

ОЦІНЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ МЕТОДАМИ ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ЖОРСТКІ ОБЕРТАННЯ ЗЕМЛІ – КУТОВІ СПОТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Мета. Оцінювання жорсткого обертання Землі як складової глобальних деформаційних полів у взаємозв'язку з кутковими спотвореннями геоцентричної просторової системи координат. **Методика.** Розв'язки досягнуто методами проективно-диференціальної (метричної) геометрії на основі диференціального подання перетворень образів ріманового простору у формі його складних диффеоморфних многовидів. Враховуючи сутність системи ITRS, у якій задано вхідні дані, та глобальний масштаб деформаційних полів, рімановим многовидом визначено дотичний евклідовий простір. Щоб виконати завдання, використано прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному евклідовому просторі, який параметризований декартовою системою координат. **Результати.** Використовувана основа дала змогу одержати результати, які з погляду їх змісту і практичного застосування мають двояку інтерпретацію. У частині вираження групи параметрів куткових спотворень для потреб деформаційного аналізу встановлено співвідношення для кутів жорсткого обертання Землі в проекціях на координатні площини системи ITRS. Водночас доведено, що ці кути є показниками спотворень системи координат. Гіпотеза ймовірних деформацій геоцентричної просторової системи обґрунтована геофізичним змістом концепції створення ITRS. Аргументовано тотожність умов параметризації Землі системою ITRS і параметризації дотичного евклідового простору декартовою системою координат. На цій основі істинність гіпотези можна перевірити за емпіричними значеннями кутів, які визначені з результатів GNSS-спостережень. За умови достатньої значущості, вони є показниками куткових спотворень системи ITRS чи, у вираженні відхиленнями від ортогональності осей у ITRF-реалізації, мірами косокутної декартової системи на будь-яку епоху спостережень після реалізації. Методами проективно-диференціальної геометрії одержано аналітичні вираження напрямів координатних осей деформованої системи. **Наукова новизна.** Доведено, що підхід до розв'язання задач деформаційного аналізу в геодинаміці на засадах ріманової геометрії є узагальнювальним відносно використовуваного. На такій основі обґрунтовано перспективи подання деформаційних полів нелінійними функціональними моделями. **Практична значущість.** Одержані результати спрямовані на їх використання під час оцінювання глобальних деформаційних полів Землі та вирішення питань сучасної геодезії в її взаємозв'язку з геодинамікою на основі досліджень референціальних систем координат. Усі аналітичні вираження показників куткових спотворень подано у загальному вигляді, який здатний передати нелінійні закономірності деформації. Методика деформаційного аналізу адаптована до використання вхідними даними результатів GNSS-моніторингу координат станцій з урахуванням деформації системи ITRS.

Ключові слова: ріманові диффеоморфні многовиди; метричний тензор простору; деформаційний аналіз; жорсткі обертання Землі; деформація системи координат.

Вступ

Оцінювання та аналіз деформаційних полів Землі – одне з актуальних завдань сучасної геодинаміки. Його вирішення має комплексний характер і досягається методами різних природничих наук. Посеред них геодезичні методи посідають особливе місце як такі, що здатні кількісно оцінити переміщення фізичної поверхні Землі і забезпечують їх дослідження та інтерпретацію у рамках різних математичних моделей. Мету і стратегічні напрями досліджень визначено резолюціями Міжнародної асоціації геодезії IAG (International Association of

Geodesy) у рамках діяльності підкомісії 3.2 “Деформації земної кори” комісії 3 “Обертання Землі та геодинаміка”. У числі пріоритетних напрямів передбачено “дослідження деформацій земної кори усіх масштабів від глобальної тектоніки плит до локальних деформацій, ... розвиток і координацію міжнародних програм зі спостереження, аналізу та інтерпретації даних деформаційних полів” [International Association...]. Основним джерелом кількісної інформації для досліджень визнано дані безперервного моніторингу координат станцій, визначених методом глобальних навігаційних

супутникових систем GNSS (Global Navigation Satellite System). Існують також природні взаємозв'язки такого напрямку досліджень з діяльністю комісії 1 “Референцні системи”, оскільки їх визначення повинно узгоджуватись з поточними деформаціями земної кори.

Аналіз досліджень та невіршені частини загальної проблеми

Результати GNSS-моніторингу координат станцій виражені в міжнародній земній системі відліку ITRS (International Terrestrial Reference System). Як система відліку, зв'язана з тілом, що рухається нерівномірно та непрямолінійно, з прискоренням під дією сил з відмінною від нуля рівнодієюю, ITRS є неінерційною системою, яка рухається та обертається разом із Землею. Враховуючи, що інерційність будь-якої реальної системи відліку загалом приблизна та будь-яка точка, що її можна було б вибрати за початок системи координат, неінерційна і здійснює якийсь нерівномірний рух, початок відліку ITRS поміщено у центрі мас твердої Землі, океанів та атмосфери. Система ITRS підпорядкована NNR-умові (No-Net-Rotation) – концепції збереження моменту імпульсу Землі в цілому, який відповідає нульовому сумарному моменту імпульсу всіх літосферних плит згідно їх кінематичної моделі.

Моніторинг системи ITRS здійснюється сумісно з моніторингом Землі такими методами супутникової геодезії як інтерферометрія з наддовгою базою VLBI (Very Long Baseline Interferometry), супутникова лазерна локація SLR (Satellite Laser Ranging), доплерівська орбітографія та супутникова радіолокація DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite) і GNSS. Шляхом комбінованого опрацювання результатів моніторингу переліченими методами, параметрів орієнтації EOPs (Earth Orientation Parameters), які забезпечує Міжнародна служба обертання Землі IERS (International Earth Rotation Service), а також часу і чинників фізичного походження (враховуються масштабним фактором) встановлюються ITRF-реалізації (International Terrestrial Reference Frame) системи ITRS. Визначена на задану епоху спостережень, ITRF-реалізація ідентифікується як датум. Положення

кожного поточного датуму обчислюється з урахуванням зміщень T_x, T_y, T_z початку відліку геоцентричної системи відносно її попередньої реалізації, масштабного фактору D , зміни орієнтування координатних осей R_x, R_y, R_z та швидкостей $\dot{T}_x, \dot{T}_y, \dot{T}_z, \dot{D}, \dot{R}_x, \dot{R}_y, \dot{R}_z$. Розв'язки (трансформації) ITRF за вказаними даними досягаються використанням загальновідомого перетворення Гельмерта. IERS рекомендує використовувати його лінеаризовану форму [IERS Conventions...]. Параметри трансформації між останніми ITRF-реалізаціями подано у таблиці. Їх одержано за координації ITRS-центру IERS при Національному географічному інституті Франції, який резолюцією Генеральної Асамблеї ООН від 26 лютого 2015 року визнано відповідальною установою в частині визначення змісту ITRS і досягнення розв'язків ITRF для створення глобальної геодезичної референцної системи відліку GGRF (Global Geodetic Reference Frame) у рамках програми підтримки та покращення геодезичної інфраструктури і забезпечення сталого розвитку.

