

## ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

© Шаповалов Ю.І., 2013

Yu.I. Shapovalov

Lviv Polytechnic National University

## SPECIFICS OF DETERMINATION SENSITIVITY OF LINEAR PARAMETRIC CIRCUITS IN THE FREQUENCY DOMAIN

© Shapovalov Yu.I., 2013

*In software which are dedicated for the design of electronic circuits with constant parameters is widely used function of sensitivity, which allows you to focused solve the tasks of multivariate analysis and optimization of such circuits. The function of sensitivity of linear parametric circuits not used widely because there was no reliable methods of symbolic computation of parametric transfer functions. We proposed such method (frequency symbol method [3]), so, filling the existing gap in article discusses the possibility of forming functions of sensitivity of linear parametric circuits and is given account the peculiarities of their determination.*

*For a basis of definition the concept of sensitivity of linear parametric circuit was taken definition of the concept of sensitivity of linear circuits with constant parameters. This feature of sensitivity of linear parametric circuit which consists in the fact that this sensitivity: a) is a function of two variables - complex variable and time; b) by the frequency symbolic method is determined based on approximated parametric transfer functions.*

*It is shown that, typically, the sensitivity of parametric linear circuit varies periodically in time with period  $T$ , which is chosen in presentation the transfer function by trigonometric polynomial of Fourier. It was emphasized that the sensitivity of some parameters of parametric circuit in time can grow infinitely. This applies to the parameters that define the period  $T$ .*

*We considered the example of elementary parametric linear circle, consisting of a single parametric capacity. The example illustrates the change the different functions of sensitivity of such circuit in time.*

*It is shown that at sufficient accuracy of approximation of parametric transfer function by trigonometric polynomial of Fourier, derivatives on parameters of elements of circuit obtained from approximated parametric transfer functions enough to accurately reproduce derivatives on parameters of elements of circuit the original parametric transfer functions and, therefore, can be used to form the functions of sensitivity, as well as in solution of tasks multivariate analysis and optimization of linear parametric circuits. This conclusion shows a perspective application of frequency symbolic method to the mentioned problems.*

*For illustration of material relating to the correctness of the definition of derivatives of parametric transfer functions on parameters of elements of parametric circuit is selected single-circuit parametric amplifier, in oscillatory contour, which the capacity varies with a period  $T$ . It is shown when the number of harmonic components in the approximated parametric transfer function  $k \geq 4$  then results in the calculation of the derivative of this function on the parameter does not change. Therefore, the value of derivatives that were obtained when  $k=4$  were taken as a basis in these calculations. Obviously, the calculation for the selected  $k < 4$  will be inaccurate, and if  $k > 4$  it takes unjustified big time. It is shown the dependence the sensitivity of module of transfer coefficient of the input current to the output voltage from the depth of modulation of parametric capacity and time.*

**Keywords - linear parametric circuits, frequency symbolic method, sensitivity.**

*У роботі розглянуто особливості визначення чутливості лінійних параметричних кіл за апроксимації передавальних функцій тригонометричними поліномами Фур'є.*

**Ключові слова** - лінійні параметричні кола, частотний символічний метод, чутливість.

### Вступ

Відомо [1], що чутливість передавальної функції  $T$  лінійного кола з постійними параметрами до зміни параметру деякого елемента  $x$  визначається за виразом

$$S_x^T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{x}{T} \quad (1)$$

та, за аналогією з передавальною функцією кола  $T$ , теж представляє собою функцію кола, оскільки не залежить від поданих на коло сигналів і визначається виключно параметрами та структурою кола.

Очевидно, що функція чутливості  $S_x^T$  частото залежна і у частотній області при  $T(s) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$ , де  $s = j\omega$  - комплексна змінна,  $M(\omega)$  - модуль та  $\phi(\omega)$  - фаза передавальної функції  $T(s)$ , визначається за виразом [1]:

$$S_x^T(s) = \frac{\partial M(\omega)}{\partial x} \cdot \frac{x}{M(\omega)} + j \frac{\partial \phi(\omega)}{\partial x} \cdot x. \quad (2)$$

Особливість визначення чутливості лінійних параметричних кіл полягає у тому, що:

а) передавальна функція  $W$  (нехай спряжена [2]) залежить не тільки від комплексної змінної  $s$ , але й від часу  $t$  -  $W(s, t)$ ;

б) передавальна функція  $W(s, t)$ , зазвичай, визначається наближено  $\hat{W}(s, t)$  у вигляді апроксимаційних многочленів, але задовільний збіг функцій не завжди визначає задовільний збіг їх похідних, які, своєю чергою, є основою розв'язування ряду задач багатоваріантного аналізу та оптимізації.

