

УДК 528.21

О.М. МАРЧЕНКО¹, Б.Б. ДЖУМАН^{1*}¹Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013.^{1*}Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, тел. +38(068)7632139, ел. пошта teojuman@gmail.com.**ПОБУДОВА МАТРИЦІ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЛОКАЛЬНОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ**

Розглянуто методику побудови локального гравітаційного поля за допомогою неортогональних базових функцій, які є розв'язком рівняння Лапласа на „шапці” або сегменті сфери. Цей підхід передбачає використання приєднаних функцій Лежандра цілого степеня і дійсного порядку. Ці функції формують дві системи функцій. У кожній із цих систем вони є ортогональними між собою на „шапці” сфери. Тому для використання обох систем функцій традиційно використовують спосіб найменших квадратів. Проте для високих порядків досить складно знаходити власні числа цих функцій. У таких випадках можна спроектувати вихідні дані на півсферу і використати приєднані функції Лежандра цілого степеня і порядку. Властивості таких функцій аналогічні до властивостей функцій на „шапці” сфери. Традиційно вихідні дані для побудови гравітаційного поля розміщуються на рівномірній сітці. Існує багато видів рівномірних сіток, які дають змогу пришвидшити процес знаходження невідомих гармонічних коефіцієнтів. З-поміж цих рівномірних сіток можна виділити географічну рівномірну сітку, рівномірну сітку Гаусса тощо. Отже, введено рівномірну сітку для розміщення вихідних даних і визначено її основні властивості на сегменті сфери та півсфері. З використанням відповідних властивостей рівномірної сітки отримано методику обчислення матриці нормальних рівнянь, яка дає можливість значно скоротити час обчислень. Також отримано формули для знаходження невідомих коефіцієнтів, які дають змогу перейти від обергання матриць порядку a^2 до порядку a . Отже, запропонований алгоритм для побудови матриці нормальних рівнянь і визначення гармонічних коефіцієнтів локального гравітаційного поля приводить до значного зменшення часу обчислень без втрати точності.

Ключові слова: матриця нормальних рівнянь; гармонічні коефіцієнти; локальне гравітаційне поле.

Вступ

Переважно гравітаційне поле та його трансформанти подаються рядом шарових або сферичних функцій. У разі побудови локального гравітаційного поля за допомогою техніки Spherical Cap Harmonic Analysis (SCHA) [Haines G.V., 1985; Haines G.V., 1988] або Adjusted Spherical Harmonic Analysis (ASHA) [De Santis A., 1992] використовують дві системи сферичних функцій цілого степеня і дійсного порядку, ортогональних на „шапці” або сегменті сфери [De Santis A., 1997; Hwang C., 1997; Hwang J., 2012]. Тому найкращим методом знаходження гармонічних коефіцієнтів для цього випадку є спосіб найменших квадратів [Джуман Б.Б., 2013; Jiancheng L., 1995; Thebault E., 2006]. При цьому виникає необхідність працювати з величезними масивами вихідних даних, що потребує великої кількості часу навіть при використанні сучасних комп'ютерів [Лук'янченко Ю.О., 2013]. Наприклад, під час побудови моделі 100-го порядку потрібно обернути матрицю нормальних рівнянь порядку $> 10\,000$.

Мета

Необхідно розробити алгоритм, який дав би змогу шукати меншу кількість необхідних елементів матриці нормальних рівнянь. Також потрібно знайти аналітичні формули для визначення гармонічних коефіцієнтів моделі локального гравітаційного поля на сегменті сфери (або половині сфери для випадку ASHA [De Santis A., 1992]).

Методика

Будь-яку функцію, гармонічну на півсфері, можна розкласти в ряд по сферичних функціях:

$$V = \sum_{n=0}^{K_m} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{b}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta), \quad (1)$$

де K_m – максимальний порядок моделі.

Очевидно, для знаходження невідомих коефіцієнтів Фур'є \bar{a}_{nm} і \bar{b}_{nm} необхідно мати вихідний масив даних, традиційно розміщений у вигляді ґрід.

Існує багато видів ґрід, які можуть пришвидшити процес знаходження невідомих гармонічних коефіцієнтів. Серед них можна виділити географічний ґрід, ґрід Гаусса, Driscoll-Healy ґрід, Reuter ґрід, Random ґрід та інші (рис. 1) [Eicker A., 2008].

