

## МОДЕЛЮВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ НИТКОПОДІБНИХ СТРУКТУР У ХВИЛЕВОДАХ

© Захарія Й.А., 2013

Yo.A. Zakharia

Lviv Polytechnic National University  
Cathedra for radioelectronic devices and systems

## MODELING OF CURVILINEAR FILAMENT STRUCTURE IN THE WAVEGUIDE

© Zakharia Yo.A., 2013

Well known current filament modeling method is frequently for electrodynamic structures analysis in free space and in waveguide used. In both cases the electrodynamic analyse principles are the same. The current filament method is often for analysis of closed waveguide exciter, or analogous passive elements in waveguide used. For sufficient small area of closed filament structure and corresponding great field point distance in analysis the dipole model is valid. The form of structure contour is then not essential. Therefore the condition of structure momentum (electrical or magnetic) we use an polygonal modeling. The contour of filament closed structure may be analytically described. But often the contour form is arbitrary and can not be mathematical expressed. In last case it is possible the considered in this paper polygonal modeling to apply.

For example in the paper the magnetic current is taken. Such example is useful in analysis of waveguide aperture exciting. It is known, that necessary Green functions are by form of waveguide cross section defined, and usually given by infinite series. The known modified Green functions often are particularly simplified. Therefore we are forced the numerical analysis method to apply. But necessary analytical expressions we must get by electrodynamic methods. The corresponding formulas for lineare coordinate sections of polygonal model contour are the simplest. The sloped sections of filament current model in general radiate three vector-potential components. Correspondingly, the field analysis is more complicated. It is possible to use the analogous analytical method without modeling, if filament structure contour can be mathematically expressed. Algorithm for analytical expressions in last case coincide with algorithm for sloped lineare section of magnetic current filament given in the paper But mathematical difficulties can cause, that it is impossible analytically to realize. Then we may the polygonal modeling to apply. The algorithm for analytical expressions of radiated by magnetic current electrical field tension is also given in the paper.

Use the circular filament coil with magnetic current for numerical example, the comparison of radiated by various coil polygonal model field tension, is realized in this work. It is established, that in the near zone of coil area the radiated electrical field for  $N=4$  and  $N=12$  is practical the same. A little difference has an order of tenth part from one per cent. We should to remind, that in the quadratic model ( $N=4$ ) the sloped filament sections absent, and the calculations are simplified. In order to detect of the named above differences, the electrical field is in separate points of a current coil circle radius calculated. So it is found, that only near of quadratic model current filament the result difference increase to one percent. Such almost on  $\frac{3}{4}$  of quadratic model area the accuracy of modeling is high.

In the paper is an information about simplified modeling of sloped current filament section in waveguide by his coordinate projections given. However the difference of calculated results relative to quadratic modeling increase to three percent.

**Keyword:** waveguide discontinuities.

**Аналіз криволінійних ниткоподібних структур у хвилеводах пропонується здійснювати аналітичним методом або за допомогою багатокутникових моделей структури. Тоді аналітично описуються лінійні сторони моделі. На основі прикладу моделювання колового витка магнітного струму у хвилеводі встановлено, що з незначною похибкою можна використовувати квадратну модель.**

**Ключові слова:** хвилевідні неоднорідності.

### Вступ

В наявних публікаціях практично не розглядаються проблеми розрахунку криволінійних ниткоподібних структур розташованих у хвилеводах. Такими є замкнуті (колові, півколові) і незамкнуті структури, або структури іншої форми. Вони використовуються як збуджувачі хвилеводів, або в надвисокочастотних пристроях. Поле випромінювання таких структур малих розмірів і на великих відстанях можна розглядати на основі дипольної моделі (електричної, або магнітної), для якої форма контуру замкнутої структури несуттєва.