Розглядю цих особливостей і присвячена дана робота.

### Основна частина

У випадку лінійних параметричних кіл чутливість передавальної функції визначимо за аналогією з виразом (1):

$$S_x^W(s, t) = \frac{\partial W(\omega, t)}{\partial x} \cdot \frac{x}{W(s, t)} \quad (3)$$

та переконуємось, що:

$$S_x^W(s, t) = \frac{\partial M(\omega, t)}{\partial x} \cdot \frac{x}{M(\omega, t)} + j \frac{\partial \phi(\omega, t)}{\partial x} \cdot x, \quad (4)$$

де під символом  $x$  розуміємо не функцію, що відображає залежність параметра елемента кола від часу, а постійні величини, що визначають цю функцію. Так, наприклад, для параметричної ємності, що змінюється у часі за виразом

$$c(t) = c_0 [ +m \cdot \cos(\Omega t) ], \quad (5)$$

( $c_0, m, \Omega$  - незалежні від часу середнє значення, глибина модуляції та частота накачки параметричної ємності  $c(t)$ , відповідно) може бути визначена чутливість кола до зміни параметра  $c_0$ , чи параметра  $m$ , чи параметра  $\Omega$ .

Якщо для кола з постійними параметрами чутливість у частотній області визначається звичними амплітудно-частотними та фазо-частотними характеристиками тільки від однієї змінної  $\omega$ , то для параметричних кіл кожна з цих двох характеристик представляє собою поверхню від двох аргументів – змінної  $\omega$  та часу  $t$ . Останні поверхні, як і поверхні чутливості до зміни параметрів постійних елементів параметричного кола, є, зазвичай, періодичні у часі та

повторюються з періодом  $T = 2\pi/\Omega$ . Виключенням є чутливість по параметру, що визначає частоту зміни параметричного елемента. Зокрема, для параметричного елемента (5) це чутливість до зміни параметра  $\Omega$ . Пояснимо цей факт на наступному прикладі.

**Приклад 1.** Нехай задано лінійне параметричне коло, що складається з окремої параметричної ємності  $c(t)$  з параметром з виразу (5), яке описується диференціальним рівнянням  $i(t) = c(t) \cdot u'(t) + c'(t) \cdot u(t)$ , де  $i(t)$  - заданий струм, що протікає через ємність  $c(t)$ , та  $u(t)$  - результуюча напруга на ємності  $c(t)$ , відповідно. Відомо [3], що параметрична передавальна функція  $W(s,t) = U(s,t)/I(s)$  такого кола, де  $U(s,t)$  та  $I(s)$  зображення змінних  $u(t)$  та  $i(t)$ , відповідно, має вигляд

$$W(s,t) = 1/sc(t) = 1/(s \cdot c_0(1 + m \cdot \cos(\Omega t))). \quad (6)$$

Чутливості цієї передавальної функції до зміни параметрів  $c_0, m, \Omega$  визначаються за виразом (3) як:

$$S_{c_0}^W = \frac{\partial[1/s \cdot c(t)]}{\partial c_0} \cdot \frac{c_0}{[1/s \cdot c(t)]} = -1; \quad (7)$$

$$S_m^W = \frac{\partial[1/s \cdot c(t)]}{\partial m} \cdot \frac{m}{[1/s \cdot c(t)]} = -\frac{m \cdot \cos(\Omega \cdot t)}{1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t)}; \quad (8)$$

$$S_{\Omega}^W = \frac{\partial[1/(s \cdot c(t))]}{\partial \Omega} \cdot \frac{\Omega}{[1/(s \cdot c(t))]} = \frac{\Omega \cdot t \cdot m \cdot \sin(\Omega \cdot t)}{1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t)}; \quad (9)$$