Питання вибору початку відліку ITRS, який відповідає центру мас твердої Землі, океанів та атмосфери, на сьогоднішній день є дискусійним. Так, згідно аргументацій [Argus et al., 2010], такий підхід не завжди підтверджується на практиці. Швидкість руху початку відліку геоцентричної системи не є сталою величиною, як це показують, на думку авторів, неприпустимо великі відмінності між ITRF-реалізаціями. Наприклад, лінійна швидкість його руху в реалізації ITRF2005 відрізняється від ITRF2000 на 1.8 мм/рік, а від ITRF1997 – на 3.4 мм/рік. Крім того, в окремих ITRF-реалізаціях по-різному задається положення і відповідно визначається швидкість початку відліку. Так, у ITRF1997 початок визначено з сумісного опрацювання даних спостережень методами GNSS, VLBI, SLR як геометричний центр фігури твердої Землі, а його швидкістю є середня швидкість поверхні Землі, визначена за гіпотези сталості її руху в рамках кінематичної моделі NUVEL-1A. В ITRF2000 і наступних реалізаціях за початок відліку вже прийнято центр мас Землі, океанів та атмосфери під NNR-умовою, а його швидкість визначена з SLR-спостережень орбіт

LAGEOS (LAsER GEODynamics Satellite). З метою усунення цих невідповідностей швидкості руху літосферних плит GEODVEL [Argus et al., 2010] визначені за гіпотези, що початком відліку є центр мас твердої Землі, а компоненти геодезичних швидкостей визначені з урахуванням руху центру мас твердої Землі відносно початку відліку ITRF2005, врахованого поправками 0.3, 0.0 і 1.2 мм/рік в напрямках координатних осей x, y, z відповідно. Швидкості станцій у ITRF2000 виправлені поправками -0.1, 0.1 і -0.6 мм/рік і віднесені до того ж центру мас. На таких засадах створено кінематичні моделі MORVEL [DeMets et al., 2010] та NNR-MORVEL56 [Argus et al., 2011]. Аргументації застосування подібного роду поправок для ліквідації систематичних зміщень початку ITRS відносно центру сферичної відлікової основи обертання плит (як центру мас твердої Землі) подано також у статті [Kogan, Steblov, 2008]. Результати досліджень, поданих у статті [Wu et al., 2011], показують узгодження початку відліку в реалізації ITRF2008 з центром мас твердої Землі на рівні 0.5 мм/рік, чим, за числовим показником, попередні аргументації ставляться під сумнів.

Суперечні, щодо поданих у таблиці, результати одержано аналітичними центрами Міжнародної GNSS-служби IGS (International GNSS Service). Комбіновані розв'язки відносно реалізації ITRF2005 показали оцінки зміщення геоцентру на рівні 5 мм у складових x, y і 10мм у z . Неузгодженість параметрів орієнтації з даними IERS оцінено на рівні $(-0.04 \div +0.05) \times 0.001''$ з точністю $\pm 0.05 \times 0.001''$ [Ferland, Piraszewski, 2009].

У статті [Altamini et al., 2012] представлено кінематичну модель ITRF2008-PMМ і викладено обґрунтування її розрахункової точності на рівні 0.3 мм/рік за умови положення геоцентру, який відповідає центру мас Землі, океанів та атмосфери; також подано порівняння з іншими використовуваними кінематичними моделями. Модель узгоджена з реалізацією ITRF2008 і покладена в основу NNR-умови при розв'язку ITRF2014 та відповідної йому новітньої версії моделі руху літосферних плит [Altamini et al., 2016].

Наведені факти посвідчують відсутність однозначного підходу до вибору початку відліку геоцентричної системи, а отже й визначення його зміщення.

Таблиця

Параметри переходу між останніми розв'язками ITRF [Altamini et al., 2007; 2011; 2016]

Трансформації	$T_x, \text{мм}$ $\dot{T}_x, \text{мм/рік}$	$T_y, \text{мм}$ $\dot{T}_y, \text{мм/рік}$	$T_z, \text{мм}$ $\dot{T}_z, \text{мм/рік}$	$D \cdot 10^{-9}$ $\dot{D} \cdot 10^{-9}/\text{рік}$	$R_x \cdot 0.001''$ $\dot{R}_x \cdot 0.001''/\text{рік}$	$R_y \cdot 0.001''$ $\dot{R}_y \cdot 0.001''/\text{рік}$	$R_z \cdot 0.001''$ $\dot{R}_z \cdot 0.001''/\text{рік}$
ITRF2005–ITRF2000	0.1±0.3 -0.2±0.3	-0.8±0.3 0.1±0.3	-5.8±0.3 -1.8±0.3	0.40±0.05 0.08±0.05	0.00±0.01 0.00±0.01	0.00±0.01 0.00±0.01	0.00±0.01 0.00±0.01
ITRF2008–ITRF2005	-0.5±0.2 0.3±0.2	-0.9±0.2 0.0±0.2	-4.7±0.2 0.0±0.2	0.94±0.03 0.00±0.03	0.00±0.08 0.00±0.08	0.00±0.08 0.00±0.08	0.00±0.08 0.00±0.08
ITRF2014–ITRF2008	1.6±0.2 0.0±0.2	1.9±0.1 0.0±0.1	2.4±0.1 -0.1±0.1	-0.02±0.02 0.03±0.02	0.00±0.06 0.00±0.06	0.00±0.06 0.00±0.06	0.00±0.06 0.00±0.06

Використання вхідними даними результатів GNSS-вимірів суттєво підвищило потенційні можливості геодезичного моніторингу деформаційних полів Землі. Разом з тим, неоднозначності встановлення датуму породили проблему, пов'язану з ефектом втрати інваріантності параметрів деформації. Вона зумовила переосмислення теоретичних основ деформаційного аналізу і вироблення нових моделей та методів опрацювання даних.

Дослідження впливу зміни системи відліку на результати інтерпретації деформаційних

полів розпочалися ще від часу запровадження у дослідницьку практику сучасних супутникових навігаційних технологій. На ймовірних наслідках такого впливу було акцентовано увагу ще у доповіді [Dermanis, Grafarend, 1993]. Аналіз ефектів втрати інваріантності параметрів деформації подано у статтях [Vanicek et al., 2008; Dermanis, 2009, 2010]. Проблема трансформації даних спостережень до однієї епохи залишається актуальною ще й дотепер. З метою збалансування трансформації GNSS-даних та теоретичних основ механіки

суцільного середовища у статтях [Dermanis, 2010; Hossainali et al., 2011a, 2011b] пропонуються методики врахування зазначених ефектів на епоху ITRF-реалізації. Вони засновані на сингулярному розкладанні (“singular value decomposition”) градієнта деформації і ґрунтуються на класичній теорії пружності у її найпростішій лінійній формі.

Вплив ефектів втрати інваріантності суттєво підвищується за потреби проведення деформаційного аналізу станом на епохи спостережень, які не співпадають з ITRF-реалізаціями.

