

## УДК 528.073

О. М. МАРЧЕНКО, Ю. О. ЛУК'ЯНЧЕНКО

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна, 79013, ел. пошта: qlukianchenkop@gmail.com

## ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ НА СФЕРІ

У сучасному світі знання гравітаційного поля займає вагомe значення, оскільки без таких відомостей неможливе виконання низки сучасних задач, пов'язаних із супутниковими технологіями і не тільки. До таких задач можна зарахувати: запуск ракетноносіїв, прогнозування орбіт супутників, дослідження поверхні Світового океану, взаємна трансформація геодезичних та нормальних висот та багато іншого. **Мета:** з кожним роком даних про гравітаційне поле Землі з'являється все більше і більше, що ускладнює їх оптимальне використання та сумісне опрацювання, тому важливо використовувати алгоритми, які б давали змогу одночасно опрацьовувати якомога більшу кількість вхідної інформації. Навіть із наявністю обчислювальних кластерів це не є простим завданням. Враховуючи тенденцію до збільшення запуску космічних місій, то кількість даних постійно зростатиме. **Методика:** на основі вище зазначеного, у роботі представлено модифікований метод найменших квадратів, що використовується для визначення гармонічних коефіцієнтів на основі аномалій сили тяжіння DTU 10. Ця вхідна інформація представлена набором аномалій сили тяжіння у вільному повітрі, розташованих у точках регулярної сітки (ґриду) з роздільною здатністю 5'×5'. **Наукова новизна та практична значущість:** стаття описує принципи створення антиподно-рівномірного ґриду та його розбиття на 8 частин (запропонованого автором) з метою використання ортогональних властивостей, які виникають за такого розміщення точок. **Результати:** так, визначено набір гармонічних коефіцієнтів до 720 порядку/ступеня, наведено спектральні характеристики порівняно із моделлю EGM 2008. На основі отриманої одержаної моделі гравітаційного поля побудовано глобальний квазігеоїд. Для побудови квазігеоїда використано формулу Брунса, в яку входить нормальна сила тяжіння (нормальне прискорення вільного падіння), розрахована наближено, оскільки це майже не впливає на результат. До того ж основним завданням є оптимізація методики визначення гармонічних коефіцієнтів, а не побудова високоточного геоїда. Для підтвердження отриманих результатів проведено порівняння отриманих висот квазігеоїда із висотами квазігеоїда, визначеними за допомогою GNSS-нівелювання на полігоні New-Mexico.

*Ключові слова:* метод найменших квадратів, антиподно-рівномірна сітка, аномалії сили тяжіння, ортогональні властивості, квазігеоїд.

### Вступ

Одним із найпопулярніших типів даних для визначення поверхні квазігеоїда є виміряні аномалії сили тяжіння  $\Delta g$ .

$$\Delta g = g - \gamma. \quad (1)$$

Знаючи таке відхилення, можна визначити збурювальний потенціал  $T$ . Раніше основним недоліком такого підходу у визначенні глобального гравітаційного поля було те, що виміри виконувались за допомогою наземних гравіметрів. Тому якісно і з достатньою густотою провести вимірювання сили тяжіння можна було лише на території суходолу. Саме тому говорити про побудову глобального квазігеоїда було недоречно.

Але із розвитком супутникових технологій, а саме GNSS (Seeber, 2003) та супутникової альтиметрії з'явилась можливість визначати поверхню Світового океану. Однак для використання супутникових вимірів потрібно вже враховувати певні ефекти теорії відносності (Moritz, 1993). Супутникова альтиметрія – це технологія, яка дає можливість вимірювати відстань від супутника до поверхні океану. Як відомо поверхня океану дуже тісно пов'язана із поверхнею квазігеоїда, оскільки сила тяжіння прагне привести поверхню океану до поверхні квазігеоїда (геоїда). Однак, використовуючи супутникові дані, важливо враховувати всі особливості референціальних систем (Jekeli, 2006), у яких задані дані, оскільки не завжди супут-

никові місії використовують той самий еліпсоїд, який прийнятий, як загально земний. Встановлено, що незбурена середня поверхня океану може відхилятися від поверхні квазігеоїда на відстань, що дорівнює приблизно 2 м. Одними із чинників, що спричиняють таке відхилення є неоднорідна густина води, ефект Коріоліса (Moritz, 1987) та ін. Враховуючи цей факт та дію припливів та відпливів, з'явилась можливість визначати силу тяжіння не тільки на суходолі. Таки, виникло таке поняття, як альтиметрично визначена аномалія сили тяжіння. Цей метод набув поширення і сьогодні вже є досить багато альтиметричних супутників, які нагромаджують інформацію про поверхню Світового океану, і, своєю чергою, опрацювання такої інформації дає змогу визначати аномалії сили тяжіння над поверхнею океану.