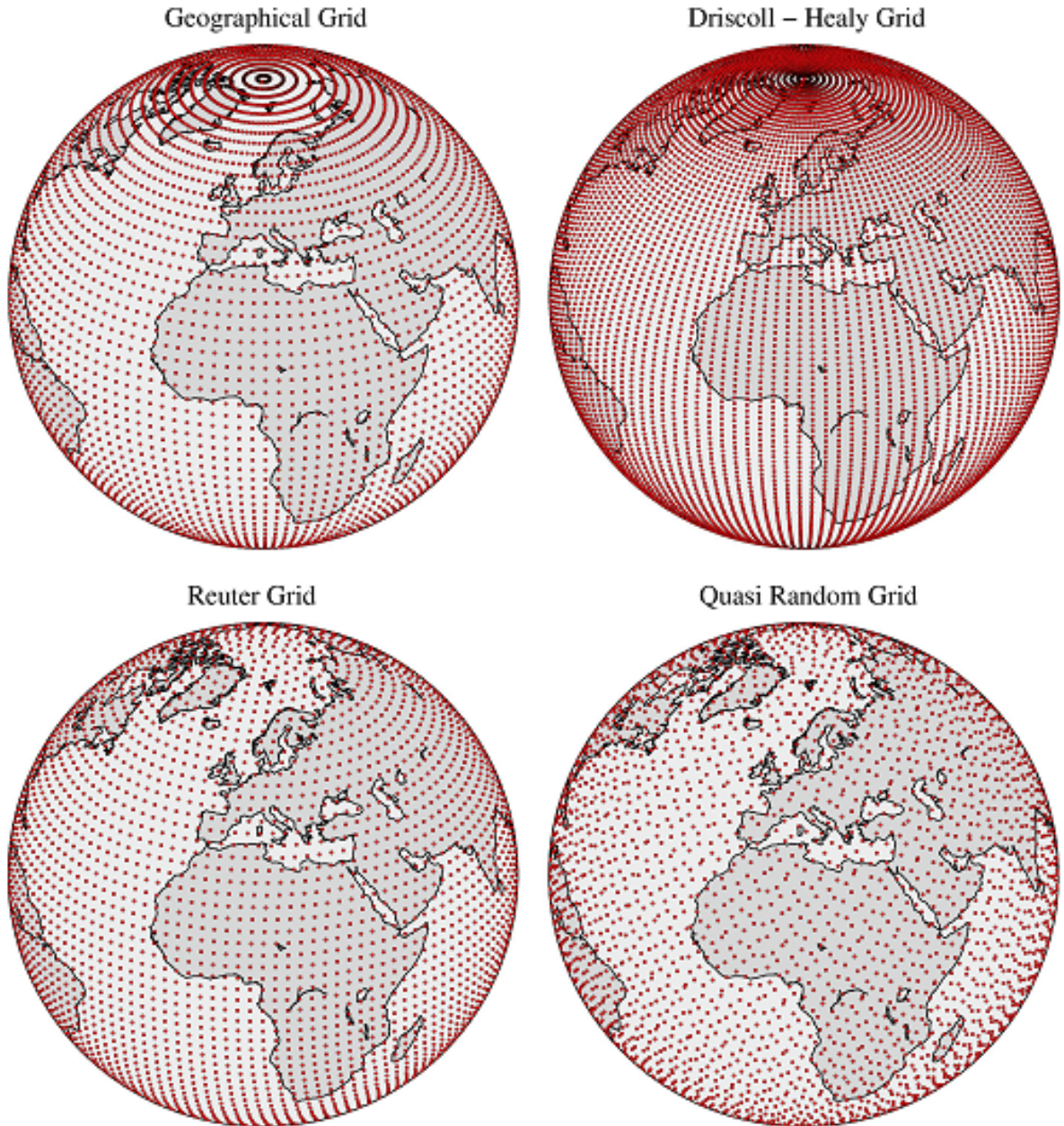


Рис. 1. Порівняння різних ґридів [Eicker A., 2008]

Розглянемо такий ґрид. Нехай для певної паралелі $\vartheta = const$ в першому октанті розміщено r точок з довготами $\lambda_i, i=1, r$, причому $\lambda_i - \lambda_{i-1} = const$. Крім того, в інших октантах довготи ґрид можна знайти за формулою

$$\lambda_i^j = \lambda_i^1 + 90^\circ \cdot (j - 1), \quad (2)$$

де j – номер відповідного октанту, тобто $j=1, 2, 3, 4$.