Власне бачення вирішення завдань оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі обґрунтовано у статті [Гадєєв, 2015]. Завдання деформаційного аналізу розглянуті у контексті “зовнішнього моделювання”, як це сформульовано в [Grafarend, Voosoghi, 2003]. Визначена там постановка завдань дає підстави розглядати проблему у тому числі й у розрізі врахування ймовірних ефектів втрати інваріантності параметрів деформації.

Проблема оцінювання тривимірних деформаційних полів розглядається з позицій диференціального подання перетворень (відображень) образів простору з використанням методів проективно-диференціальної (метричної) геометрії [Каган, 1947; Фиников, 1937]. За гіпотези, що перетворення мають геофізичне походження, вони ототожнюються з деформацією топографічної поверхні Землі як області простору. Тоді, використовуючи тривимірний метричний тензор простору, розкриваються перспективи описування деформації різними за змістом числовими характеристиками. Беручи до уваги усталену практику деформаційного аналізу, такі характеристики поділено на три групи: 1) головні лінійні деформації – показники зміни форми у заданому напрямі; 2) показники кутових спотворень 3) дилатація – показники зміни об’єму Землі чи площі частини її поверхні із збереженням загальної форми (масштабний фактор).

Мета

Ґрунтуючись на теорії диференціального подання перетворень образів простору, у цій частині досліджень розкриємо можливості

оцінювання кутових спотворень, які асоціюються з ефектами жорсткого обертання Землі як області перетворення простору. Беручи до уваги концепцію створення системи ITRS, в якій виражені вхідні дані, спробуємо пов’язати такі спотворення з ймовірними деформаціями системи координат і ефектами втрати інваріантності при інтерпретації деформаційних полів Землі. Також спробуємо представити результати розв’язків у загальному вигляді, виходячи з перспективи вираження деформації нелінійними аналітичними формами.

Методика

Перетворення (або відображення) простору – процес, який полягає в тому, що кожній точці M простору ставиться у відповідність деяка точка M' . M' є відображенням (або проекцією) M . Сукупність точок M_i ($i = \overline{1, N}$) деякої частини чи навіть усього простору, які підлягають однозначному відображенню (або перетворенню), утворюють відображувану область Δ (або область перетворення). Сукупність точок M'_i , які відповідають точкам M_i , утворюють область відображення Δ' (або перетворену область). Якщо у тривимірному евклідовому просторі встановлено систему декартових координат (x, y, z) і область Δ замкнена та неперервна, то її цілком визначають (або окреслюють) точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Якщо внаслідок тих чи інших однозначних перетворень простору Δ відобразилась на Δ' і остання зберегла властивості замкненої неперервної області, то її цілком визначають точки $M'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$.

Нехай областю перетворення Δ є Земля як просторове тіло планетарного масштабу і координати $x_i = X_i^1$, $y_i = X_i^2$, $z_i = X_i^3$ точок M_i відповідають умовам параметризації Землі системою ITRS. Точки M_i – GNSS-станції, розташовані на її фізичній поверхні. Позначення (X^1, X^2, X^3) тотожні (x, y, z) і вводяться з метою компактного подання наступних проміжних і кінцевих результатів розв’язку. Якщо координати $x'_i = X_i'^1$, $y'_i = X_i'^2$, $z'_i = X_i'^3$ задають положення точок M'_i , які є

відображенням M_i і визначають собою область Δ' , то відображення Δ на Δ' завжди можна виразити аналітично рівняннями

$$\left. \begin{aligned} X'^1 &= u(X^1, X^2, X^3) \\ X'^2 &= v(X^1, X^2, X^3) \\ X'^3 &= w(X^1, X^2, X^3) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Загальна теорія відображень накладає на базові функції перетворення (1) умови гомеоморфізму: однозначність, неперервність та диференційованість (відмінність від нуля якобіана). Однак не обмежує їх аналітичні форми. Це дає змогу описувати і передавати перетворення будь-якими гладкими чи кусково-гладкими функціями, визначеними за переміщеннями $X_i^k - X_i^k$ ($k = \overrightarrow{1,3}$) вздовж певним чином параметрично заданої кривої. З точки зору поставленого завдання це забезпечує перспективу передачі у рамках функціональної моделі (1) перетворень нелінійного характеру.

Сформульована постановка задачі в частині функціонального подання перетворень, на перший погляд, мала б зумовити ускладнення математичного апарату, необхідного для її розв'язання. Адже розв'язки подібного роду задач досягаються у середовищі ріманового простору R_n , у даному випадку розмірності R_3 . Постановка ж завдання розкрита в евклідовому просторі E_3 , який є лише частковим випадком R_3 , до того ж на умовах параметризації E_3 декартовою прямокутною системою типу ITRS. Проте будь-які ускладнення чи суперечливості усуваються, якщо скористатися властивостями ріманового простору у формі його складних диффеоморфних многовидів – пари неізотропних многовидів однакової розмірності $n=3$, які зазнають взаємно однозначного неперервно диференційованого (гомеоморфного) відображення. У такій постановці ріманова геометрія розглядає диффеоморфний многовид E_3 як дотичний до ріманового простору.

Загалом рімановий простір R_n – це будь-який многовид розмірності n , у якому в нескінченно малому масштабі довкола точки M з координатами X^1, \dots, X^n задане поле двічі коваріантного, симетричного і не виродженого тензора $g_{ij}(M) = g_{ij}(X^1, \dots, X^n)$, тобто такого,

що $\det g_{ij} \neq 0$ і $g_{ij} = g_{ji}$. Щодо іншого, то тензор $g_{ij}(M)$ встановлюється довільно – на один і той же многовид можна по-різному накладати ріманову метрику. Геометрія ріманового многовиду не має строго оформленого жорсткого характеру, як у власне евклідовому просторі, і в порівнянні з останнім є аморфною і пластичною. Вона зумовлена лише його параметризацією тією чи іншою системою координат, у області зміни яких здійснюється відображення многовиду в формі неперервно диференційованих перетворень класу $n-1$. Такі перетворення визначають клас гладких чи кусково-гладких функцій, які передають це перетворення: C^{n-1} . До того ж всякий многовид достатньо розглядати лише з точністю до його заміни диффеоморфним многовидом, наскільки таку заміну вдасться подати функціональною залежністю між координатами точок у обох многовидах. Область визначення функцій – всяка точка многовиду. У кожній точці функції визначають тензор $g_{ij}(M)$, а їх сукупність утворює тензорне поле. Тож якщо потрібно задати тензорне поле, а не тензор в окремій точці, то достатньо задатись означеними вище функціями. Параметризація многовиду системою координат здійснюється у вигляді локального репера (чи базису) у дотичному просторі. Локальними реперами є самі системи координат, які розглядаються у просторі нескінченно малого масштабу довкола точки. Якщо у системі локального репера вздовж певним чином параметризованої кривої відбувається нескінченно мале переміщення ds точки M , то диференціал дуги ds виражається диференціальною квадратичною формою $ds^2 = g_{ij}dX^i dX^j$ (запис суми згідно правила Ейнштейна); ds^2 – лінійний елемент простору. З цієї точки зору рімановим простором називають многовид, у якому задана інваріантна диференціальна квадратична форма ds^2 . Тож у рімановому просторі тензорне поле ототожнюється з лінійним елементом ds^2 як таким, що визначає його метрику, а g_{ij} є геометричним образом многовида [Рашевский, 1967].