Отже, тепер інформація про аномалії сили тяжіння покриває всю планету. У Данському технічному університеті створено масив аномалій сили тяжіння у вільному повітрі, що покриває всю земну кулю, з роздільною здатністю  $5' \times 5'$ . Цей розв'язок має назву DTU 10 (Andersen, 2010). Саме цей набір і використовується у роботі як вхідна інформація для визначення гармонічних коефіцієнтів та подальшої побудови квазігеоїда з метою апробації запропонованих модифікацій визначення гармонічних коефіцієнтів за допомогою способу найменших квадратів.

### Мета

Сьогодні існує досить велика кількість інформації про гравітаційне поле Землі. Також існує багато моделей гравітаційного поля, а саме його статичної та змінної з часом частини (Bruinsma, 2009), але в цій роботі розглядатимемо лише статичну частину. Для подальшого ефективного використання цієї інформації необхідно використовувати алгоритми, які б потребували якомога менше комп'ютерних ресурсів, оскільки навіть за наявності суперкомп'ютерів із великою кількістю процесорів ця задача не є простою. Одним з методів визначення гармонічних коефіцієнтів є метод найменших квадратів (Speeuw, 1994), саме він і є вибраний для вирішення такої задачі, оскільки він має низку переваг. До таких переваг можна

зарахувати: можливість обчислення оцінки точності, порівняно нескладний алгоритм програмування, можливість введення певних умов. Але йому також притаманний недолік, оскільки в разі збільшення невідомих, збільшується розмірність матриці, яку потрібно обернути, так, наприклад, для 720 порядку/ступеня необхідно обернути матрицю розмірністю  $721^2 \times 721^2$ . Отже, для ефективного використання цього методу потрібно вирішити проблему обертання таких великих матриць.

### Методика

*Модифікація методу найменших квадратів для визначення гармонічних коефіцієнтів.*

Для розв'язання поставлених задач використаємо параметричний метод найменших квадратів, хоча існують також інші методи швидкого визначення гармонічних коефіцієнтів (Ditmar, 2002). Але не завжди всі методи можуть дати можливість обчислити оцінку точності отриманих результатів, на відміну від методу найменших квадратів.

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{V}; \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L}, \quad (3)$$

де  $\mathbf{A}$  – матриця параметричних рівнянь,  $\mathbf{x}$  – вектор невідомих (гармонічних коефіцієнтів),  $\mathbf{L}$  – вектор вільних членів (яким є набір аномалій стат. тяжіння),  $\mathbf{V}$  – вектор поправок. Зрозуміло, що із збільшення невідомих зростає матриця нормальних рівнянь, така залежність є квадратичною. Отже, для того, щоб спростити процедуру обертання такої матриці, вирішено використати антиподно-рівномірну регулярну сітку із сталим кроком по широті та довготі  $\Delta\varphi$  та  $\Delta\lambda$  відповідно. Якщо позначити кількість паралелей через  $N$ , то ми отримаємо такі співвідношення для визначення кроку:  $\Delta\lambda = \Delta\vartheta = \pi/N$ . Тому координати точок можна визначити так:  $\lambda_i = \Delta\lambda/2 + i \cdot \Delta\lambda$  ( $0 \leq i \leq 2N$ ),  $\vartheta_i = \Delta\vartheta/2 + i \cdot \Delta\vartheta$  ( $0 \leq i \leq N$ ). Варто зазначити, що дані формули розраховані для випадку, коли на паралелі з нульовою широтою та на меридіані з нульовою довготою точки не розташовуються, це важливо для подальших формул. Отже, враховуючи те, що дані