Поверхні функцій чутливості з виразів (7)-(9) наведено на рис.1 - рис.3, відповідно. Так, чутливість  $S_{c_0}^W$  не залежить від часу  $t$  і інших параметрів ємності, чутливість  $S_m^W$  періодична у часі з періодом  $T = 2\pi/\Omega$ , а чутливість  $S_{\Omega}^W$  з часом необмежено зростає (рис.3, рис.4). Останній факт має зрозуміле пояснення. Так, враховуючи відомий зв'язок відносної зміни  $\delta_{\Omega} = \Delta\Omega/\Omega$  параметра  $\Omega$  з відносною зміною  $\delta_W = \Delta W/W$  функції  $W$  у малому масмо:

$$\delta_W = S_{\Omega}^W \cdot \delta_{\Omega}. \quad (10)$$

Величина  $\delta_W$  є відносною різницею двох функцій (6) з близькими частотами, що відрізняються на  $\Delta\Omega$ . Зрозуміло, що ця різниця у часі змінюється з періодом  $2\pi/\Delta\Omega \approx T$ , та її обгинаюча зростає від нуля на півперіоді  $0 - \pi/\Delta\Omega$  і спадає до нуля на півперіоді  $\pi/\Delta\Omega - 2\pi/\Delta\Omega$ . Чим менше значення  $\Delta\Omega$ , тим більший період  $2\pi/\Delta\Omega$ , і тим довшим буде час зростання цієї згинаючої. При  $\Delta\Omega \rightarrow 0$  період згинаючої  $2\pi/\Delta\Omega \rightarrow \infty$ , і тому вона буде зростати безмежно. При постійній величині  $\delta_{\Omega}$ , і це витікає з (10), згинаюча  $S_{\Omega}^W$  теж повинна безмежно зростати. Таке пояснення і ілюструє рис.4.

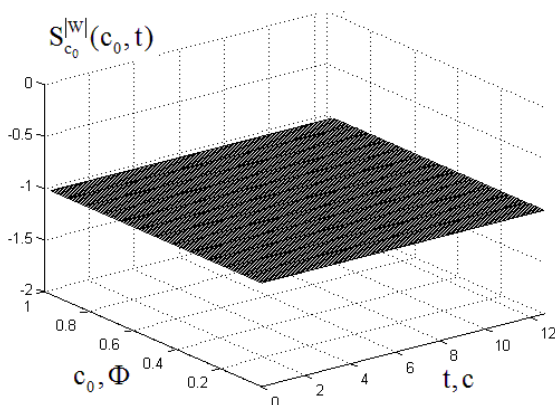


Рис.1. Залежність чутливості модуля коефіцієнта передачі  $S_{c_0}^{|W|}(c_0, t)$  від  $c_0$  та часу  $t$ .

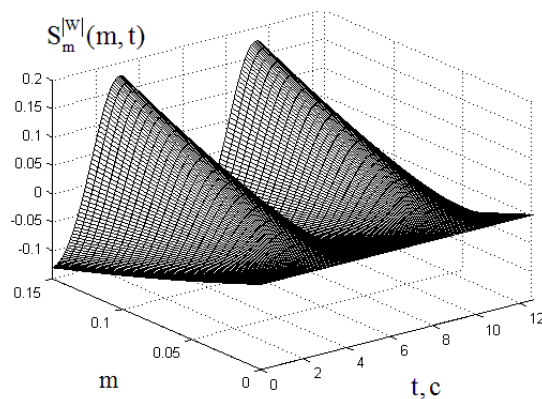


Рис.2. Залежність чутливості модуля коефіцієнта передачі  $S_m^{|W|}(m, t)$  від глибини модуляції  $m$  та часу  $t$ .

Важливість застосування визначень (3) та (4) на практиці полягає у тому, що передавальна функція  $W(s,t)$  лінійного параметричного кола за описаними у літературі методами [2,3] визначається наближено, як  $\hat{W}(s,t)$ , у вигляді апроксимуючих многочленів. У зв'язку з цим виникає питання коректності обчислення похідних передавальних функцій  $W(s,t)$ , що визначені у

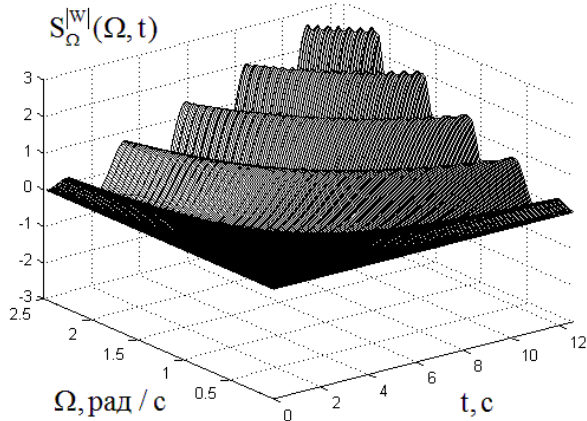


Рис.3. Залежність чутливості модуля коефіцієнта передачі  $S_{\Omega}^{|W|}(\Omega, t)$  від частоти  $\Omega$  та часу  $t$ .