З огляду на поставлене завдання многовидом є евклідовий простір, який дотичний до кожної заданої точки ріманового простору у формі локальних тривимірних ортонормованих координатних базисів системи ITRS. Тоді тензорне поле з рімановою метрикою, коефіцієнти якої визначає функціональна модель (1), трансформується в геометричне зображення тензорів дотичного евклідового простору з відповідною властивою йому метрикою. Таким чином, для розв'язання задачі необхідно лише витримати умови достатньо гладкої зміни ріманової метрики при переході від точки до точки, що, власне, повинна забезпечувати адекватно побудована модель (1) неперервною диференційованістю її базових функцій. Оскільки дотичні координатні базиси до та після перетворення простору відповідають умовам E_3 , то окреслений теоретичний підхід і постановка завдання залишаються в силі, а апарат ріманової геометрії знадобиться лише на стадії побудови функціональної моделі (1). Варто принагідно зауважити, що така модель придатна для вирішення на її основі задач деформаційного аналізу в геодинаміці за гіпотези, що зміна метрики простору має геофізичне походження і спричинена його деформацією.

Нехай система координат, в якій задано положення точок M_i області Δ (початковий стан Землі в момент часу t_0), – прямокутна декартова і ототожнюється з системою ITRS. Лінійний елемент області Δ

$$ds^2 = \delta_{ij} dX^i dX^j. \quad (2)$$

Тут внаслідок ортогональності осей координат метричні коефіцієнти δ_{ij} такі, що

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

отже формують собою одиничну матрицю. Лінійний елемент ds ідентифікує метричну форму недеформованої області Δ у початковому стані.

Метрична форма деформованої області Δ' (кінцевий стан в момент часу $t_1 = t_0 + dt_1$) асоціюється з лінійним елементом ds' , який є відображенням ds :

$$ds'^2 = e_{ij} dX^i dX^j. \quad (3)$$

Метричні коефіцієнти e_{ij} квадратичної форми (3) генерують симетричну матрицю, яка називається основним метричним двохвалентним тензором перетворення (деформації) простору:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Коефіцієнти e_{ij} визначає функціональна модель

(1). Алгоритм розкриття коефіцієнтів такий:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^1} \right)^2; \\ e_{22} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^2} \right)^2; \\ e_{33} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^3} \right)^2; \\ e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^2} + \frac{\partial w}{\partial X^1} \frac{\partial w}{\partial X^2}; \\ e_{23} &= \frac{\partial u}{\partial X^2} \frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^2} \frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^2} \frac{\partial w}{\partial X^3}; \\ e_{13} &= \frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^1} \frac{\partial w}{\partial X^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Згідно теорії тензорного аналізу, e_{ij} є основним носієм інформації як про стан і характер кінцевої деформації області Δ , так і про деформацію системи координат X^i ($i = \overline{1,3}$) – зміну орієнтування координатних осей (обертання) та (або) порушення їх ортогональності. За умови $ds = ds'$ деформація відсутня, можливе лише паралельне переміщення області перетворення і системи координат. Якщо $ds \neq ds'$, то це є ознакою того, що одночасно з таким переміщенням мають місце деформації з числовим вираженням і характером, які залежать від абсолютних значень e_{ij} загалом і співвідношень між діагональними та недиагональними коефіцієнтами тензора (4). Мірою деформації найчастіше використовують різницю квадратичних форм (2) і (3) або їх відношення [Сокольников, 1971].

Результати

Використання системи ITRS у формі ITRF-реалізацій змушує розглядати вирішення задач геодинаміки загалом і деформаційного аналізу окрема в такій постановці.

Початковий стан Землі як області простору Δ , яка параметризована декартовою прямокутною системою координат в момент часу t_0 , відносимо до датуму, котрий відповідає останньому розв'язку ITRF. Якщо область Δ на момент часу $t_1 = t_0 + dt_1$ трансформувалась у область Δ' , то у кінцевому стані відповідних перетворень зазнала і система координат. Система X'^i ($i = \overline{1,3}$) – деформована відносно її стану в датумі. Отже, крім паралельного переміщення початку відліку внаслідок поступального руху Землі, можливе й порушення ортогональності осей координат. Тоді X'^i стає косокутною декартовою системою.

Гіпотеза деформування системи ITRS може бути прийнятною ще й з наступних логічних міркувань. У їх основу покладено геофізичну сутність NNR-умови, якою обтяжена система. Ця умова ставить систему в залежність від глобальної тектонічної активності Землі. Одним з ефектів такої активності є сучасні рухи та деформації літосферних плит. Суттєве вираження і аномальний характер цих явищ можуть порушити NNR-умову як концепцію співпадання нульового сумарного моменту імпульсу всіх плит і моменту імпульсу Землі в цілому. У такому випадку неминучою буде деформація системи ITRS, якою параметризована Земля. Підтвердити або, рівною мірою, заперечити висунуту гіпотезу можна емпіричним способом, якщо в його основу покласти наступні незаперечні геометричні аргументації.

Загалом для будь-яких двох точок $P_1(X^i)$ і $P_2(X^i + dX^i)$ тривимірного простору ($i = \overline{1,3}$) з його квадратичної форми $ds^2 = g_{ij}dX^i dX^j$ слідує, що довжини елементів дуги ds в проєкціях на координатні осі системи, якою параметризовано простір, виражаються добутками $ds^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}dX^i$. Верхній індекс в

проєкції $ds^{(i)}$ символізує її належність відповідній осі X^i . Косинуси кутів η_{ij} між парами проєкцій $ds^{(i)}$ та $ds^{(j)}$, як їх показано на рис. 1, виражає формула [Сокольников, 1971]

$$\cos \eta_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}. \quad (6)$$

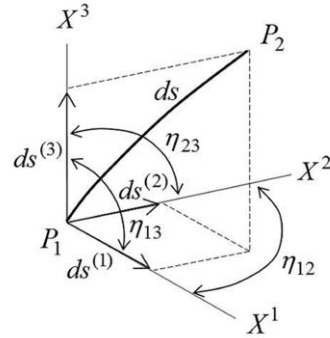


Рис. 1. Кути між проєкціями дуги ds на осі координат

Якщо в початковому стані на момент часу t_0 система координат прямокутна, то метричні коефіцієнти $g_{ij} = \delta_{ij}$ і $\eta_{ij}^{(0)} = 90^\circ$, що слідує з (6). У загальному випадку формула (6) виражає кути між осями координат довільної не ортонормованої системи тривимірного простору з метрикою, яку закладено у тензор g_{ij} . Якщо на момент часу t_1 простір зазнав перетворення такого, що воно спричинило зміну його метричних властивостей, то $g_{ij} = e_{ij}$. З метричними коефіцієнтами e_{ij} пов'язують абсолютні лінійні розширення простору, які направлені вздовж осей координат. Коефіцієнти e_{ij} при $i \neq j$ називають зсувними. За умови, що $e_{ij} \neq 0$, кути $\eta_{ij}^{(1)} \neq 90^\circ$. Тоді $\eta_{ij}^{(1)}$ є абсолютними мірами косокутної системи координат. Верхні індекси в кутах $\eta_{ij}^{(0)}$ чи $\eta_{ij}^{(1)}$ символізують їх приналежність до моментів часу t_0 чи t_1 . Поданий факт слід визнати достатньою аргументацією для посвідчення ймовірної втрати ортогональності системи координат згідно сформульованої вище постановки задачі.