Часто необхідно визначати поле випромінювання в зоні структури, а навіть в точках її площі. Дипольна модель в даному випадку непридатна. Для тонкого провідника структури придатна ниткоподібна модель електричного або магнітного струму. Криволінійна структура завжди є некоординатною, що ускладнює аналіз. Для прямокутного хвилеводу необхідні функції Гріна дані у вигляді нескінченних сум подвійних рядів, тобто в незамкнутій формі. Ці функції записані в прямокутній системі координат, тому і модель повинна дати можливість вести аналіз у такій же системі координат. Контур некоординатної криволінійної структури можна описати аналітично, однак не завжди такий запис дозволяє здійснити електродинамічний аналіз структури. Тоді можна використати модель у вигляді сукупності коротких лінійних відрізків, які є контуром багатокутника, або його частиною. В такій моделі мають місце як координатні, так і некоординатні відрізки. Останні – це нахилені до координат відрізки, координатні проекції яких можна використати в аналізі [1]. Адекватність такої моделі є тим вища, чим коротші лінійні відрізки, тобто чим більше сторін має багатокутник. Така модель придатна, якщо контур структури описати аналітично не вдається.

Для перевірки адекватності багатокутникової моделі вибрано коловий виток магнітного струму, розташований у прямокутному хвилеводі. Розглянемо поле випромінювання багатокутникової моделі такого витка при різній кількості її сторін ( $N$ ). Для оцінки адекватності моделі розглядаємо напруженість випромінюваного поля моделі з даною кількістю сторін ( $N$ ), по відношенні до значень напруженості поля при високому значенні  $N$  ( $N = 8...12$ ). Очевидно, розрахунок напруженості поля моделі з  $N = 12$  є громіздкий, тому шукаємо відповіді, чи можливо застосовувати моделі з меншою кількістю сторін (наприклад  $N = 4$ ). Вважаємо, що експериментальна перевірка адекватності згаданого типу є практично нереальна.

### 2. Принцип формування розрахункових аналітичних виразів

Числові методи електродинамічного аналізу стають єдино можливими у випадку, коли функції Гріна дані у незамкнутому вигляді. Відомо, що подвійні збіжні ряди не завжди можна аналітично просумувати [2]. З іншого боку, сучасна обчислювальна техніка надає можливість швидкісного числового сумування таких рядів.

Як вказано вище, нитку колового витка з рівномірно розподіленим магнітним струмом  $I_M$ , вважаємо розташованою у прямокутному хвилеводі з розмірами перерізу  $A$  і  $B$ , ( $A > B, B/A = 0,52$ ), в площині  $y, z$  на висоті  $x_I = 0,45B$ . Центр витка знаходиться в точці:  $x_0 = x_I; y_0 = 0,4A; z_0 = 0$ . З умови ідентичних моментів витка і моделі, їх площі повинні бути однаковими і рівними  $\pi R^2$ , де  $R$  - радіус колового витка структури, знаходимо довжину сторони моделі  $l$ , висоту  $h$ , і кут нахилу  $\alpha$  (рис. 1):

$$l = 2R \sqrt{\frac{\pi}{N} \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}; h = R \sqrt{\frac{\pi}{N} \cot\left(\frac{\pi}{N}\right)}; \alpha = \pi \frac{N - 4k}{2N}, \quad (1)$$

де  $k$  - порядковий номер нахилених відрізків, починаючи вище вертикального (рис. 1). Для незмінного радіуса  $R$  окремі моделі ( $N$ ) відрізняються значеннями величин  $l$ ,  $h$ ,  $\alpha$ . Нахилені відрізки моделі появляються в моделях з  $N > 4$ . Їх проекції  $l_y, l_z$  визначаються кутом нахилу відрізка  $\alpha$  (рис. 1):  $l_y = l \cos \alpha$ ;  $l_z = l \sin \alpha$ .