Очевидно, для такого ґриду відстань між паралелями може бути довільною.

Введемо умовне позначення [Hofmann-Wellenhof B., 2005]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda; \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Із рівнянь (1), (2) та (3) можна знайти елементи матриці нормальних рівнянь (оскільки матриця нормальних рівнянь симетрична, то відображено тільки нижню трикутну матрицю):

$$N = \begin{pmatrix} \sum \bar{R}_{00}\bar{R}_{00} & & & & \\ \sum \bar{R}_{00}\bar{R}_{10} & \sum \bar{R}_{10}\bar{R}_{10} & & & \\ \sum \bar{R}_{00}\bar{R}_{11} & \sum \bar{R}_{10}\bar{R}_{11} & \sum \bar{R}_{11}\bar{R}_{11} & & \\ \sum \bar{R}_{00}\bar{S}_{11} & \sum \bar{R}_{10}\bar{S}_{11} & \sum \bar{R}_{11}\bar{S}_{11} & \sum \bar{S}_{11}\bar{S}_{11} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де $\sum = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4$; s – кількість паралелей,
 $\bar{R}_{nm} = \bar{R}_{nm}(\vartheta_k, \lambda_i^j)$, $\bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm}(\vartheta_k, \lambda_i^j)$.

Результати

Розглянемо матрицю нормальних рівнянь (4), побудовану для деякої паралелі $\vartheta = const$. У такому разі добутки $\bar{P}_{n_1 m_1}(\cos \vartheta) \cdot \bar{P}_{n_2 m_2}(\cos \vartheta)$ будуть сталими величинами і їх можна винести за знак суми.

Також легко побачити, що для ґриду (2) виконуються такі тригонометричні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m \lambda_i^j = 0; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \cos m \lambda_i^j = 0, \quad m \neq 0; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m_1 \lambda_i^j \cdot \sin m_2 \lambda_i^j = 0, \quad m_1 \neq m_2; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \cos m_1 \lambda_i^j \cdot \cos m_2 \lambda_i^j = 0, \quad m_1 \neq m_2; \\ &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \sin m_1 \lambda_i^j \cdot \cos m_2 \lambda_i^j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Із формул (4) і (5) зрозуміло, що усі елементи матриці нормальних рівнянь N для

паралелі $\vartheta = const$ типу $\bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{R}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ та $\bar{S}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ не дорівнюють нулю тільки у випадку, коли $m_1 = m_2$. Своєю чергою, елементи типу $\bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m_2}(\vartheta, \lambda)$ дорівнюють нулю у будь-якому випадку.

Очевидно, після сумування по паралелях ситуація буде аналогічною, оскільки, наприклад, $\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^4 \bar{R}_{n_1 m_1}(\vartheta_k, \lambda_i^j) \cdot \bar{R}_{n_2 m_2}(\vartheta_k, \lambda_i^j) = 0$, за $m_1 \neq m_2$.

Отже, матрицю нормальних рівнянь (4) можна подати у такому вигляді:

$$N = \begin{pmatrix} \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{00} & & & & \\ \sum \bar{R}_{00} \bar{R}_{10} & \sum \bar{R}_{10} \bar{R}_{10} & & & \\ 0 & 0 & \sum \bar{R}_{11} \bar{R}_{11} & & \\ 0 & 0 & 0 & \sum \bar{S}_{11} \bar{S}_{11} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Якщо порівнювати матриці (4) і (6), легко побачити, що матрицю (6) можна порахувати в d разів швидше :

$$d = \frac{(K_m + 1)^4 + (K_m + 1)^2}{2 \sum_{i=1}^{K_m} (i^2 + i) + (K_m + 1)^2 + K_m + 1}. \quad (7)$$

Очевидно, що зі збільшенням порядку K_m коефіцієнт d значно збільшується (рис. 2).