Виразити деформацію області Δ протягом періоду dt_1 відносно її початкового стану дають

зможу квадратичні форми (2) і (3). Якщо мірою деформації взяти різницю $ds'^2 - ds^2$, то зміна довжини дуги на одиницю довжини

$$\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} = (e_{ij} - \delta_{ij}) \frac{dX^i}{ds} \frac{dX^j}{ds} = \mu^2.$$

Коефіцієнти $\mu_i = \sqrt{e_{ii} - 1}$ – відносні лінійні розширення в проекціях $ds^{(i)}$. Тоді формула (6) набуває вигляду

$$\cos \eta_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\mu_i \mu_j}. \quad (7)$$

Допустимо, $\eta_{ij}^{(1)} = 90^\circ - \varepsilon_{ij}^{(1)}$, де $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ – зміна початкового прямого кута між парою елементів дуги, які направлені вздовж осей координат. Тоді з формули (7) слідує:

$$\sin \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}}{\mu_i \mu_j}. \quad (8)$$

Якщо кути $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ малі, то $\varepsilon_{ij}^{(1)} \approx e_{ij}$, що вважається практично допустимим з точки зору класичної лінійної теорії деформації.

Поданий розв'язок ґрунтується на теорії тензорного аналізу у викладенні [Сокольников, 1971]. У контексті розв'язуваного завдання кути $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ можна інтерпретувати двояко. З одного боку, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ – це показники кутових спотворень системи ITRS відносно її стану в ITRF-реалізації. З іншого, враховуючи, що система ITRS “прив’язана” до Землі, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ виражають її жорсткі повороти як абсолютно твердого тіла у напрямках між парами координатних осей $X^i X^j$ за період dt_1 відносно тієї ж ITRF-реалізації.

Розглянемо завдання з іншої точки зору – в проекціях дуги ds на координатні площини. Використаємо розв’язки проф. Г.О. Мещерякова для пошуку оптимальних проекцій при відображенні різних поверхонь на площину в математичній картографії [Мещеряков, 1968]. На їх основі виражено кутові спотворення двовимірної прямокутної системи координат, як це подано у статті [Тадєєв, 2013].

Нехай $dX^3 = 0$ і проекція ds лежить у площині екватора $X^1 O X^2$. Квадратичні форми

(2) і (3) набувають вигляду $ds_{12}^2 = \delta_{ij} dX^i dX^j$ і $ds_{12}'^2 = e_{ij} dX^i dX^j$, де $i, j = 1, 2$. Беручи до уваги, що тепер розглядаються лише повні диференціали функцій (1) вигляду

$$dX'^1 = \frac{\partial u}{\partial X^1} dX^1 + \frac{\partial u}{\partial X^2} dX^2, \quad dX'^2 = \frac{\partial v}{\partial X^1} dX^1 + \frac{\partial v}{\partial X^2} dX^2,$$

алгоритм (5) спрощується і метричні коефіцієнти розкриваються наступним чином:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^1} \right)^2; \\ e_{22} &= \left(\frac{\partial u}{\partial X^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^2} \right)^2; \\ e_{12} &= \frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Допустимо, внаслідок деформації вісь X^1 в площині $X^1 O X^2$ відобразилась проекцією X'^1 . Її напрям відносно X^1 визначає кут $\psi_{12}^{(1)}$. Напрямок проекції X'^2 осі X^2 визначає кут $\chi_{12}^{(1)}$. Їх показано на схемі (рис. 2.а). Явне вираження напрямів $\psi_{12}^{(1)}$ і $\chi_{12}^{(1)}$ є наслідком відношення диференціалів проекцій осей на площині відображення в кінцевому стані, які подані в системі координат початкової площини:

$$\left. \frac{dX'^2}{dX'^1} \right|_{\substack{dX^3=0 \\ X^2=const}} = \left(\frac{\partial v}{\partial X^1} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial X^1} \right) = \operatorname{tg} \psi_{12}^{(1)}; \quad (10)$$

$$\left. \frac{dX'^2}{dX'^1} \right|_{\substack{dX^3=0 \\ X^1=const}} = \left(\frac{\partial v}{\partial X^2} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial X^2} \right) = \operatorname{tg} \chi_{12}^{(1)}. \quad (11)$$

Враховуючи вираження (10) та (11), з різниці $\chi_{12}^{(1)} - \psi_{12}^{(1)} = \eta_{12}^{(1)}$ слідує:

$$\operatorname{tg} \eta_{12}^{(1)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^2} - \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^2}}{\frac{\partial u}{\partial X^1} \frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1} \frac{\partial v}{\partial X^2}}.$$

Вираз у чисельнику асоціюється з абсолютним показником зміни площі відображуваної області в її проекції на площину як детермінант метричного тензора, сформованого коефіцієнтами (9): $e_{11}e_{22} - e_{12}^2 = \det e_{ij}$. Тому

$$\operatorname{tg} \eta_{12}^{(1)} = \frac{\sqrt{\det e_{ij}}}{e_{12}}. \quad (12)$$

Для показника кутів спотворень $\varepsilon_{12}^{(1)} = 90^\circ - \eta_{12}^{(1)}$

$$\operatorname{ctg} \varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{\sqrt{\det e_{ij}}}{e_{12}}. \quad (13)$$

Вираження кута $\eta_{12}^{(1)}$ за формулами (7) та (12) і рівною мірою кута $\varepsilon_{12}^{(1)}$ за формулами (8) та (13) відповідно тотожні, в чому легко переконатись шляхом перетворень (12) чи (13) з урахуванням міри деформації $ds_{12}'^2 - ds_{12}^2$.

