

УДК 528.2/.3:551.24

О. А. ТАДЄЄВ

Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне 33028, Україна, тел. (096)7488449, ел. пошта: oleksandrtad@gmail.com

ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ОЦІНЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ ЗА ГЕОДЕЗИЧНИМИ ДАНИМИ

Мета. Аналіз сучасного стану вирішення завдання оцінювання деформаційних полів Землі на основі механіки суцільного середовища, вдосконалення традиційної методики оцінювання горизонтальних деформацій, визначення альтернативного підходу з обґрунтуванням на його основі шляхів та виробленням алгоритму вирішення завдання. **Методика і результати.** За результатами аналізу встановлено деякі недоліки традиційних способів виконання завдання. З метою мінімізації їх впливу запропоновано вдосконалену методику математико-картографічного моделювання лінійних деформацій. Суть вдосконалень зведена до необхідності апріорної статистичної перевірки умов локально-однорідної лінійної моделі і формування скінченних елементів поверхні за її результатами за конкретної реалізації деформаційних полів. Результатом опрацювання геодезичних даних є синтетична інвентаризаційна карта рішень. Подано деякі результати апробації методики на території Європи. Вдосконалена методика забезпечує достовірні показники деформації частини поверхні, де лінійно-однорідна гіпотеза підтверджена. Однак не дає змоги повноцінно оцінити деформації усієї досліджуваної території. Щоб уникнути наявних недоліків, запропоновано альтернативний підхід до вирішення проблеми. Обґрунтовано перспективи її вирішення з геометричної точки зору на основі проективно-диференціальної геометрії. Для пошуку шляхів вирішення вибрано теорію відображення поверхонь. За гіпотези, що спотворення початкової поверхні під час переходу на поверхню відображення зумовлені геодинамічним фактором, такий підхід дає змогу сформулювати тензор відображення (деформації) і за ним подати спотворення різними числовими характеристиками. Тензор цілком визначають функції, які реалізують відображення. Його компоненти є частинними похідними функцій координат деформованої поверхні за її початковими координатами. Теорія відображень не обмежує клас таких функцій, а лише накладає на них умови гомеоморфізму. Це дає змогу передавати деформації нелінійними функціональними моделями. Залежно від типів вхідних геодезичних даних встановлено шляхи вирішення завдання оцінювання деформаційних полів. Їх визначають геодезичні відлікові поверхні з відповідними їм системами координат. Вибір систем координат пов'язано з видами параметризації і відображення поверхонь. Одержано математичні розв'язки завдання на площині в прямокутній системі (квазіконформне відображення поверхонь з рімановою параметризацією), а також на геосфері та еліпсоїді обертання у відповідних криволінійних системах координат (відображення поверхонь обертання з ізометричною параметризацією). Обґрунтовано перспективи використання теорії відображень для оцінювання просторових деформацій Землі у геоцентричній системі координат. **Наукова новизна.** Розв'язки завдання оцінювання деформаційних полів Землі досягнуто методами проективно-диференціальної геометрії на альтернативній теоретичній основі – теорії відображення поверхонь. **Практична значущість.** Вибраний альтернативний підхід має більші потенційні можливості порівняно з традиційним, де за основу взято лінійно-однорідну модель механіки суцільного середовища. Одержані розв'язки дають змогу оцінювати деформаційні поля у межах будь-якої нелінійної емпіричної функціональної моделі лише за умови гомеоморфного відображення поверхонь. На такій основі сформульовано загальний алгоритм розв'язування завдання.

Ключові слова: деформаційний аналіз; метод скінченних елементів; тензор деформації; теорія відображення поверхонь; геодезичні системи координат; функціональна модель

Вступ

Задача оцінювання деформаційних полів Землі посідає чільне місце серед завдань, які у межах міждисциплінарної співпраці покликані вирішувати широке коло наук про Землю і геодезична галузь знань зокрема. Дослідження

починаються зі створення сучасних приладів і технологій вимірювання деформацій, охоплюють методичні розробки опрацювання, моделювання і аналізу даних на теоретичному рівні з практичним втіленням останніх у вивчення генезису та інтерпретацію геодинамічних явищ.

