Шеннона для булевого виразу, будуємо БДР. Якщо об'єднати ідентичні піддерева і термінальні вузли 1 та 0, отримаємо БДР, зображену на рис. 3.

Подібно до наведеного методу можна генерувати мінімальні перерізи замість мінімальних шляхів, де мінімальний переріз – це підмножина ребер, відмова яких роз'єднує вузли відправника і отримувача. Алгоритми обчислення надійності мережі через аналіз мінімальних перерізів ефективніші, ніж алгоритми, основані на аналізі мінімальних шляхів для тих мереж, в яких кількість мінімальних перерізів менша, ніж кількість мінімальних шляхів. Мінімальні шляхи дають якісну інформацію про вигідніші зв'язки між вузлами відправника і отримувача, тоді як мінімальні перерізи дають корисну інформацію про критичні події, які можуть роз'єднати два вузли і перервати зв'язок між двома частинами мережі.

Обчислення 2-термінальної надійності методом перегляду графа

Представлення за допомогою БДР 2-термінального зв'язку графа можна отримати без попереднього пошуку мінімальних шляхів або мінімальних перерізів. БДР можна побудувати за допомогою рекурсивного перегляду графа без отримання булевого виразу [15]. Розглянемо граф і два вузли S і T (рис. 1). Починаючи з вузла T (згідно з вибраною стратегією перегляду графа) рухаємося, поки не потрапимо у вузол T. Побудова БДР починається рекурсивно, після досягнення вузла T. Ребра, що розміщені на шляху з вузла S до вузла T, об’єднані операцією кон’юнкція, якщо ж вузол має більш ніж одне ребро, що виходить, шляхи об’єднані операцією диз’юнкція.

Розглянемо алгоритм на прикладі рис. 1. Граф переглядається відповідно до послідовності номерів вузлів. Починаючи з вузла відправника S (вузол 1), рухаємося до вузла 2 по ребру x_2 потім до вузла 4 по ребру x_3 і до вузла T (вузол 5) по ребру x_5. Будувати БДР починаємо з ребра x_5. Оскільки вузол 4 має тільки одне ребро, що виходить x_5, повертаємося у вузол 2. Створюємо БДР для ребра x_3 і між двома створеними БДР застосовується операція диз’юнкції $(x_3 \vee x_5)$. Повернувшись у вузол 2 через ребро x_6, досягаємо вузол 5 і будуємо відповідну БДР, що з’єднується з попередньою БДР операцією кон’юнкції $(x_3 \vee x_5) \vee x_6$. Оскільки більше немає ребер, що виходять з вузла 2, повертаємося у вузол 1 і нова БДР, що представляє ребро x_2, з’єднується з уже побудованою операцією диз’юнкції $((x_3 \vee x_5) \vee x_6) \wedge x_2$ Подібно будується БДР, що представляє шлях (x_1, x_4, x_5) між вузлами 1 і 5. Нарешті БДР двох шляхів, що виходять з вузла 1, об’єднуються операцією кон’юнкції. Отримаємо БДР, зображену на рис. 4, що відображає зв’язок між вузлами 1 і 5 такою функцією (8):

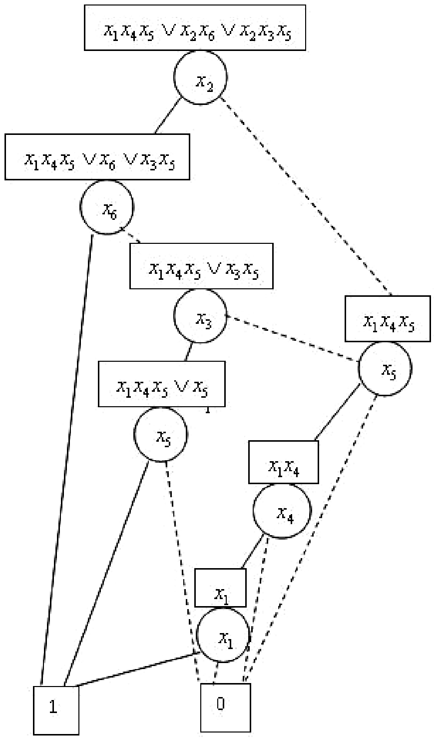

Рис. 3. Представлення за допомогою БДР рівняння (8)

$$(x_1 \wedge x_4 \wedge x_5) \vee (((x_3 \wedge x_5) \vee x_6) \wedge x_2) \tag{8}$$