розташовані рівномірно на паралелях, то можна використати відомі співвідношення, однак з певними корективами, які виникають внаслідок антиподно-рівномірного розташування точок.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N} \cos(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) &= (1 + \delta_{m_1 0} - \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2}, \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \sin(m_2 \lambda_i) &= (1 - \delta_{m_1 0} + \delta_{m_1 N}) N \delta_{m_1 m_2}, \\ \sum_{i=1}^{2N} \sin(m_1 \lambda_i) \cos(m_2 \lambda_i) &= 0. \end{aligned} \right\} (4)$$

де  $\delta$  – дельта Кронекера. Але, якщо врахувати те, що точки розташовані симетрично екватора то можна також використати таку властивість:

$$\sum_{i=1}^N P_{n_1 m_1}(\cos \theta_i) P_{n_2 m_2}(\cos \theta_i) = 0,$$

коли  $-1^{n_1+n_2+m_1+m_2} < 0$ . (5)

Враховуючи ці властивості, можна значно скоротити час обчислень, оскільки операції підсумування замінюються на звичайний аналітичний вираз. Також видно, у деяких випадках, ці суми дорівнюють нулю, що призводить до значної розрідженості матриці нормальних рівнянь. До того ж така розрідженість дає можливість розділити загальну матрицю нормальних рівнянь на певну кількість менших. Максимальна розмірність таких матриць у половину менша від вихідної і з кожною наступною частковою матрицею її розмірність зменшується. Так, розмірність матриці, яка відповідає за останні невідомі коефіцієнти  $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$ , дорівнює одиниці. Таке розбиття значно пришвидшує обернення матриці, тобто обертати потрібно не одну велику матрицю, а певну

кількість значно менших, що з погляду обчислень значно спрощує цей процес.

Перед початком обчислень увесь набір аномалій сили тяжіння було приведено на грід з роздільною здатністю  $15' \times 15'$ . Згідно з правилами Нуйквіста така роздільна здатність забезпечує визначення гармонічних коефіцієнтів до 720 порядку/ступеня. Так, побудовано модель гравітаційного поля Землі 720 порядку/ступеня. Нижче наведено спектральні характеристики отриманої моделі порівняно із EGM 2008 (Pavlis, 2008) (рис. 1).

*Побудова квазігеоїда на основі визначених гармонічних коефіцієнтів.*

Така побудова не має на меті отримати високоточний розв'язок, а виконується для перевірки використаної методики визначення гармонічних коефіцієнтів. Тому в обчисленнях використовуватиме наближену формулу для обчислення нормальної сили тяжіння

$$\gamma \approx \frac{GM}{R^2}. \quad (6)$$

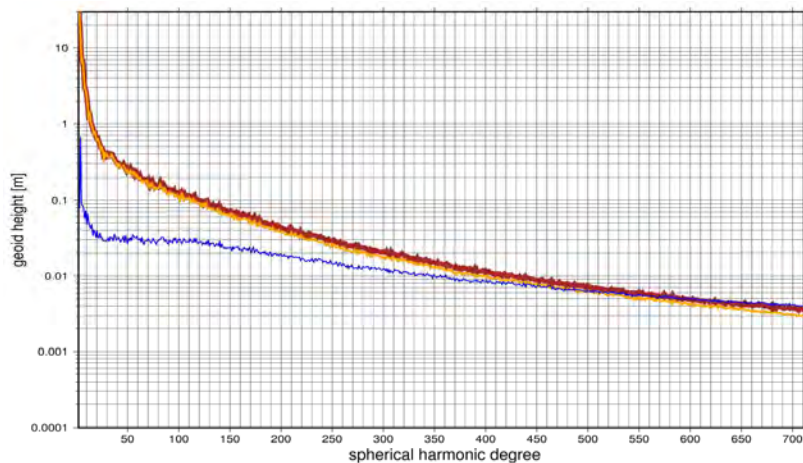
Свою чергою, висоти квазігеоїда можна визначити за допомогою формули Брунса (Hofmann–Wellenhof, 2005):

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \quad (7)$$

Збурювальний потенціал  $T$  можна обчислити за допомогою різниці отриманих коефіцієнтів та коефіцієнтів (Eötvös, 1896), які становлять гравітаційне поле прийнятого еліпсоїда (зазвичай GRS 80).