Мету і зміст досліджень визначено резолюціями Міжнародної асоціації геодезії IAG (International Association of Geodesy) у межах діяльності підкомісій 3.2а “Глобальні деформації земної кори” та 3.2б “Регіональні деформації земної кори” комісії 3 “Обертання Землі та геодинаміка”. Серед іншого, цілями їх роботи є “дослідження деформацій земної кори усіх масштабів від глобальної тектоніки плит до локальних деформацій, ... розвиток і координація міжнародних програм зі спостереження, аналізу та інтерпретації даних деформаційних полів” [International Association ...].

Прикладні аспекти досліджень проблеми складають основу діяльності робочої групи 6.1 “Вимірювання та аналіз деформацій” комісії 6 “Інженерні вишукування” Міжнародної федерації геодезистів FIG (International Federation of Surveyors) [International Federation ...].

Наслідком тісного співробітництва між двома найважливішими міжнародними геодезичними організаціями в області досліджень проблеми стало створення спільної робочої групи IAG/FIG 0.2.1 “Нові технології для моніторингу деформацій та ліквідації наслідків природних катастроф”. Своєю діяльністю робоча група забезпечує координацію міждисциплінарних підходів до моніторингу деформаційних полів природних та інженерних об’єктів регіонального та локального масштабів, розробку методів опрацювання та аналізу часових рядів спостережень, інноваційних алгоритмів обробки даних, статичного та динамічного моделювання деформацій і оцінку ризиків з погляду безпеки життєдіяльності. Основним джерелом кількісної інформації для вирішення поставлених задач визначено дані спостережень у мережах перманентних GNSS-станцій. Результати діяльності комісії, а також науково-прикладні аспекти досліджень проблеми усією геодезичною спільнотою обговорюються на постійно чинних спільних (IAG/FIG) міжнародних симпозиумах з моніторингу деформацій, наприклад [Joint ...].

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Теоретичною основою вирішення проблеми є математична теорія пружності [Ландау,

Лифшиц, 1953; Hjelmsstad, 1997]. Вона дає змогу досягти розв’язків шляхом математичного (диференціального) об’єднання векторних полів зміщень і тензорів. Земна кора розглядається як суцільне середовище і для вираження параметрів деформації поділяється на елементи тих чи інших геометричних форм скінченного розміру за гіпотези, що такі елементи є твердими тілами. Пружне тверде тіло піддається дії сил, які спричинюють зміщення та деформації. Основне положення теорії пружності полягає в тому, що за умови однорідності зміщення є лінійною вектор-функцією координат вершин скінченного елемента, виражених у декартовій прямокутній системі дво- або тривимірного простору. По суті, теорія пружності займається дослідженням такої вектор-функції. Дослідження зводяться до встановлення відповідної їй матриці коефіцієнтів як геометричного об’єкта, який залежить від деформувальних сил і структури пружного чи абсолютно твердого тіла і виражає афінне перетворення векторного поля зміщень. Такий об’єкт називають тензором деформації. Через власні інваріанти тензор виражає різні параметри деформованого стану скінчених елементів.

Загальна теорія пружності дає змогу виразити деформації будь-якого характеру [Оден, 1976; Ogden, 1984, тощо]. Точніше описування деформаційних полів забезпечує нелінійна теорія деформації. Однак пряме застосування нелінійних моделей механіки суцільного середовища до вирішення проблеми за даними, які одержані з повторних спостережень класичних геодезичних мереж, є нерациональним з погляду на їх походження та структуру, а також нерівномірність і недостатнє покриття земної поверхні такими мережами. Геодезичні вимірювання проводяться виключно на фізичній поверхні Землі і мають дискретну структуру, а вираження нелінійних деформацій твердих тіл можливе лише за умови визначення зміщень у вершинах об’ємних (чи плоских) скінчених елементів і вздовж направляючих сторін між їх вершинами. З цієї причини за геодезичними даними виражають, як правило, горизонтальну складову лінійної деформації або її швидкість. Для цього за основу беруть класичну теорію лінійно-однорідної деформації суцільного

середовища і, використовуючи як технічний апарат метод скінченних елементів, досягають аналітичного вирішення задачі в межах їхніх найпростіших моделей, здебільшого симплексів (трикутників).