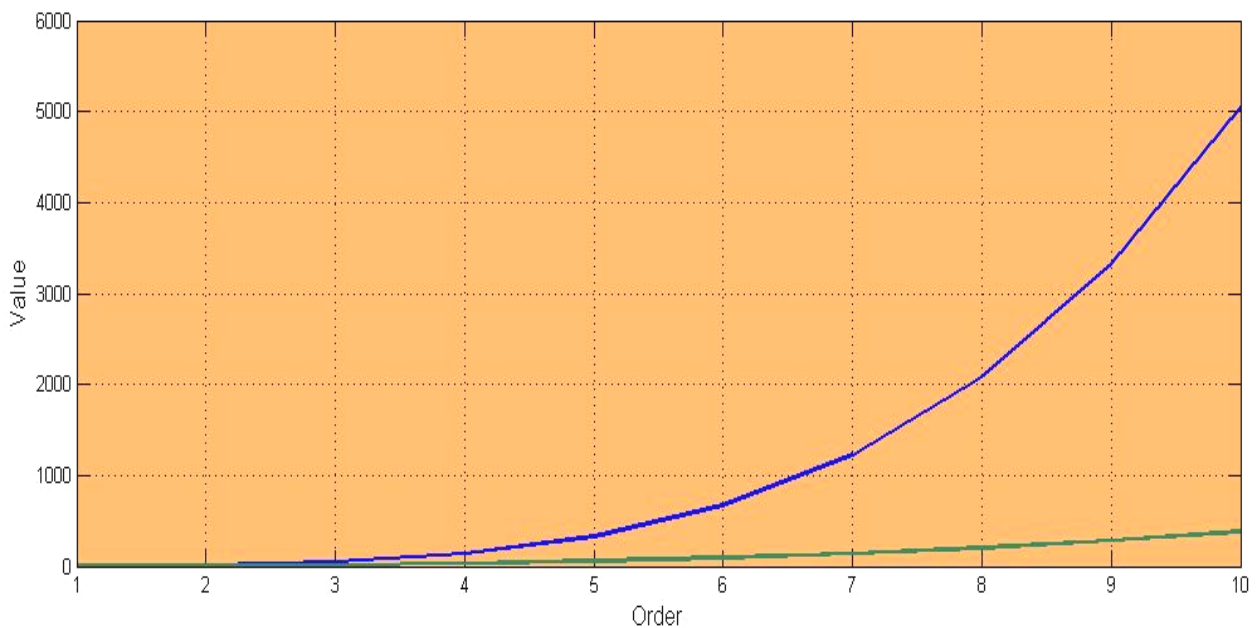


Рис. 2. Порівняння швидкості обчислення матриці нормальних рівнянь для 10-го порядку

Проте процес обертання матриці (4) або (6) займає однакову кількість часу. Крім того, зі збільшенням порядку K_m може втрачатися точність знаходження невідомих коефіцієнтів. Тому виникає необхідність пошуку аналітичних виразів для знаходження цих коефіцієнтів.

Розглянемо систему нормальних рівнянь

$$NX = Q, \quad (8)$$

де X – вектор невідомих коефіцієнтів, $Q = -A^T L$; A – матриця коефіцієнтів параметричних рівнянь; L – вектор вільних членів.

Із (6) зрозуміло, що між собою корелюють тільки коефіцієнти типу $\bar{R}_{n_1 m}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{R}_{n_2 m}(\vartheta, \lambda)$ або типу $\bar{S}_{n_1 m}(\vartheta, \lambda) \cdot \bar{S}_{n_2 m}(\vartheta, \lambda)$, причому тільки з однаковими m . На основі цього можна записати такі системи рівнянь :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=m}^{K_m} \sum \bar{R}_{im} \bar{R}_{jm} \cdot x_{\sigma} &= q_{\sigma}, \quad j = m, K_m; \quad m = 0, K_m \\ \sum_{i=m}^{K_m} \sum \bar{S}_{im} \bar{S}_{jm} \cdot x_{\delta} &= q_{\delta}, \quad j = m, K_m; \quad m = 1, K_m \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

де $\sigma = \sigma(i, m)$, $\delta = \delta(i, m)$.

Із формул (9) зрозуміло, що замість обертання матриці порядку $(K_m + 1)^2$ достатньо обернути $(2K_m + 1)$ матриць порядків від 1 до $(K_m + 1)$.