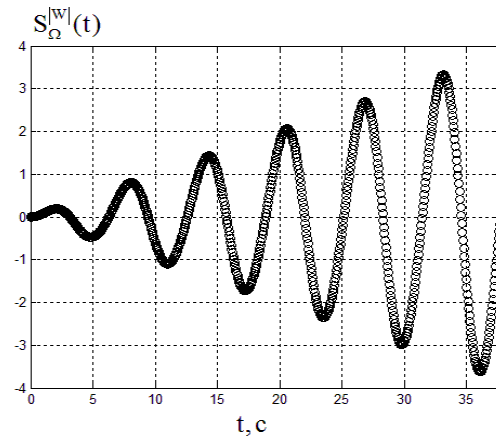


Рис.4. Залежність чутливості модуля коефіцієнта передачі  $S_{\Omega}^{|W|}(t)$  від час  $t$  при  $\Omega = 1$ .

вигляді таких апроксимацій  $\hat{W}(s,t)$ . Так, наприклад, з факту задовільного збігу двох функцій  $y(x)$  та  $\hat{y}(x)$  з рис.5 не впливає факт такого ж збігу їх похідних. Таким чином, питання коректності застосування визначень (3) та (4) до обраної у конкретному методі апроксимації  $\hat{W}(s,t)$  передавальної функції вимагає додаткового дослідження.

За запропонованим нами частотним символьним методом, який довів свою ефективність у ряді практичних застосувань [3], передавальна функція лінійного параметричного кола апроксимується тригонометричним поліномом Фур'є у вигляді:

$$\hat{W}(s,t) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ W_{ci}(s) \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t) + W_{si}(s) \cdot \sin(i \cdot \Omega \cdot t) \right] \quad (11)$$

або у комплексній формі:

$$\hat{W}(s,t) = W_0(s) + \sum_{i=1}^k \left[ W_{+i}(s) \cdot \exp(+ji\Omega t) + W_{-i}(s) \cdot \exp(-ji\Omega t) \right], \quad (12)$$

де  $s = j\omega$  - комплексна змінна перетворення Лапласа,  $t$  - час,  $T = 2\pi/\Omega$  - період зміни передавальної функції,  $k$  - кількість членів у апроксимаційному поліномі,  $W_0(s), W_{ci}(s), W_{si}(s), W_{+i}(s), W_{-i}(s)$  - дробово-раціональні функції комплексної змінної  $s$ .

Коректність застосування визначень (3), (4) до апроксимаційних виразів (11), (12) розглянемо, виходячи з наступних міркувань. Нехай задано

періодичну функцію  $f(x,t)$ , де  $x$  параметр,  $t$  - час, для якої існують похідні по  $t$  у довільних значеннях часу на періоді  $[0-T]$  та по  $x$  у довільних значеннях параметра  $x$  з заданого діапазону,  $T = 2\pi/\Omega$ .

Представимо функцію  $f(x,t)$  рядом Фур'є:

$$f(x,t) = a_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} [a_i(x) \cos(i\Omega t) + b_i(x) \sin(i\Omega t)], \quad (13)$$

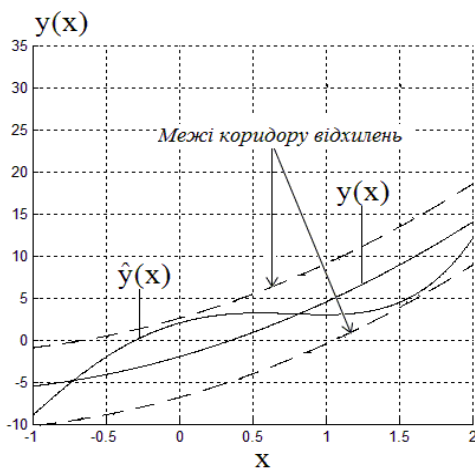


Рис.5. Функції  $y(x)$  та  $\hat{y}(x)$  у допустимому коридорі відхилень.