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (8)$$

Рис. 1. Спектральні характеристики отриманої моделі та EGM2008  
(– EGM2008, – отримана модель, – різниці між EGM2008 та отриманою моделлю)  
Fig. 1. Degree amplitudes of determined model and EGM 2008 (– EGM2008, – determined model, – differences of EGM2008 and determined model)



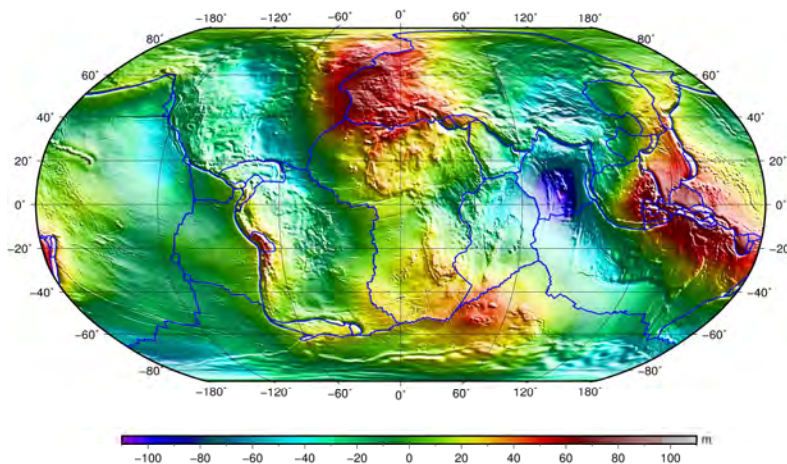


Рис. 2. Висоти квазігеоїда [м]  
 (– межі літосферних плит)  
 Fig. 2. Height anomalies [m]  
 (–boundaries of lithospheric plates)

Оскільки аномалії сили тяжіння приведені на поверхню еліпсоїда, то цей вираз можна записати у такому вигляді:

$$T = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (9)$$

Підставивши вирази для  $T$  і  $\gamma$  у рівняння (7), отримаємо наступний вираз для висот квазігеоїда:

$$\zeta = R \sum_{n=2}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C}_{nm} \cos(m\lambda) + \overline{\Delta S}_{nm} \sin(m\lambda)) \overline{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (10)$$

### Результати

Використавши такий підхід, побудовано наближений квазігеоїд, поданий нижче.

З метою перевірки виконаємо порівняння отриманих висот квазігеоїда із висотами квазігеоїда, визначених за допомогою GNSS-нівелювання на полігоні New Mexico. Результати подано у таблиці.

#### Порівняння висот квазігеоїда, отриманих за допомогою визначених гармонічних коефіцієнтів та висот квазігеоїда, отриманих із GNSS-нівелювання

#### Comparison of height anomalies based on determined harmonic coefficients and height anomalies based on GNSS-levelling

мін, м	макс, м	середнє, м	Стандартне відхилення, м
-0,41	1,57	0,27	0,51

Варто зазначити, що усі рисунки створювались за допомогою програмного забезпечення Generic Mapping Tools (GMT) (Wessel P, 2004).

### Наукова новизна і практична значущість

Зазвичай, побудова моделей гравітаційного поля виконується до 300-360 порядку/ступеня (ICGEM), хоча є окремі моделі порядку яких значно більший, але для побудови високих порядків потрібно мати в наявності обчислювальні кластери, що не завжди є доступно для всіх наукових інституцій чи виробничих фірм. Своєю чергою, цей метод побудови моделі гравітаційного поля дає змогу на звичайному персональному комп'ютері виконувати побудову моделей гравітаційного поля Землі 720 порядку/ступеня і вище. Це має важливе практичне значення для наукових інституцій, які виконують певні дослідження в сфері, що зв'язана з побудовою глобальних гравітаційних полів, оскільки тепер не потрібно при кожній експериментальній побудові моделі використовувати великі комп'ютерні потужності або чекати досить довгий час (близько місяця), доки виконається така побудова.