Із рівнянь (5) бачимо, що формула (9) для сегмента сфери буде аналогічною.

Наукова новизна і практична значущість

Запропоновано алгоритм побудови матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля, який дає змогу значно скоротити кількість елементів цієї матриці, які є необхідними для подальших обчислень, а отже, значно скоротити час обчислення матриці нормальних рівнянь. Отримано формули для знаходження невідомих гармонічних коефіцієнтів.

Надалі планується побудова локального гравітаційного поля та його трансформант з використанням вищенаведеного алгоритму на територію Арктики. За вихідні дані планується використати дані з Арктичного проекту [NGA, 2008].

Висновки:

1. Знайдено методику обчислення матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля, яка значно пришвидшує процес знаходження цієї матриці.

2. Знайдено формули для обчислення гармонічних коефіцієнтів, використовуючи властивості матриці нормальних рівнянь.

3. Виконано порівняння швидкості знаходження гармонічних коефіцієнтів згідно з оригінальним та запропонованим методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Джуман Б.Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля // Геодинаміка. – 2013. – №1(14). – С.29–33.
- Лук'янченко Ю.О. Побудова нормальних рівнянь для опрацювання даних місії GOCE // Геодинаміка. – 2013. – №1(14). – С.34–37.
- De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field // Geophys. Res. Lett., 1992. – 19. – P.1065–1067.
- De Santis A., Torta J. Spherical cap harmonic analysis : a comment on its proper use for local gravity field representation // J. of Geod., 1997. – 71. – P. 526–532.
- Eicker A. Gravity field refinement by radial basis functions from In-situ satellite data, 2008. – P 137.
- Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields // Comput. Geosci., 1988. – 14. – P.413–447.
- Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis // J. Geophys. Res., 1985. – 90. – P.2583–2591.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. Physical Geodesy, Wien New York : Springer Science + Busines Media, 2005. – P. 403.
- Hwang C., Chen S. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 // Geophys. J. Int., 1997. – 129. – P. 450–460.
- Hwang J. Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis / Hwang J. Han H., Han S., Kim K., Kim J., Kang M., Kim C. // J. of Geodynamics, 2012. – 53. – P. 27–33.
- Jiancheng L. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / Jiancheng L., Dingbo C., Jiancheng N. // Manuscr. Geod., 1995. – 20. – P. 265–277.
- NGA, Arctic Gravity Project, The National Imagery and Mapping Agency, 2008, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/>.
- Thebault E. Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) / Thebault E., Manda M., Schott J. // J. Of Geophys. Research, 2006. – 111. – 13 p.

А.Н. МАРЧЕНКО¹, Б.Б. ДЖУМАН^{1*}

¹Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет “Львовская политехника”, ул. С. Бандеры 12, Львов, Украина, 79013.

^{1*}Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет “Львовская политехника”, ул. С. Бандеры 12, Львов, Украина, 79013, тел. +38(068)7632139, ел. пошта teojuman@gmail.com.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотрена методика построения локального гравитационного поля с помощью неортогональных базовых функций, которые являются решением уравнения Лапласа на „шапке” или сегменте сферы. Этот подход предполагает использование присоединенных функций Лежандра целого степеня и действительного порядка. Данные функции составляют две системы функций. В каждой из этих систем они являются ортогональными между собой на „шапке” сферы. Поэтому для использования обеих систем функций традиционно используют способ наименьших квадратов. Однако для высоких порядков достаточно сложно находить собственные числа данных функций. В таких случаях можно спроектировать исходные данные на полусферу и использовать присоединенные функции Лежандра целого степеня и порядка. Свойства таких функций аналогичны свойствам функций на „шапке” сферы. Традиционно исходные данные для построения гравитационного поля размещаются на равномерной сетке. Существует много видов равномерных сеток, которые позволяют ускорить процесс нахождения неизвестных гармонических коэффициентов. Среди этих равномерных сеток можно выделить географическую равномерную сетку, равномерную сетку Гаусса и другие. Таким образом введено равномерную сетку для размещения исходных данных и определены ее основные свойства на сегменте сферы и полусфере. С использованием соответствующих свойств равномерной сетки получена методика вычисления матрицы нормальных уравнений, которая позволяет значительно сократить время вычислений. Также получены формулы для нахождения неизвестных коэффициентов, которые позволяют перейти от вращения матриц порядка α^2 к порядку α . Таким образом предложенный алгоритм для построения матрицы нормальных уравнений и определения гармонических коэффициентов локального гравитационного поля приводит к значительному уменьшению времени вычислений без потери точности.