де  $a_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x,t) dt$ ,  $a_i(x) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x,t) \cos(i \cdot \Omega \cdot t) dt$ ,  $b_i(x) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x,t) \sin(i \cdot \Omega \cdot t) dt$  - коефіцієнти

Фур'є. У цьому випадку похідна функції  $f(x,t)$  по  $x$  представляється у вигляді

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} \cos(i\Omega t) + \frac{\partial b_i(x)}{\partial x} \sin(i\Omega t) \right]. \quad (14)$$

Іншими словами, що й зрозуміло, похідна функції по параметру дорівнює похідній по параметру її ряду Фур'є. На практиці функція  $f(x,t)$  невідома. Але нехай відповідним вибором значення  $k$  за частотним символьним методом [3] з задовільною точністю визначено її апроксимацію  $\hat{f}(x,t)$  поліномом Фур'є:

$$\hat{f}(x,t) = \hat{a}_0(x) + \sum_{i=1}^k [\hat{a}_i(x) \cos(i\Omega t) + \hat{b}_i(x) \sin(i\Omega t)]. \quad (15)$$

З (15) витікає:

$$\frac{\partial \hat{f}(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{a}_0(x)}{\partial x} + \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\partial \hat{a}_i(x)}{\partial x} \cos(i\Omega t) + \frac{\partial \hat{b}_i(x)}{\partial x} \sin(i\Omega t) \right]. \quad (16)$$

Як показали обчислювальні експерименти [3], при зростанні значення  $k$  коефіцієнти  $\hat{a}_i(x), \hat{b}_i(x)$  з виразу (15) наближаються до значень  $a_i(x), b_i(x)$  з виразу (13). Якщо уявити комп'ютер з необмеженою розрядною сіткою, то при  $k \rightarrow \infty$  матимемо  $\hat{a}_i(x), \hat{b}_i(x) \rightarrow a_i(x), b_i(x)$ , відповідно. Оскільки розрядна сітка комп'ютера обмежена, то значення  $\hat{a}_i(x), \hat{b}_i(x)$  при достатньо великих значеннях  $k$  у межах точності виконання обчислень з такими «неточними» числами стають рівними значенням  $a_i(x), b_i(x)$ . Наступне зростання  $k$  не приводить до зміни результату. На практиці, отримані таким чином  $\hat{a}_i(x), \hat{b}_i(x)$  можемо з достатньою точністю вважати значеннями  $a_i(x), b_i(x)$ . Звідси витікає важливий практичний висновок, який дозволяє на основі частотного символьного методу розв'язувати задачі багатоваріантних досліджень та оптимізації лінійних параметричних кіл. І цей висновок наступний.

**Висновок.** Оскільки при достатньо великих значеннях  $k$  частотний символьний метод забезпечує визначення  $\hat{a}_i(x), \hat{b}_i(x)$  з (15), що при заданій розрядній сітці комп'ютера з достатньою точністю збігаються з значеннями  $a_i(x), b_i(x)$  з (13), а сам вираз (15) збігається з виразом (13), то:

- визначену з (16) похідну функції  $\hat{f}(x,t)$  з достатньою точністю можемо вважати похідною, визначеною за виразом (14):  $\partial \hat{f}(x,t) / \partial x = \partial \hat{f}(x,t) / \partial x$ ;

- рівність похідних  $\partial \hat{f}(x,t) / \partial x$  та  $\partial f(x,t) / \partial x$  забезпечує адекватність розв'язування частотним символьним методом задач багатоваріантного аналізу та оптимізації лінійних параметричних кіл, які оснований на обчисленні таких похідних.

Зауважимо, що справедливості такого висновку при інших апроксимаціях параметричних передавальних функцій (не тригонометричними поліномами Фур'є) слід перевіряти додатково.

Застосування наведеного висновку продемонструємо на наступному прикладі.

**Приклад 2.** Для параметричного підсилювача з рис.6 визначити чутливість  $S_m^W$  передавальної функції  $W(s,t) = U_2(s,t) / I(s)$  по параметру  $m$  (обчислювальні експерименти виконані аспіранткою Бачик Д.Р. у програмному середовищі MATLAB).