### Висновки

У роботі апробовано модифікований алгоритм найменших квадратів для визначення гармонічних коефіцієнтів до 720 порядку/ступеня за даними аномалій сили тяжіння. Отримані коефіцієнти перевірено за допомогою побудови висот квазігеоїда та їх порівняння із незалежно визначеними висотами із GNSS-нівелювання, стандартне відхилення таких різниць є 51 см, що не є досить хорошим результатом для побудови точного квазігеоїда, але

такі статистики говорять про доцільність використання модифікованої методики під час визначення гармонічних коефіцієнтів. Оскільки цей підхід дає змогу використовувати велику кількість даних і швидко обчислювати гармонічні коефіцієнти високих порядків, то його можна використовувати для побудови моделей гравітаційного поля Землі високих порядків.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Andersen O. B. The DTU10 Gravity field and Mean sea surface (2010), *Second international symposium of the gravity field of the Earth (IGFS2)*, Fairbanks, Alaska, 2010.
- Bruinsma S. L., J. M. Lemoine R. Biancale N. Vales (2009). CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation, *Adv. Space Res* 45:587-601. doi:10.1016/j.asr.2009.10.012.
- Ditmar P., Klees R., Kostenko F. *Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients*. Report of Delft University Technology, 2002, 50 p.
- Eötvös L. Studies in the field of gravity and magnetism. In: "Three fundamental papers of Loránd Eötvös", Transl. from Hungarian, ELGI Budapest, 1998, p. 83–125.
- Hofmann–Wellenhop B., & Moritz H. *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 2005, 403 p.
- ICGEM (Міжнародний центр гравітаційних моделей Землі) <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.
- Jekeli Christopher. *Geometric Reference Systems in Geodesy*. Christopher Jekeli, Ohio, 2006, 202 p.
- Moritz H. & B. Hofmann-Wellenhop. *Geometry, Relativity, Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe, 1993
- Moritz H., & Muller I. I. *Earth's Rotation. Theory and estimations*, New York, Ungar, 1987
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 10, EGU2008–A–01891, 2008, EGU General Assembly 2008
- Seeber G. *Satellite Geodesy 2<sup>nd</sup> completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2003, 589 p.
- Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 1994, 713 p.
- Wessel P., Smith W.H.F. (2004). *The Generic Mapping Tools (GMT, Version 4)*. Technical Reference and Cookbook, Honolulu, HI and Silver Spring, MD, January 2004, 123.

А. Н. МАРЧЕНКО, Ю. А. ЛУКЪЯНЧЕНКО

Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, Украина, 79013, эл. почта: qlukianchenko@gmail.com

#### ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА СФЕРЕ

В современном мире знания гравитационного поля занимает большое значение. Поскольку без таких сведений невозможно выполнение ряда современных задач, связанных со спутниковыми технологиями и не только. К таким задачам можно отнести: запуск ракетносителей, прогнозирования орбит спутников, исследования поверхности Мирового океана, взаимная трансформация геодезических и нормальных высот и многое другое. **Цель:** каждым годом данных о гравитационном поле Земли появляется все больше и больше, что затрудняет задачу их оптимального использования и совместной обработки, поэтому важно использовать методы, которые бы позволяли одновременно обрабатывать как можно большее количество входящей информации. Даже с наличием вычислительных кластеров это есть не легкой задачей. Учитывая тенденцию к увеличению запуска космических миссий, количество данных будет расти и расти. **Методика:** исходя из выше сказанного в работе представлен модифицированный метод наименьших квадратов, используемый для определения гармонических коэффициентов на основе аномалий силы тяжести DTU 10. Данная входная информация представлена набором аномалий силы тяжести в свободном воздухе, расположенных в точках регулярной сетки (грида) с разрешением  $5' \times 5'$ . **Научная новизна и практическая значимость:** статья описывает принципы создания антиподно-равномерного грида и его разбиение на 8 частей с целью использования ортогональных свойств, которые возникают при данном расположении точек. **Результаты:** таким образом определен набор гармонических коэффициентов до 720 порядке / степени, приведены спектральные характеристики по сравнению с моделью EGM 2008. На основе полученной модели гравитационного поля построено глобальный квазигеоида. Для построения квазигеоида использовалась формула Брунса, в которую входит нормальная сила тяжести (нормальное ускорение свободного падения) рассчитана приближенно, поскольку это почти не влияет на конечный результат. Более того задачей работы есть оптимизация методики определения гармонических коэффициентов, а не построение высокоточного геоида.