Від часу першої апробації методу скінченних елементів для інтерпретації деформаційних полів у межах симплексної лінійної моделі в 1929 році [Terada, Miyabe, 1929] він набуває масового використання та численних видозмін. Серед найгрунтовніших прикладних досліджень у цьому напрямі можна виділити методичні розробки, наприклад, [Harada, Shimura, 1979; Есиков, 1979; Brunner et al., 1981; Bibbi, 1982; Dermanis, Livieratos, 1983; Caspary, 1987], де вхідними даними для оцінювання деформацій слугували координати вершин трикутників. Вирішення завдання досягалось також за результатами прямих вимірів у триангуляції, наприклад, [Frank, 1966; Pope et al., 1966] чи трилатерації [Dermanis, 1994]. У статті [Kiamehr, Sjoberg, 2005] розкрито спробу оцінювання просторових деформацій методом скінченних елементів, який реалізований на симплексі у тривимірному просторі (тетраедрі).

Застосування симплексної лінійно-однорідної моделі для оцінювання деформацій земної поверхні – вимушений, але виправданий підхід до вирішення проблеми за вимірами зміщень пунктів у класичних геодезичних мережах. Однак, зважаючи на масштаби симплексів і фізичну природу описуваного ними явища, адекватність такої моделі істинній реалізації деформаційних процесів щонайменше сумнівна. У статті [Тадєєва та ін., 2012] розкрито очікувані наслідки інтерпретації результатів опрацювання даних методом скінченних елементів за умови, що гіпотеза локально-однорідної лінійної моделі деформації не підтверджена. Емпіричними розрахунками параметрів деформації у межах геодезичного чотирикутника посвідчено факт недосконалості традиційного підходу. Порушення умов реалізації моделі та відсутність критерію встановлення скінченних елементів навіть у такій простій геодезичній побудові зумовлюють суб'єктивні результати опрацювання даних і відповідну неправильну інтерпретацію явища. Посвідчений тут факт ще більш актуальний під час використання

результатів вимірів зміщень у мережах GNSS-станцій, адже жодного (навіть вимушеного) поділу території на трикутники у таких мережах взагалі не існує.

Недосконалість симплексної моделі зумовила пошук інноваційних шляхів вирішення проблеми. Результати одного з найперших досліджень у цьому напрямі розкрито в монографії [Schneider, 1982]. Автор запровадив у дослідження деформаційний аналіз – метод, заснований на поєднанні диференціальної геометрії та лінійної теорії деформації, який забезпечував оцінювання тензорів апроксимацією дискретних полів зміщень генералізованими поліномами методом найменших квадратів. Деформаційний аналіз став засобом неперервного оцінювання горизонтальних деформаційних полів на основі афінної трансформації прямокутних координат геодезичних пунктів.

Вагомим мотивом для переосмислення теоретичних основ деформаційного аналізу стало запровадження у геодезичну практику сучасних супутникових навігаційних технологій, які ґрунтуються на використанні глобальних систем супутникового позиціонування і реалізовані в межах глобальних мереж перманентних GNSS-станцій. Результати моніторингу координат станцій дали змогу підвищити ефективність вирішення багатьох задач сучасної геодинаміки. Водночас їх використання породило проблеми, пов'язані з необхідністю вироблення нових моделей та методів опрацювання даних.