Ключевые слова: матрица нормальных уравнений; гармонические коэффициенты; локальное гравитационное поле.

A.N. MARCHENKO¹, B.B. DZHUMAN^{1*}

¹Department “Higher geodesy and astronomy” of National university Lviv polytechnic, S. Bandera street 12, Lviv, Ukraine, 79013.

^{1*}Department “Higher geodesy and astronomy”, of National university Lviv polytechnic, S. Bandera street 12, Lviv, Ukraine, 79013, tel. +38(068)7632139, e-mail teojuman@gmail.com.

CONSTRUCTION OF THE NORMAL EQUATIONS MATRIX FOR MODELING OF LOCAL GRAVITATIONAL FIELD

We consider the method of constructing the local gravity field using nonorthogonal basic functions, which are solution of the Laplace equation in spherical cap or spherical segment. This approach involves using of associated Legendre functions of integer degree and noninteger order. These functions form two sets of functions. They are mutually orthogonal over the spherical cap in each set. Thus, for using both of these sets of functions it is traditionally used least squares method. However, for higher orders it is quite difficult to compute eigenvalues of these functions. In such case it is possible to project the initial data on the hemisphere and to use associated Legendre functions of integer degree and integer order. The properties of these functions are similar to properties of functions on the spherical cap. Traditionally, initial data is selected in the nodes of grid, especially for fast computations. There are many kinds of uniform grids, which allow to speed up the process of computation the unknown harmonic coefficients. Among these grids it is possible to allocate the geographical grid, Gauss grid and others. Thus, grid is developed to accommodate the initial data and is defined its basic properties in the segment of sphere and hemisphere. Using the properties of grid technique for computing the matrix of normal equations is obtained, which leads to a time reducing procedure. Also formulas for computations of unknown coefficients are obtained which allow to switch from the inversion of matrix with order α^2 to matrix with order α . The proposed algorithm for the constructing of the normal equations matrix and determination of harmonic coefficients of the local gravitational field leads to a time reducing procedure without degradation of accuracy.

Key words: normal equations matrix; harmonic coefficients; local gravitational field.

REFERENCES

- Dzhuman B.B. Pro pobudovu modeli lokalnoho hravitatsiinoho polia [On the construction of local gravitational field model]. *Heodynamika*, 2013, no.1(14), pp.29–33.
- Lukianchenko Yu.O. Pobudova normalnykh rivnian dlia opratsiuvannia danykh misii GOCE [Construction of normal equations mission for processing data GOCE]. *Heodynamika*, 2013, no.1(14), pp.34–37.
- De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.*, 1992, issue 19, pp.1065–1067.
- De Santis A., Torta J. Spherical cap harmonic analysis : a comment on its proper use for local gravity field representation // *J. of Geod.*, 1997, 71, p. 526–532.
- Eicker A. Gravity field refinement by radial basis functions from In-situ satellite data, 2008, p.137.
- Haines G.V. Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields // *Comput. Geosci.*, 1988, 14, p.413–447.
- Haines G.V. Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 1985, issue 90, pp.2583–2591.
- Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. *Physical Geodesy*, Wien New York: Springer Science + Busines Media, 2005, p.403.
- Hwang C., Chen S. Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1 // *Geophys. J. Int.*, 1997, 129, p. 450–460.
- Hwang J., Gravity and geoid model in South Korea and its vicinity by spherical cap harmonic analysis / Hwang J., Han H., Han S., Kim K., Kim J., Kang M., Kim C. // *J. of Geodynamics*, 2012, 53, p. 27–33.
- Jiancheng L., Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation / Jiancheng L., Dingbo C., Jiancheng N. // *Manuscr. Geod.*, 1995. – 20, – p. 265–277.
- NGA, Arctic Gravity Project, The National Imagery and Mapping Agency, 2008. Available at: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/agp/>
- Thebault E., Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) / Thebault E., Mandeau M., Schott J. // *J. Of Geophys. Research*, 2006. – 111. – 13 p.

Надійшла 15.12.2013 р.