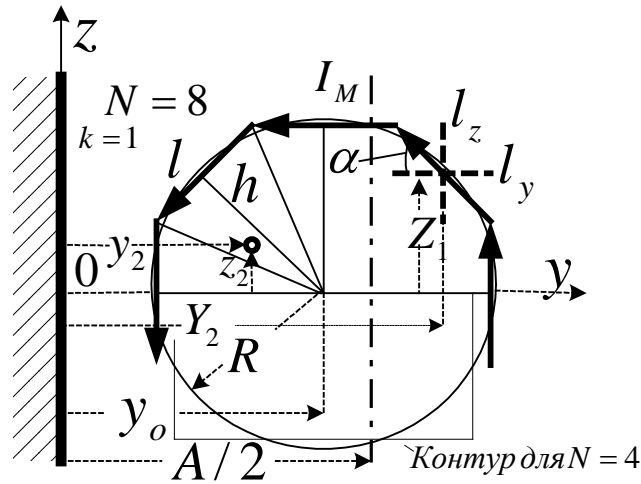


Рис. 1 Геометричні параметри восьмикутної моделі ( $N = 8$ ) колової структури магнітного струму ( $I_M$ ) з радіусом  $R$ .  $A/2$  - половина ширини прямокутного хвилеводу; структури витка струму і моделі розташовані в площині  $y, z$  на висоті  $x_1$

Напруженість електричного поля  $E_x$ , випромінюваного ниткою магнітного струму моделі, будемо визначати на висоті  $x_2 = 0,6 B$ , в точці  $z_2 = 0,05 A$ ,  $y_2 = 0,4 A$ . Для інших точок будемо зменшувати  $y_2$ . З метою покращення збіжності виразу для розрахуємо скалярний добуток  $\langle E_x, i(x) \rangle = D_x$ , на відрізку  $h_x = 0,2 B$ , приймаючи умовно  $i(x) = I$ , тобто рівномірно розподілений електричний струм. Результуюче значення  $D_x$  є сумою таких величин від усіх відрізків моделі.

Густину магнітного струму в відрізку довжиною  $l_z$  запишемо за допомогою дельта функцій

$$\delta_z(z') = I_M \delta(x' - x_1) \delta(y' - y_1). \quad (2)$$

Якщо величину струму записати як  $I_M(z) = I_M i(z)$ , то функція розподілу струму  $i(z) = I$  характеризує рівномірний розподіл. Векторний потенціал електричного поля буде [4]:

$$A_{Mz} = -\varepsilon_o \int_{V'} G_z(\bar{r}/\bar{r}') \delta_z(z') dV', \quad (3)$$

у якій  $V'$  - об'єм відрізка нитки струму,  $\varepsilon_o$  - діелектрична проникність вакууму,  $G_z(\bar{r}/\bar{r}')$  - функція Гріна для поздовжньої координати  $z$  у прямокутному хвилеводі [4]:

$$G_z(\bar{r}/\bar{r}') = -\frac{2}{AB} \sum_{m=ln=0}^{\infty} \sum_{\gamma} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\gamma} \cos\left(\frac{m\pi y'}{A}\right) \cos\left(\frac{n\pi x'}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \exp(-\gamma(z - z')) \quad (4)$$

Вище  $\bar{r} = (x, y, z)$ ;  $\bar{r}' = (x', y', z')$  позначення точки поля і точки струму;  $\gamma$  - стала поширення хвилі у прямокутному хвилеводі порядку  $m, n$ ;  $\varepsilon_n, \varepsilon_m$  множники, які при  $n=0$  і  $m=0$  дорівнюють  $1/2$ , а при  $n > 0, m > 0$  - одиниці. Таким чином для координатного відрізка  $l_z$  з рівномірно розподіленим магнітним струмом  $I_M$  з виразів (2)-(4) знаходимо:

$$A_{Mz} = \frac{2\varepsilon_o I_M}{AB} \sum_{m=ln=0}^{\infty} \sum_{\gamma} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\gamma} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y_1}{A}\right) \frac{2}{\gamma} \sinh\left(\frac{\gamma l_z}{2}\right) \exp(-\gamma(z - z_1)) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right). \quad (5)$$

Вираз (5) використаємо для визначення елемента  $dA_{Mz}$  у випадку, коли  $l_z$  прямує до  $dz_1$ :

$$dA_{Mz} = \frac{2\varepsilon_o I_M}{AB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\gamma} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y_1}{A}\right) \exp(-\gamma(z-z_1)) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right) dz_1, \quad (6)$$