Просторові координати станцій забезпечують описування фізичної поверхні Землі криволінійною поверхнею, яка вбудована в тривимірний евклідовий простір. Наявність таких даних зумовила вироблення методичних підходів до вирішення проблеми, які здатні забезпечити оцінки не лише горизонтальних, а й вертикальних складових деформаційних полів, а в перспективі – просторових деформацій Землі, які зараховані до її топографічної (а не модельної) поверхні. Перші змістовні дослідження проблеми у цьому напрямі подано, наприклад, у працях [Xu, Grafarend, 1996; Altiner, 1999; Voosoghi, 2000; Grafarend, Voosoghi, 2003]. Дослідження ґрунтуються на диференціальному поданні поверхонь у теорії пластин і оболонок механіки суцільного середовища. Вирішення

проблеми розглядається з двох точок зору. Перша – зовнішнє моделювання деформацій. Цей підхід передбачає моделювання криволінійної топографічної поверхні Землі у тривимірному просторі з наступним оцінюванням тривимірних тензорів деформації і пов'язаних з ними інваріантів. Він міг би забезпечити ідеальну, з погляду пізнання явища, інтерпретацію деформаційних полів, але з причини складних диференціальних формулювань не має сьогодні належних математичних розв'язків. Друга точка зору – внутрішнє моделювання деформацій земної поверхні як градуйованої двовимірної криволінійної поверхні, яка вкладена в тривимірний простір, з оцінюванням відповідних двовимірних тензорів. Автори досліджень вважають, що такий підхід здатний забезпечити оцінки просторових деформацій, які належать до топографічної поверхні Землі окремо в горизонтальній та вертикальній складових частинах. Розглянемо аргументації такого рішення. Подання горизонтальної складової забезпечує методика геометричного моделювання змін метрики поверхні, яка заснована на вираженні тензора деформації Ейлера–Лагранжа першого роду. Така методика вже традиційно використовується під час інтерпретації деформаційних полів. Вертикальні деформації описують пов'язані інваріанти тензора обертання і тензора Ейлера–Лагранжа другого роду, який виражає зміни Гауссової кривини вздовж нормалі до поверхні. Такий інноваційний підхід до вирішення задачі значно розширює інформативні можливості геодезичних методів моніторингу деформаційних полів. Реалізації розв'язків задачі на такій теоретичній основі постійно вдосконалюються і останніми роками активно впроваджуються в дослідницьку практику. Деякі оптимізаційні розв'язки подано, наприклад, у статтях [Moghtased-Azar, Grafarend, 2009; Hossainali et al., 2011a, 2011b; Grafarend, 2012].

Однак досі залишаються неврегульованими питання, які за практичної реалізації методики зумовлюють лише наближені результати і ймовірні суб'єктивні оцінки деформаційних полів. Зокрема, градуйоване подання поверхонь викликає потребу її поділу на скінченні елементи. Однозначності щодо їх вибору адекватно фізичному походженню геодинамічних процесів

сьогодні немає і навряд чи така взагалі може бути встановлена. З іншого боку, означені тензори – це лінеаризовані форми подання деформаційних полів. Описування поля зміщень будь-якими нелінійними функціями спричиняє їх лінеаризацію, а сформований у підсумку тензор виражає лише лінійні закономірності деформування. Означені неврегульованості мають наслідком різні методичні видозміни опрацювання даних на зазначеній теоретичній основі.

Так, у дослідженнях [Voosoghi, 2000; Grafarend, Voosoghi, 2003] скінченні елементи поверхні формуються методом триангуляції Делоне [Cline, Renka, 1984]. Це достатньо відомий геометричний метод неперервного поділу поверхні на трикутники за цим положенням нерегулярно розташованих вузлів. Оптимізація такого поділу досягається за принципом встановлення, наскільки це можливо, рівносторонніх трикутників. З метою встановлення компонент тензорів першого та другого роду автори використовують лінійні функції геодезичних координат вершин трикутників. Беручи до уваги, що тензори виражаються за такими даними, їхні інваріанти слід зарахувати до поверхні еліпсоїда, але не до топографічної поверхні Землі, як стверджує автор [Voosoghi, 2000].

У статті [Altiner et al., 2006] подано результати обчислення й аналізу параметрів деформації, які обчислені у межах криволінійних чотирикутників. Ними формується ґрид – регулярна еліпсоїдальна сітка зі сталим кроком широти і довготи. Покриття території регулярною сіткою також забезпечує неперервність поля деформації, що є однією з умов застосування методу скінченних елементів. Зміщення вершин сітки отримані методом сплайн-інтерполяції. Оцінки горизонтальних деформацій зараховані до площини у декартовій системі.