На такій же основі здійснено розв'язки і одержано явні вираження напрямів $\psi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ і показників кутів спотворень $\eta^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$, які з них слідують, в проекціях на інші координатні площини системи X^i ($i = \overline{1,3}$). Так, в проекції на площину X^1OX^3

$$\left. \frac{dX'^3}{dX'^1} \right|_{\substack{dX^2=0 \\ X^3=\text{const}}} = \left(\frac{\partial w}{\partial X^1} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial X^1} \right) = \operatorname{tg} \psi_{13}^{(1)}; \quad (14)$$

$$\left. \frac{dX'^3}{dX'^1} \right|_{\substack{dX^2=0 \\ X^1=\text{const}}} = \left(\frac{\partial w}{\partial X^3} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial X^3} \right) = \operatorname{tg} \chi_{13}^{(1)}. \quad (15)$$

Напрями, виражені формулами (14) і (15), показано на схемі (рис. 2.б). На схемі (рис. 2.в) відображено напрями осей деформованої системи в проекції на площину X^2OX^3 . Їх виражають формули

$$\left. \frac{dX'^3}{dX'^2} \right|_{\substack{dX^1=0 \\ X^3=\text{const}}} = \left(\frac{\partial w}{\partial X^2} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial X^2} \right) = \operatorname{tg} \psi_{23}^{(1)}; \quad (16)$$

$$\left. \frac{dX'^3}{dX'^2} \right|_{\substack{dX^1=0 \\ X^2=\text{const}}} = \left(\frac{\partial w}{\partial X^3} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial X^3} \right) = \operatorname{tg} \chi_{23}^{(1)}. \quad (17)$$

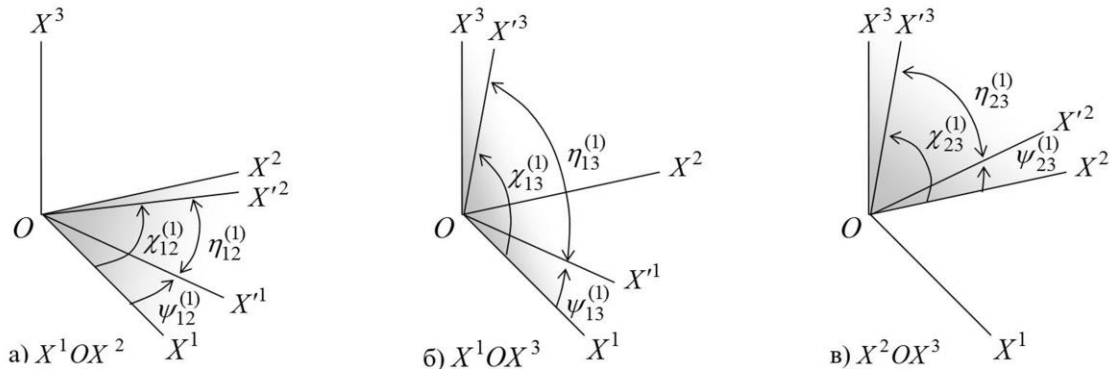


Рис. 2. Напрями осей деформованої системи в проекціях на координатні площини

Якщо кути $\eta_{ij}^{(1)}$ чи $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ є лише мірами порушення ортогональності системи координат, то величини $\psi_{ij}^{(1)}$ та $\chi_{ij}^{(1)}$ здатні передавати напрями осей деформованої системи відносно її початкового стану. З цієї точки зору результати розв'язків завдання в проекціях на координатні площини мають очевидну перевагу. Аналіз геометричної сутності величин $\psi_{ij}^{(1)}$ та $\chi_{ij}^{(1)}$ показує їх пряму аналогію з кутівими координатами в геоцентричній полярній системі, якою традиційно користуються в

геодезії. Зокрема, кути $\psi_{12}^{(1)}$ і $\chi_{12}^{(1)}$ – це геоцентрична довгота λ напрямів у площині екватора відносно площини нульового меридіана. Кути $\psi_{13}^{(1)}$, $\chi_{13}^{(1)}$ та $\psi_{23}^{(1)}$, $\chi_{23}^{(1)}$ – геоцентрична широта φ напрямів відносно площини екватора на довготах $\lambda = 0^\circ$ та $\lambda = 90^\circ$ відповідно. При потребі без жодних ускладнень розрахункових формул широту φ можна замінити її доповненням до 90° , яке іменується полярною віддаллю, і оцінювати положення

осей X^1, X^2, X^3 відносно осі обертання у її початковому стані $X^3 = z$.

Єдиною реальною перешкодою на шляху практичного втілення описаної методики може бути недостатня густина покриття Землі GNSS-станціями, особливо у межах світового океану. Саме ця обставина визначає адекватність побудови функціональної моделі (1) у планетарному масштабі і достовірність поданих вище оцінок, які з неї слідують. Теоретично таку проблему можна було б вирішити побудовою глобального ґриду, наприклад, у формі сферичних чи еліпсоїдальних чотирикутників або трикутників, якщо залучити метод триангуляції Делоне, з наступною екстраполяцією переміщень у вузлові точки ґриду відносно станцій на материковій та

острівній частинах Землі. Такий прийом застосовується у дослідницькій практиці (див., наприклад, [Марченко та ін., 2012]). Але точність екстраполяції на великі віддалі буде низькою, тому, ймовірно, втрачає сенс ідея вираження нелінійних деформацій у планетарному масштабі. В зв'язку з цим з метою пошуку оптимального вирішення проблема побудови адекватної функціональної моделі потребує детального вивчення і на сьогоднішній день залишається відкритою для всебічного обговорення.

Наостанок розглянемо загальну логіку прийняття рішень щодо формулювання завдань деформаційного аналізу відповідно до схеми перетворень на рис. 3.

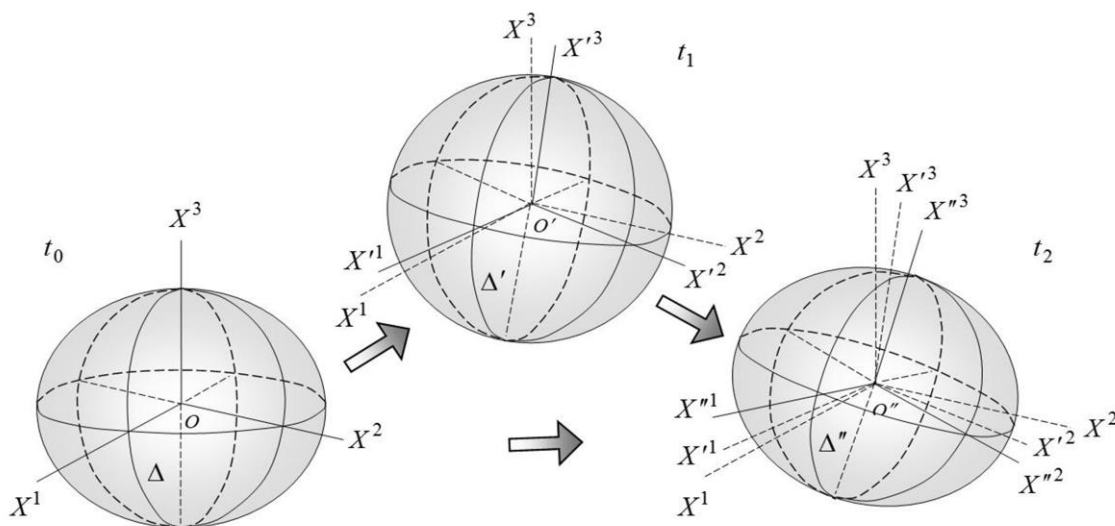


Рис. 3. Схема перетворень області Δ

Допустимо, гіпотеза про деформацію системи координат на момент t_1 підтвердилась як така, що не суперечить емпіричним даним. Емпіричні значення показників кутових спотворень можна порівнювати з їх аналогами R_x, R_y, R_z , які наведено у таблиці.