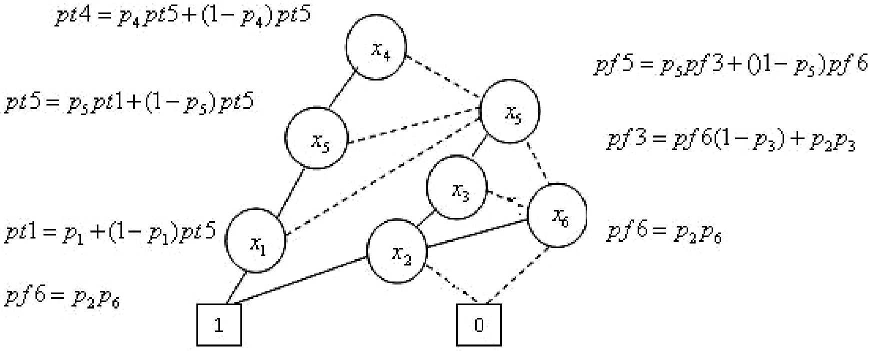

Рис. 4. Обчислення ймовірності БДР методом перегляду графу

Послідовність, в якій змінні з’являються на рис. 4, відрізняється від послідовності змінних на рис. 3, тому дві БДР мають різний вигляд, хоча представляють одну булеву функцію. Надійність мережі обчислюють рекурсивно, використовуючи рівняння (2), хоча за допомогою цього алгоритму БДР отримується прямо, без булевого виразу. Будь-яка послідовність вузлів у БДР, що з’єднують кореневий вузол і термінальний вузол 1, – це шлях з’єднання в мережі (необов’язково мінімальний), і будь-яка послідовність вузлів у БДР, що з’єднують кореневий вузол і термінальний вузол 0 – це шлях перерізу в мережі (необов’язково мінімальний).

Висновок

У статті розглянуто методи аналізу надійності комп'ютерних мереж на основі бінарної діаграми рішень, що являє собою представлення булевої функції від змінних, що описують структурну надійність мережі, у вигляді ациклічного напрямленого графа. Методи обчислення надійності на основі БДР дають змогу обчислити надійність мережі із сотень елементів. Обчислення надійності мережі є NP-повною задачею [16]. Головною проблемою аналізу надійності системи є зростання складності структур комп'ютерних мереж, яка зумовлює значні затрати обчислювальних ресурсів. Вирішення цієї проблеми вимагає пошуку підвищення ефективності методів і алгоритмів аналізу надійності мережі.

1. Торошанко Я. І. Задачі моніторингу та аналізу параметрів телекомунікаційних мереж / Я. І. Торошанко, А. О. Булаковська, М. С. Височіненко, В. С. Шматко // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2014. – № 3. – С. 62–69. 2. Виноградов Н. А. Исследование характеристик полезной пропускной способности в условиях меняющейся нагрузки / Н. А. Виноградов, Н. Н. Лесная, А. С. Савченко // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. – К.: НАУ, 2009. – Вип. 4(28). – С. 28–31. 3. Рябинин И. А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И. А. Рябинин. – Санкт-Петербург : Политехника, 2001. 4. Каштанов В. А. Теория надежности сложных систем / В. А. Каштанов, А. И. Медведев. – Москва : Физматлит, 2010. – 608 с. 5. Parmenter D. Key Performance Indicators (KPI): Developing, Implementing, and Using Winning KPIs / D. Parmenter. – 2nd ed. – JohnWiley&Sons, 2010. – 320 p. 6. Торошанко Я. И. Оптимизация больших информационных систем с диагонально-доминантными матрицами ключевых показателей эффективности / Я. И. Торошанко, В. С. Шматко, М. С. Высочиненко, А. А. Булаковская // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 5(9). – С. 60–65. 7. Newman M. E. The structure and function of complex networks / M. E. Newman // SIAM Review. – 2003. – № 45. – P. 167–256. 8. Кравченко Ю. В. Методика оцінки стану складних об'єктів та процесів на основі методів інтелектуальної обробки даних / Ю. В. Кравченко, Р. А. Миколайчук // Міжнародна науково-практична конференція "Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI)". – Євпаторія: 27–31 травня 2012 р. – С. 100–101. 9. Барабаш О. В. Забезпечення функціональної стійкості складних технічних систем / О. В. Барабаш, Б. В. Дурняк, Д. М. Обідін // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова. – 2012. – Вип. 64. – С. 36–41. 10. Бєляєв В. П., Волочій Б. Ю., Озірковський Л. Д., Павлів М. В. Оцінка ефективності методів розрахунку показників зв'язності в структурному аналізі радіоелектронних комплексів // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Теоретична електротехніка". – Львів: Світ. – 1998. – Вип. 54. – С. 8–14. 11. Agrawal A., and Barlow R. E. (1984). A survey of network reliability and domination theory. Operations Research 32, 478{492. Albert R. and A. L. Barabasi (2002). 12. Sekine K. and H. Imai (1995). A unified approach via bdd to the network reliability and path number. Technical Report TR-95-09. Dep tInformation Science, University of Tokyo. 13. Balan A. O. and Traldi L. Preprocessing minpaths for sum of disjoint products // IEEE Transaction on Reliability, 52(3):289–295, September 2003. 14. Rauzy A. (1993). New algorithms for fault tree analysis. Reliability Engineering and System Safety 40, 203{211}. 15. Zang X. and H. Sunand K. Trivedi (2000). A bdd-based algorithm for reliability graph analysis // Technical report. Department of Electrical Engineering, Duke University. 16. Rosenthal A. (1977). Computing the reliability of complex networks. SIAM Journal on Applied Mathematics 32, 384–393.