Подібний підхід до формування скінченних елементів розкрито у монографії [Марченко та ін., 2012], але прив'язка ґриду виконана до геосфери. Зміщення вершин сітки визначено методом середньої квадратичної колокації. До визначення компонент тензора деформації залучено апарат білінійних функцій і комбінації локальних сплайн-функцій Ерміта з їх апроксимацією методом найменших квадратів на сферичних чотирикутниках. З уже зазначених причин апроксимувальні функції лінеари-

зуються. Тому, у підсумку, такий підхід все одно забезпечує наближений розв'язок завдання. Однак, беручи до уваги прив'язку регулярної сітки до сферичної геоцентричної системи координат, розкриваються перспективи сумісної інтерпретації результатів розв'язку з даними інших силових полів Землі, які традиційно моделюються на геосфері, у межах однієї моделі.

Поділ території регулярною сіткою як аргумент правомірності використання методу скінченних елементів у останніх дослідженнях, має воночас негативні наслідки. З одного боку, очевидним є факт втрати точності вхідних даних внаслідок інтерполяції зміщень у вершини сітки. З іншого боку, виконаний таким чином поділ території зумовлює сумнівну адекватність використаних моделей скінченних елементів реальним деформаціям земної поверхні, адже у вершинах сітки прямі геодезичні спостереження не проводились.

Інші за змістом інноваційні розв'язки завдання подано у статтях [Pietrantonio, Riguzzi, 2004; Cacon et al., 2008]. Автори відмовились від поділу території на симплекси чи скінченні елементи поверхні будь-яких інших правильних геометричних форм. Натомість за гіпотези одного однорідного поля деформації чи поділу поля в субдомени шляхом тестування за геолого-геофізичними даними за тієї самої гіпотези однорідності, оцінюють компоненти тензора горизонтальних деформацій за результатами апроксимації лінійної функції методом найменших квадратів. Подібне вирішення завдання із залученням цього методу подано у статті [Киричук, Тадеєв, 1986], але тут з метою встановлення однорідно деформованих складових поділ території здійснюється тестуванням геодезичних даних на імовірісно-статистичній основі.

Метод найменших квадратів як один з числових математичних методів вже став традиційним засобом розв'язання різних прикладних задач за геодезичними даними, зокрема й у геодинаміці. Вперше метод реалізовано для обчислення параметрів деформації за вимірами кутів у геодезичному чотирикутнику [Savage, Burford, 1970]. Згодом такий розв'язок узагальнено на довільні геодезичні мережі [Savage, Prescott, 1973]. Переваги методу найменших квадратів порівняно з класичним аналітичним вирішенням завдання у межах симплексної

моделі розкрито у статтях [Тадесєва та ін., 2012; Тадесєв та ін., 2013]. Позаяк глибина пізнання явища постійно зростає, назрівають потреби залучення до його досліджень інших адаптивних числових методів. Обрані числові моделі повинні не лише забезпечити максимальну якість та надійність формальних математичних розв'язків за цього об'єму вхідних даних, але й бути адекватними походженню та внутрішній структурі явища. Враховуючи усталену практику вирішення завдання на основі механіки суцільного середовища, у статті [May et al., 2013] проаналізовано сучасний стан і можливості використання в геодинаміці адаптивного числового аналізу методом скінченних елементів. Просторова адаптація скінченних елементів як самоціль адаптивного моделювання здійснюється за критерієм контролю похибки дискретизації. Вирішення завдання досягається компромісом такої похибки у числовому розв'язку задачі з перспективою адекватного формування скінченних елементів для потреб геодинаміки.