Нехай за умовою досліджень необхідно оцінити деформований стан Землі на момент часу $t_2 = t_1 + dt_2 = t_0 + dt_1 + dt_2$. Якщо завдання розв'язувати відносно датуму на момент t_0 за період $dt_1 + dt_2$, не беручи до уваги стан Землі у t_1 , то методика аналізу жодних змін не потребує. Для вирішення завдання протягом

періоду dt_2 відносно t_1 традиційний розв'язок у поданому вигляді чи як це розкрито у статті [Тадєєв, 2015], неприпустимий. Така постановка завдання зумовлює потребу побудови функціональної моделі

$$\left. \begin{aligned} X^{n1} &= u'(X'^1, X'^2, X'^3) \\ X^{n2} &= v'(X'^1, X'^2, X'^3) \\ X^{n3} &= w'(X'^1, X'^2, X'^3) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

де $X^{n1} = x'', X^{n2} = y'', X^{n3} = z''$ – диффеоморфні координати точок області Δ'' на момент t_2 , яка є відображенням Δ' і областю визначення базових функцій моделі (18). Метрику області

Δ'' визначає тензор e'_{ij} , а відповідна їй квадратична форма в координатах області Δ' набуває вигляду $ds''^2 = e'_{ij} dX'^i dX'^j$. Тензор e'_{ij} , як геометричний образ Δ'' відповідно до перетворень (18), виражає також зміну метричних властивостей області Δ' . Оскільки така зміна враховується відносно стану в момент t_1 , то наступний деформаційний аналіз повинен ґрунтуватись на різниці $e'_{ij} - e_{ij}$ і використовувати міру

$$ds''^2 - ds'^2 = (e'_{ij} - e_{ij}) dX'^i dX'^j.$$

Такого роду видозміна методики здатна забезпечити оцінки деформаційних полів, які не будуть обтяжені ймовірним впливом ефектів спотворення системи координат і втратою інваріантності у відношенні до датуму.

Наукова новизна і практична значущість

Розв'язки завдання досягнуто методами проективно-диференціальної геометрії на основі диференціального подання перетворень образів ріманового простору у формі його складних диффеоморфних многовидів, зокрема дотичного евклідового простору. Такий підхід до вирішення задач деформаційного аналізу в геодинаміці є узагальнюючим по відношенню до традиційно використовуваного. На цій основі обґрунтовано перспективи подання перетворень нелінійними функціональними моделями. Доведено тотожність параметризації Землі системою ITRS з параметризацією дотичного евклідового простору декартовою системою координат. Виходячи з концепції створення ITRS, аргументовано її ймовірні деформації і одержано аналітичні вираження показників кутових спотворень. Їх розглянуто у контексті жорсткого обертання Землі, як складової глобальних просторових деформацій, в проекціях на координатні площини. Методика адаптована до використання даних GNSS-моніторингу координат з врахуванням деформації системи ITRS. Як засоби визначення поточного положення осей деформованої системи, одержані результати мають практичну значущість при вирішенні задач сучасної геодезії у її взаємозв'язку з геодинамікою у дослідженнях референціальних систем координат.

Висновки

На даному етапі досліджень сформульовано перспективи використання результатів моніторингу координат GNSS-станцій в системі ITRS для моделювання глобального деформаційного поля Землі в частині вираження групи параметрів кутових спотворень. Розв'язки завдання досягнуто методами проективно-диференціальної геометрії на основі теорії диференціального подання перетворень образів ріманового простору у формі його диффеоморфних многовидів. Використано прийоми описування змін метрики ріманових многовидів у дотичному евклідовому просторі, який параметризований декартовою системою координат. Одержано результати, які з точки зору їх змісту і практичного застосування мають двояку інтерпретацію.

1. В частині вираження групи параметрів кутових спотворень подано співвідношення для кутів жорсткого обертання Землі, як складової її глобальних просторових деформацій, в проекціях на координатні площини системи ITRS. Такий результат має пряме застосування при аналізі глобальних деформаційних полів для потреб геодинаміки.

2. Виходячи з геофізичного змісту концепції створення системи ITRS, обґрунтовано її ймовірні деформації. Істинність такої гіпотези можна перевірити за тими ж кутами, як їх означено у попередній рубриці. Якщо їх вважати показниками кутових спотворень системи ITRS і виразити відхиленнями від ортогональності осей координат у епоху ITRF-реалізації, то останні слід визнати мірами косокутної системи станом на будь-яку наступну за нею епоху спостережень. Одержано аналітичні вираження напрямів осей деформованої системи. У контексті цієї рубрики одержані результати можуть мати застосування при вирішенні задач сучасної геодезії у її взаємозв'язку з геодинамікою у розрізі досліджень референціальних систем координат.

Подано рекомендації щодо постановки та вирішення задач деформаційного аналізу у випадку емпіричного підтвердження гіпотези кутових спотворень системи координат.

Аналітичні вираження кутових спотворень подано у загальному вигляді, який здатний передати деформації нелінійного характеру,