Для подтверждения полученных результатов было проведено сравнение полученных высот квазигеоида с высотами квазигеоида, определенными с помощью GNSS-нивелирования на полигоне New-Mexico.

*Ключевые слова:* метод наименьших квадратов, антиподно-равномерная сетка, аномалии силы тяжести, ортогональные свойства, квазигеоид.

A. N. MARCHENKO, YU. O. LUKYANCHENKO

Department of Higher geodesy and astronomy of National University Lviv Polytechnic, S. Bandera str., 12, Lviv, Ukraine, 79013, e-mail: qlukianchenkop@gmail.com

#### OPTIMIZATION OF LEAST SQUARES METHOD TO DETERMINE THE HARMONIC COEFFICIENTS ON THE SPHERE

Knowledge of the gravity field takes significance place in today's world. Such information is very important for performing of a number of contemporary problems related to satellite technologies. Such problems include: the launch of launch vehicles, satellites orbit prediction, the study of the surface of the oceans, transformation of normal and geodetic heights and more. **Goal:** Each year, data on the Earth's gravitational field appears more and more that complicates the task of optimal using and joint processing, so it is important to use algorithms that would allow simultaneously to process the largest possible number of input data. But, it is not easy task, even with performing of computing cluster. The increasing tendency to space mission launches, will causing growing of the number of data. **Method:** based on the above it is represented in the modified least squares method used to determine the harmonic coefficients based on gravity anomalies DTU 10. This input information is provided by array of free air gravity anomalies, arranged in a regular grid points with a resolution of  $5' \times 5'$ . **Scientific novelty and practical significance:** article describes the principles of antipodean-uniform grid and its division into 8 parts for use of orthogonal properties that arise in this points situation. **Results:** Thus defined set of harmonic coefficients up to 720 order / degree, and were compared with the model EGM 2008 in terms of spectral characteristics. Was built quasigeoid based on the obtained model. To build quasigeoid used Bruns formula, which includes normal gravity (normal gravitational acceleration) is calculated approximately, because it almost does not affect the final result. Moreover the main objective is to optimize the methodology for determining of the harmonic coefficients, instead of the construction of high-precision geoid. Was performed comparison quasigeoid heights defined in the GNSS-leveling at the site New-Mexico for confirmation of the results.

*Keywords:* least squares method, antipodean-uniform grid, gravity anomalies, orthogonal properties, quasigeoid.

#### REFERENCES

- Andersen, O. B., The DTU10 Gravity field and Mean sea surface (2010), *Second international symposium of the gravity field of the Earth (IGFS2)*, Fairbanks, Alaska, 2010.
- Bruinsma, S. L., Lemoine J. M., Biancale R., Vales N. CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation, *Adv. Space Res* 45:587-601. doi:10.1016/j.asr.2009.10.012.
- Ditmar P., R. Klees, Kostenko F. *Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients*. Report of Delft University Technology, 2002, 50 p
- Eötvös L. Studies in the field of gravity and magnetics. In: *“Three fundamental papers of Loránd Eötvös”*, Transl. from Hungarian, ELGI Budapest, 1998, p. 83–125.
- Hofmann-Wellenhof B., & Moritz H. *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 2005, 403 p.
- ICGEM (Міжнародний центр гравітаційних моделей Землі) – <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.
- Jekeli Christopher. *Geometric Reference Systems in Geodesy*, Ohio, 2006, 202 p.
- Moritz H. & B. Hofmann-Wellenhof. *Geometry, Relativity, Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe, 1993.
- Moritz H., & Muller I.I. *Earth's Rotation. Theory and estimations*, New York, Ungar, 1987.
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 10, EGU2008–A–01891, 2008, EGU General Assembly, 2008.
- Seeber G. *Satellite Geodesy 2<sup>nd</sup> completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2003, 589 p.
- Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 1994, 713 p.
- Wessel P., Smith W.H.F. *The Generic Mapping Tools (GMT, Version 4)*. Technical Reference and Cookbook, Honolulu, HI and Silver Spring, MD, January 2004, 123 p.

Надійшла 30.08.2015 р.