Нагромадження результатів просторово-часових спостережень і формування величезних баз GNSS-даних зарахувати до актуальних задач геодинаміки функціональне подання та неперервну інтерполяцію просторово-часових полів зміщень різних масштабів. Інтерполяція є важливим чинником методології аналізу даних як засіб адекватного функціонального вираження зафіксованих перетворень фізичної поверхні Землі. Інтерполяція даних здійснюється прямими детермінованими методами, коли для описування полів зміщень як базові використовують функції визначених аналітичних форм, або посередніми методами під умовою стохастичної прогнозової моделі. В останньому випадку для інтерполяції найчастіше використовують методи середньої квадратичної колокації або крігінгу, а останнім часом також і робустні методи згладжування та аналізу даних. З погляду реалістичності та внутрішніх потенційних можливостей для описування і прогнозування полів зміщень та їхніх швидкостей такі методи мають очевидні переваги. Але їх використання для наступного деформаційного аналізу недоцільне з погляду, наприклад, несуттєвості щодо диференціювання емпіричних коваріаційних функцій з обмеженою

довжиною кореляції [Dermanis, Kotsakis, 2006; Dermanis, 2009]. Тому для описування деформаційних полів використовують винятково прямі детерміновані методи просторової інтерполяції. За такого підходу проблема побудови функціональної моделі зводиться лише до вибору типу і кількості базових функцій. Деякі з численних використовуваних нелінійних аналітичних форм базових функцій уже згадувались раніше. Але у детерміністичних відношеннях “функція-тензор” на засадах механіки суцільного середовища наявна не сама функція, яка виражає деформацію, а лише її локальне лінійне наближення на дотичній площині у нескінченно малому масштабі. Таке наближення і визначає структуру тензора і пов’язані з ним інваріанти лінійної деформації.

Емпіричні дослідження та інтерпретація деформаційних полів за геодезичними даними значною мірою обтяжені похибками, які є наслідком впливу ефекту втрати інваріантності параметрів деформації внаслідок визначення датуму. Така проблема легко врегульовувалась вибором єдиних нерухомих початкового пункту та азимуту вихідної сторони у повторних спостереженнях класичних мереж. Тим самим досягалось узгодження з принципами інваріантності щодо вибору різних референціальних систем відліку в механіці суцільного середовища. За умови використання для досліджень GNSS-даних проблема набуває нового змісту, адже такі дані обтяжені змінами системи відліку в різні часові епохи спостережень. Щодо ймовірних наслідків впливу такого роду похибок на результати інтерпретації деформаційних полів було акцентовано увагу ще у доповіді [Dermanis, Grafarend, 1993]. Проблема трансформації даних спостережень до єдиної епохи залишається актуальною ще й дотепер. Аналіз ефектів втрати інваріантності параметрів деформації за таких умов подано у статтях [Vanicek et al., 2008; Dermanis, 2009, 2010]. З метою збалансування трансформації GNSS-даних та теоретичних основ механіки суцільного середовища у статтях [Dermanis, 2010; Hossainali et al., 2011a, 2011b] пропонуються методики врахування відповідних похибок. Вони засновані на сингулярному розкладанні (“singular value decomposition”) градієнта деформації, який є “локальною лінійною апроксимацією фактичної нелінійної деформації в будь-якій точці” [Dermanis, 2010].

Опираючись на поданий аналіз, можна констатувати такі недоліки методу скінченних елементів за його використання для оцінювання деформаційних полів Землі на основі механіки суцільного середовища:

1. Усі розв’язки задачі обмежені рамками лінійної (здебільшого симплексної) моделі деформації. Вираження параметрів деформації нелінійного характеру навіть за умови використання скінченних елементів складніших геометричних форм і нелінійних функціональних моделей подання полів зміщень неможливе, оскільки формування тензора в межах обраної моделі передбачає лінеаризацію функцій, які могли б виражати дійсний закон деформації.

2. За відсутності чітких критеріїв поділу території на скінченні елементи та апріорної перевірки гіпотези лінійно-однорідної деформації ймовірні ризики суб’єктивного оцінювання та упередженої інтерпретації деформаційних полів.

Рис. 1 відображає власне бачення змісту завдань, які ідентифікуються як оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними, та математичні моделі, у межах яких мислимий розв’язок цих завдань. Подана систематизація детально розкрита у статті [Тадесс та ін., 2013]. Зіставлення змісту завдань та сучасного стану їх вирішення на основі механіки суцільного середовища показує: наявні методичні розробки не здатні повною мірою оцінити реальні деформаційні поля і забезпечити достовірні показники деформації.