наскільки їх можна виразити базовими функціями моделі (1). Ефективність нелінійних моделей фізичних полів Землі на сьогоднішній день очевидна, навіть якщо взяти до уваги наслідки їх використання при створенні новітньої реалізації системи ITRS: генералізація розв'язку ITRF2014 з розширеним моделюванням нелінійних рухів станцій (сезонні сигнали і постсейсмічні деформації) забезпечила значне підвищення його точності порівняно з ITRF2008 [Altamini et al., 2016].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1,2 / В.Ф. Каган. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947-1948. – 919с.
- Марченко О. М. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О. М. Марченко, К. Р. Третяк, А. Я. Кульчицький та ін. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 308с.
- Мещеряков Г. А. Теоретические основы математической картографии / Г.А. Мещеряков. – М.: Недра, 1968. – 160с.
- Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 667с.
- Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Пер. с англ. / И.С. Сокольников. – М.: Наука, 1971. – 376с.
- Тадеев О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О.А. Тадеев // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – Вип. 78. – С.140–145.
- Тадеев О. А. Проблемы та перспективи оцінювання деформаційних полів Землі за геодезичними даними / О. А. Тадеев // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2015. – Вип. 82. – С.73–94.
- Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия / С. П. Фиников. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 265с.
- Altamini Z. ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters / Z. Altamini, X. Collilieux, J. Legrand, B. Garayt, C. Boucher // *Journal of Geophysical Research*. – 2007. – Vol. 112 (B9), N. B09401. – 19 p. doi: 10.1029/2007JB004949
- Altamini Z. ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame / Z. Altamini, X. Collilieux, L. Metivier // *Journal of Geodesy*. – 2011. – Vol. 85 (8). – pp. 457-473. doi: 10.1007/s00190-011-0444-4
- Altamini Z. ITRF2008 plate motion model / Z. Altamini, L. Metivier, X. Collilieux // *Journal of Geophysical Research*. – 2012. – Vol. 117 (B7), N. B07402. – 14 p. doi: 10.1029/2011JB008930
- Altamini Z. ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions / Z. Altamini, P. Rebischung, L. Metivier, X. Collilieux // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2016. – Vol. 121 (B8). – pp. 6109-6131. doi: 10.1002/2016JB013098
- Argus D. F. Geologically current motion of 56 plates relative to the no-net-rotation reference frame / D.F. Argus, R.G. Gordon, C. DeMets // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. – 2011. – Vol. 12 (11), N. Q11001. – 13 p. doi: 10.1029/2011GC003751
- Argus D. F. The angular velocities of the plates and the velocity of Earths centre from space geodesy / D.F. Argus, R.G. Gordon, M.B. Heflin, C. Ma, R. Eanes, P. Willis, W.R. Peltier, S.E. Owen // *Geophysical Journal International*. – 2010. – Vol. 180 (3). – pp. 913-960. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04463.x
- DeMets C. Geologically current plate motions / C. DeMets, R.G. Gordon, D.F. Argus // *Geophysical Journal International*. – 2010. – Vol. 181 (1). – pp. 1-80. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04491.x
- Dermanis A. A study of the invariance of deformation parameters from a geodetic point of view / A. Dermanis // Kontadakis M.E., Kaltsikis C., Spatalas S., Tokmakidis K., Tziavos I.N. (Eds.), *The apple of knowledge. Vol. in honor of prof. D. Arabelos*. – Publ. of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2010. – pp. 43-66. – http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html
- Dermanis A. The finite element approach to the geodetic computation of two- and three-dimensional deformation parameters: a study of frame invariance and parameter estimability / A. Dermanis, E.W. Grafarend // Sevilla M.J., Henneberg H. (Eds.), *Proceeding Int. Conference “Cartography-Geodesy”, 5th Centenary of Americas: 1492-1992*, Maracaibo, Venezuela, 24.11-3.12.1992. – Madrid: Instituto de astronomia y geodesia, 1993. – pp. 66-85.
- Dermanis A. The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation / A. Dermanis// Arabelos D., Kontadakis M., Kaltsikis Ch., Spatalas S. (Eds.), *Terrestrial and stellar environment. Vol. in honor of prof. G. Asteriadis*. – Publ. of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2009. – pp. 107-144. – http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html

- Ferland R. The IGS-combined station coordinates, earth rotation parameters and apparent geocenter / R. Ferland, M. Piraszewski // *Journal of Geodesy*. – 2009. – Vol. 83 (3). – pp. 385-392. doi: 10.1007/s00190-008-0295-9
- Grafarend E. W. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E.W. Grafarend, B. Voosoghi // *Journal of Geodesy*. – 2003. – Vol. 77 (5-6). – pp. 303-326. doi: 10.1007/s00190-003-0329-2
- Hossainali M. Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // *Journal of Geodetic Science*. – 2011a. – Vol. 1(1). – pp. 59-73. doi: 10.2478/v10156-010-0008-1
- Hossainali M. Procrustean statistical inference of deformation / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // *Journal of Geodetic Science*. – 2011b. – Vol. 1(2). – pp. 170-180. doi: 10.2478/v10156-010-0020-5
- IERS Conventions (2010). Petit G., Luzum B. (Eds.), IERS Technical Note; 36. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und
- Geodäsie, 2010. – 179pp. – http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf
- International Association of Geodesy – http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf
- Kogan M. G. Current global plate kinematics from GPS (1995-2007) with the plate-consistent reference frame / M.G. Kogan, G.M. Steblov // *Journal of Geophysical Research*. – 2008. – Vol. 113 (B4), N. B04416. – 17 p. doi: 10.1029/2007JB005353
- Vanicek P. Short note: strain invariants / P. Vanicek, E. Grafarend, M. Berber // *Journal of Geodesy*. – 2008. – Vol. 82. – pp. 263-268. doi: 10.1007/s00190-007-0175-8
- Wu X. Accuracy of the International Terrestrial Reference Frame origin and Earth expansion / X. Wu, X. Collilieux, Z. Altamini, B. L. A. Vermeersen, R. S. Gross, I. Fukumori // *Geophysical Research Letters*. – 2011. – Vol. 38 (13), N. L13304. – 5 p. doi: 10.1029/2011GL047450

O.A. TADYEYEV

Department of Geodesy and Cartography, National University of Water and Environmental Engineering,
Soborna str., 11, 33028, Rivne, Ukraine, tel. +38(096)7488449, e-mail: oleksandrtad@gmail.com

EVALUATION OF THREE-DIMENSIONAL DEFORMATION FIELDS OF THE EARTH BY METHODS OF PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY; RIGID ROTATIONS OF THE EARTH

Aim. The aim of this research is the evaluation of the Earth's rigid rotation as a component of global deformation fields in interconnection with angular distortions of the geocentric spatial coordinate system. **Methodology.** Solutions will be achieved by methods of projective differential (metric) geometry based on the differential presentation of transformations of Riemannian space images in the form of its complicated diffeomorphic manifolds. Based on the essence of the International Terrestrial Reference System (ITRS), in which the input data are given, and on a global scale the deformation fields, as a Riemannian manifold it is defined as a the tangent of Euclidean space. To solve the problem are used the methods of description the change of the Riemannian metric in the tangent Euclidean space, is parameterized by the Cartesian coordinate system. **Results.** The basis of the methods used enabled the results, which are the terms of its content. The practical application has a dual interpretation. In the former, an expression of angular distortions for needs of the deformation analysis is derived from formulas for angles of the rigid Earth's rotation into projections on ITRS coordinate planes. At the same time, it is proven that these angles are indicators of the coordinate system distortion. The hypothesis of probable deformations of the spatial geocentric coordinate system is substantiated by the geophysical content of the ITRS concept. The identity of conditions of the Earth's parameterization by ITRS and of the tangent Euclidean space parameterization by the Cartesian coordinate system has been proven. On this basis, the truthfulness of the hypothesis can be verified by empirical values of angles that are defined from results of GNSS-observations. In this case of significant importance, they are indicators of angular distortions of the ITRS system or an expression by deviations from the axes orthogonality in its ITRF version as measures of the oblique-angled Cartesian system into the any epoch of observation that follows. Using methods of projective differential geometry the formulas are obtained for the coordinate axes directions of the deformed system. **Scientific novelty.** It is proven that the approach for solving the problem of the deformation analysis in geodynamics based on the Riemannian geometry it is generalizing relative to its use. On this basis, prospects for filing of deformation fields by nonlinear functional models are substantiated. **Practical significance.** The obtained results are designed to be used for the evaluation of global deformation fields of the Earth and solving problems of the modern

geodesy in its interconnection with geodynamics in the context of reference frame research. All analytical expression of angular distortions is given in general form, which is able to transfer the nonlinear deformation tendencies. A methodology of the deformation analysis is adapted to be used as input data for the results of the Global Navigation Satellite System (GNSS) monitoring station coordinates, taking into account the probable ITRS angular distortions.

Key words: Riemannian diffeomorphic manifolds; space metric tensor; deformation analysis; rigid rotation of the Earth; deformation of the coordinate system.

Надійшла 10.09.2016 р.