де  $z_1$  тепер є координатою розташування елемента  $dz_1$ . З рівняння нахиленого відрізка знаходимо:

$$y_1 = z_1 t + v_1; \quad v_1 = Y_1 - Z_1 t, \quad (7)$$

де  $t = \cot \alpha$ , ( $\alpha$  - кут нахилу відрізка);  $Y_1, Z_1$  - координати середини відрізка. Результуючу складову векторного потенціалу отримаємо тепер у вигляді:

$$A_{Mz} = \frac{2\varepsilon_o I_M}{AB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\gamma} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{B}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{A}\right) J_z(m, n, z), \quad (8)$$

де

$$J_z(m, n, z) = \int_{w_1}^{w_2} \cos\left(\frac{m\pi}{A}(z_1 t + v_1)\right) \exp(-\gamma(z-z_1)) dz_1. \quad (9)$$

Границі інтегрування в інтегралі (9) визначаються межами проекції відрізка на координату  $z$ :

$$w_1 = Z_1 - \frac{l_z}{2}; \quad w_2 = Z_1 + \frac{l_z}{2}. \quad (10)$$

Тут вкажемо, що замість лінійного виразу (7) у вираз (9) можна підставляти рівняння для криволінійного контуру структури, і в результаті отримати інтеграл  $J_z(m, n, z)$  для структури в цілому. Для нахиленого відрізка  $l_z = w_2 - w_1$  є відстанню між крайніми точками в напрямі координати  $z$ . Магнітний струм у нахиленому відрізку створює також складову векторного потенціалу  $A_{My}$ , яку знаходимо аналогічним шляхом. Напруженість електричного поля, випромінювана магнітним струмом і обумовлена потенціалом  $A_{Mz}$ , дана виразом [3]:

$$E_x = -\frac{1}{\varepsilon_o} \text{rot}_x \bar{A}_M = -\frac{1}{\varepsilon_o} \frac{\partial A_{Mz}}{\partial y}. \quad (11)$$

Відповідно, зазначений вище скалярний добуток набуває вигляду:

$$\frac{D_{xz}}{I_M} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\gamma^2} \frac{m\pi}{A} \cos\left(n\pi \frac{x_1}{B}\right) \sin\left(m\pi \frac{y_2}{A}\right) F(n) J_z(m, n, z_2). \quad (12)$$

Множник  $F(n)$  виникає при формуванні скалярного добутку на відрізку  $h_x$ :

$$F(n) = \frac{h_x}{B} \cos\left(n\pi \frac{x_2}{B}\right) \frac{\sin(n\pi h_2 / 2B)}{n\pi h_2 / 2B}. \quad (13)$$

Числове підсумовування виконано нижче за рекомендаціями в [2]. Треба підкреслити, що вираз (12) дійсний для  $z_2 < z_1$ , ( $\exp(-\gamma(z_1 - z_2))$ ), або  $z_2 > z_1$ , ( $\exp(-\gamma(z_2 - z_1))$ ). Окремий вираз необхідно одержати, якщо  $(z_1 - l_z/2) < z_2 < (z_1 + l_z/2)$ . Аналогічний вираз отримуємо для  $D_{xy}$  від координатного відрізка  $l_y$ , а результуючий скалярний добуток дорівнює сумі таких добутків від усіх відрізків моделі. Симетрія відрізків такої моделі дає можливість до 1/3 зменшити кількість обчислень. На жаль, коротко розглянутий метод ниткоподібних моделей залишається відносно громіздким.