Мета

Опираючись на поданий аналіз сучасного стану вирішення завдань оцінювання деформаційних полів Землі і беручи до уваги виявлені недоліки, визначимо мету подальших досліджень: 1) вдосконалення традиційної методики оцінювання горизонтальних деформацій на основі теорії лінійно-однорідної деформації механіки суцільного середовища; 2) визначення альтернативного підходу до вирішення завдання, який забезпечував би оцінювання також і нелінійних деформацій, а також обґрунтування шляхів та вироблення алгоритму його вирішення за такого підходу.



Рис. 1. Зміст завдань і математичні моделі оцінювання деформації земної поверхні
 Fig. 1. The content of tasks and mathematical models of estimating the earth's surface deformation

Вдосконалена методика математико-картографічного моделювання лінійних деформацій земної поверхні

Основна мета вдосконалень традиційної методики – забезпечити достовірність гіпотези локально-однорідної лінійної деформації земної поверхні. Це можна досягти застосуванням тих чи інших числових критеріїв перевірки правдоподібності гіпотез (зокрема статистичних) у межах математичної моделі оцінювання деформації окремих геологічних структур (рис. 1). Достовірність гіпотези буде гарантована заданим рівнем значущості обраного критерію. Беручи за основу дискретний просторовий розподіл геодезичних пунктів та їх зміщення протягом встановленого часового проміжку, критерії визначатимуть формальний поділ досліджуваної території на складові частини – елементи поверхні скінченних розмірів. Виділені складові матимуть структурні відношення, які визначатимуть відповідні критеріям числові характеристики. За такого підходу поділ території на частини не обтяжений умовою вибору геометричних форм скінченних елементів, числа їхніх вершин та дискретних точок у внутрішньому просторі окремого елемента. Це зумовлює наступний числовий розв'язок задачі. Тим самим буде здійснена систематизація території за ознакою, яку виражає гіпотеза –

локально-однорідна лінійна деформація земної поверхні. По суті, така систематизація – це математичне моделювання явища з погляду вираження деформацій земної поверхні, яке прийнято називати районуванням території.

Спроба вдосконалення традиційної методики оцінювання горизонтальних деформацій земної поверхні на таких засадах розкрита у статті [Тадєєва та ін., 2014]. Суть вдосконалень, які спрямовані на усунення констатованих недоліків чи хоча б мінімізацію їх впливу, відображає порівняльна табл. 1. Вдосконалень зводяться до запровадження обов'язкової перевірки однорідності зміщень пунктів та відповідності умовам лінійного афінного перетворення їх координат. В основу перевірки умови однорідності покладено принцип практичної рівності дисперсій зміщень, які обчислюються довкола заданих дискретних точок поверхні з усередненням дисперсій за встановленого радіуса R . Дисперсії, зараховані до пунктів, попарно порівнюються, а умова практичної рівності перевіряється за критерієм Фішера із заданим рівнем значущості. Об'єднання пунктів з практично рівними дисперсіями їхніх зміщень забезпечує поділ території на області однорідних деформацій. Такі області можна трактувати як скінченні елементи довільних геометричних форм, які окреслені пунктами з

однорідними зміщеннями. Умова лінійного закону деформації у межах виділених областей перевіряється проведенням кореляційного аналізу і посвідчується встановленням допустимості та надійності оцінок коефіцієнта лінійної кореляційної залежності. Підтвердження умови для окремої області дає підстави побудувати лінійне рівняння регресії, яке ідентифікується не інакше як лінійна емпірична формула. Її можна одержати також методом найменших квадратів, реалізуючи кускову апроксимацію лінійної функції. Коефіцієнти емпіричної формули є основою формування тензора однорідної лінійної деформації. Такий числовий розв'язок задачі задовольняє умови реалізації методу скінченних елементів [Hartmann, Katz, 2007]. Тензор забезпечує оцінювання деформації поверхні в межах окремої області такими інваріантами: дилатація θ , максимальне E_1 та мінімальне E_2 розширення (розтяг і стиснення), напрям головної осі деформації φ , зсув γ_m , обертання ω області як абсолютно твердого тіла.