За частотним символьним методом визначаємо апроксимації передавальної функції  $\hat{W}(s,t,m)$  при символьному параметрі  $m$  для різних значень  $k$ . Значення цих апроксимацій для  $m = 0.05$ ,  $s = j \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \pi$ ,  $t = 0.800 - 0.806$  мкс наведені у табл.1. З табл.1 витікає, що при  $k \geq 3$  значення передавальної функції вже не змінюються. У табл.2 наведено значення похідних  $\partial \hat{W}(s,t,m) / \partial m$

передавальної функції  $\hat{W}(s,t)$ , визначені диференціюванням функції  $\hat{W}(s,t,m)$  по  $m$  при тих же значеннях  $m=0.05$ ,  $s=j \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \pi$ ,  $t=0.800-0.806$  мкс. З табл.2 витікає, що при  $k \geq 4$  значення похідних передавальної функції теж вже не змінюються. Таким чином, вважаємо, що визначена похідна  $\partial \hat{W}(s,t,m)/\partial m$  при  $k=4$  може бути прийнята за похідну  $\partial W(s,t,m)/\partial m$  (при  $k < 4$  результати обчислень будуть неточними, а при  $k > 4$  займуть неоправданий великий час) і може бути використана у подальших задачах багатоваріантного аналізу чи оптимізації заданого кола. Зокрема, залежність чутливості  $S_m^{|W|}$  від глибини модуляції  $m$  та часу  $t$ , визначена за отриманими похідними, наведена на рис.7.

Таблиця 1.

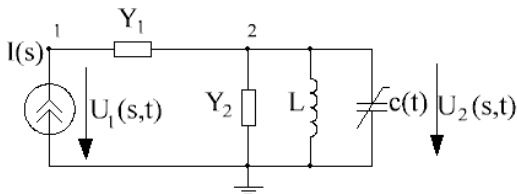


Рис.6. Одноконтурний параметричний підсилювач.  $c(t)=c_0(1+m \cdot \cos(4 \cdot 10^8 \pi t))$  Ф,  $I(s)=10^{-4} \exp(j \cdot 2 \cdot 10^8 \pi t - \pi/4)$  А,  $L=253.3$  нГн,  $Y_1=0.25$  См,  $Y_2=0.4$  мСм.

Миттєві значення передавальної функції  $W$

Час, мкс	Кількість гармонічних складових $k$ у $\hat{W}$			
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
0.800	2856,2	2872,6	2872,6	2872,6
0.801	4030,4	4014,2	4013,7	4013,7
0.802	3717,6	3736,5	3737,4	3737,4
0.803	2350,0	2307,4	2306,5	2306,5
0.804	1817,7	1840,9	1841,4	1841,4
0.805	2856,2	2872,6	2872,6	2872,6
0.806	4030,4	4014,2	4013,7	4013,7

Таблиця 2.

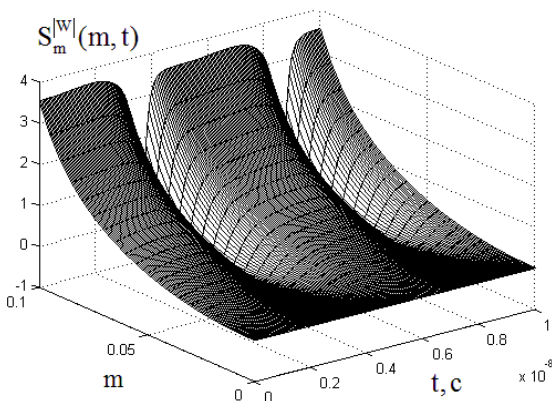


Рис.7. Залежність чутливості модуля коефіцієнта передачі  $S_m^{|W|}(m,t)$  від глибини модуляції  $m$  та часу  $t$ .

Миттєві значення похідної  $\partial W/\partial m$

Час, мкс	Кількість гармонічних складових $k$ у $\hat{W}$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0.800	18065	19250	19250	19250	19250
0.801	50617	49961	49927	49929	49929
0.802	42869	43425	43482	43481	43481
0.803	5527	3190	3132	3131	3131
0.804	-9802	-8563	-8526	-8528	-8528
0.805	18065	19250	19250	19250	19250
0.806	50617	49961	49927	49929	49929

Як показали обчислювальні експерименти, сформовані за частотним символьним методом параметричні передавальні функції лінійних параметричних кіл можуть бути використані для визначення їх похідних по параметрам кола, що дозволяє розв'язувати задачі багатоваріантного аналізу та оптимізації таких кіл у частотній області.

1. Л.О. Чуа «Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы) / Л.О. Чуа, Пен-Мин-Лин. - М.: Энергия, 1980.- 638 с. 2. Солодов А.В. Линейные автоматические системы с переменными параметрами / А.В. Солодов, Ф.С. Петров. - М.: Наука, 1971.- 620 с. 3. Шаповалов Ю.І. Розвиток теорії символьного аналізу лінійних параметричних кіл у частотній області: Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук: 05.09.05. / Шаповалов Юрій Іванович – Львів, 2012. – 413с.