### 3. Результати порівняння моделей і висновки

Метою виконаних обчислень є порівняння величини напруженості електричного поля, випромінюваного моделями з  $N=4$ , та  $N=8$  і  $N=12$  з однаковими їх площами. При цьому останню модель вважаємо достатньо адекватною. Скалярний добуток  $D$  є комплексною величиною:  $D = W(N) + iV(N)$ . Тому розглядаємо збіжність окремо дійсної і уявної частин, наприклад:

$$p_r = \frac{W(12) - W(4)}{W(4)} 100\%; \quad p_i = \frac{V(12) - V(4)}{V(4)} 100\%. \quad (14)$$

Характерні числові результати розрахунків величин  $p_r, p_i$  для скалярних добутоків  $D$  (напруженості електричного поля  $E_x$ ) в точці  $x_2 = 0,6 B, z_2 = 0,05, y_2$ , подано нижче для окремих радіусів  $R$  ниткоподібних колових витків:

$y_2 = 0,40 A$	$N = 8$	$N = 12$		
$R = 0,15 A$	$p_r = -0,39\%$	$p_i = 0,24\%$		
$R = 0,20 A$	$p_r = -0,01\%$	$p_i = 0,39\%$	$p_r = 0,58\%$	$p_i = 0,36\%$
$R = 0,25 A$	$p_r = 0,12\%$	$p_i = 0,55\%$	$p_r = -0,74\%$	$p_i = 0,49\%$
$N = 8$	$R = 0,25$			
$y_2 = 0,4 A$	$p_r = 0,12\%$	$p_i = 0,55\%$		
$y_2 = 0,3 A$	$p_r = -0,04\%$	$p_i = 0,50\%$		
$y_2 = 0,2 A$	$p_r = -0,96\%$	$p_i = 0,68\%$		

Подані числові дані містять, очевидно, певну похибку обчислень, хоча величини  $W(N)$  і  $V(N)$  визначалися з точністю до шостого знаку. Вважаємо, що похибки моделювання вплинули незначно, бо метод моделювання і розрахунків для обох моделей однаковий.

### Висновки

Отримані результати дозволяють зробити загальні висновки:

1) Квадратна модель колового витка ( $N = 4$ ) в основному приводить до занижених значень дійсної складової напруженості поля ( $W(N)$ ), і завищених значень уявної складової ( $V(N)$ ) відносно відповідних значень отриманих при застосуванні адекватної моделі ( $N = 8, N = 12$ ).

2) Розрахована в центральній частині площі адекватної моделі ( $y_2 = 0,4 A$ ) перевищує напруженість квадратної моделі не більше як на 1% для дійсної і уявної частин значення напруженості електричного поля.

3) Наближення точки поля до нитки квадратної моделі ( $y_2 = 0,2 A$ ) приводить до незначного погіршення адекватності квадратної моделі.

4) Таким чином  $\frac{3}{4}$  площі квадратної моделі, з центром в  $y_0$  і  $z_0$ , придатна для цілей моделювання з вказаною похибкою. Так замість громіздкої адекватної моделі ( $N = 12$ ) з незначним відхиленням можна використовувати просту квадратну модель. Адекватні моделі ( $N = 8; N = 12$ ) вимагають аналітичних виразів як для координатних, так і для нахилених відрізків моделі, в той час, як для  $N = 4$  такі вирази необхідні лише для координатних відрізків.

5) При моделюванні нахилених відрізків ортогональними координатними проекціями вказана вище похибка зростає до 3%.

Наведені висновки, на нашу думку, можна вважати перевіреними для витка магнітного струму. Обмеженням є рівномірність розподілу струму, особливо при великих значеннях відношення  $R/A$ . Але описане моделювання можна застосовувати, якщо відомі струми в окремих відрізках багатокутникової моделі.

1. Захарія Й.А. Моделювання некоординатних ниткоподібних структур у хвилеводах / Й.А. Захарія // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". - 2010. - № 680 : *Радіоелектроніка та телекомунікації*. - С. 190 -196. 2. Захарія Й.А. Про числове підсумовування нескінченних рядів / Й.А. Захарія // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". - 2012. - № 738 : *Радіоелектроніка та телекомунікації*. - С. 186-188. 3. Захарія Й.А. Основи електродинаміки і поширення радіохвиль / Й.А. Захарія. – Львів : В-во «Львівська політехніка», 1996. – 313 с. 4. Захарія Й.А. Методи прикладної електродинаміки / Й.А. Захарія. – Львів : В-во «Бескид-Біт», 2003. - 352 с.