Посеред інших аналогів розкрита методика вирізняється такою специфічною рисою як здатність змінювати ступінь узагальнення (деталізації) результатів опрацювання даних. Це досягається методом абстрагування як складової методики. Різні ступені узагальнення досягаються зміною радіуса R усереднення дисперсій на стадії перевірки їх практичної рівності. Залежно від величини R можна визначити такі ступені узагальнення. $R_{\max}$ (визначається емпіричним шляхом) – повне згладжування даних, коли територія не поділяється на однорідні області. Тоді скінченним елементом є плоска геометрична фігура, яку окреслюють її межові пункти, а відповідні параметри деформації виражають тренд (рис. 1). Зменшення радіуса усереднення дисперсій і вираження його величини у тих чи інших співвідношеннях відносно $R_{\max}$ зумовлює поділ території на області однорідних деформацій, які гіпотетично можуть відповідати розташуванню окремих геологічних чи тектонічних структур. Умовно можна встановити такі співвідношення з відповідними їм ступенями

узагальнення: 1) $R_B = \frac{3}{4} R_{\max}$ – високий ступінь;

2) $R_C = \frac{1}{2} R_{\max}$ – середній; 3) $R_H = \frac{1}{4} R_{\max}$ – низький ступінь узагальнення даних (надмірна деталізація).

У тій самій статті сформульовано алгоритм вирішення завдання й обґрунтовано перспективи графічного відображення результатів опрацювання тематичними картами (рис. 2). Враховуючи наведені у дослідженні аргументації, вироблена методика є засобом математико-картографічного моделювання геодинамічних процесів з погляду вираження і систематизації деформацій земної поверхні. Беручи до уваги здатність виділяти структурні відношення у межах вибраної теми математико-картографічної моделі, одержаний за використаного підходу картографічний продукт, як носій інформації за цією темою, називають “картою рішень” [ДеМерс, 1999]. За дослідженнями цієї статті – це синтетична інвентаризаційна карта рішень, адже вона є результатом вирішення поставленого завдання і ключем до завершення процесу прийняття рішень з поставленої проблеми.

У статті [Тадєєв, Луцик, 2014] подано результати апробації методики під час дослідження деформаційних полів за результатами GNSS-спостережень на території Європи протягом 2004–2014 рр. Як один з результатів опрацювання даних, на рис. 3 показано схематичну карту деформації, яка побудована за умови середнього ступеня узагальнення $R_C = 3300$ км. Вона показана тут виключно з метою наочної ілюстрації потенційних можливостей методики. Для всіх відображених на карті областей гіпотезу однорідності деформації посвідчено як таку, що не суперечить дослідним даним. Водночас для частини території, яка на карті під час відображення дилатації помічена штрихуванням, умова лінійної кореляційної залежності не підтвердилась. Проведеними емпіричними розрахунками, зарахованими до цієї частини земної поверхні, виявлено великі абсолютні значення похибок апроксимації лінійної функції і, як наслідок, відповідні похибки параметрів деформації. Отже, параметри лише наближено виражають деформований стан

поверхні. Очевидно, в такому разі для вирішення завдання доцільно залучати методи апроксимації нелінійних функцій, але теоретична основа методики такої можливості не передбачає.

Констатований факт посвідчує: вдосконалена методика забезпечує достовірні показники

лінійних деформацій, але не дає змоги повноцінно і достовірно оцінити деформований стан поверхні усієї досліджуваної території. Адже навіть за належного обґрунтування гіпотези для окремих ділянок, інші позбавлені можливості неупередженого оцінювання деформації.

Таблиця 1

Суть вдосконалень методики оцінювання лінійних горизонтальних деформацій земної поверхні

Table 1

The essence of improving methods of estimating linear horizontal deformations of the earth's surface

Методика	Теоретична основа	Принцип формування скінченних елементів	Геометрична форма скінченних елементів	Відповідність умовам однорідної лінійної моделі	Основа розв'язку	Перспективи узагальнення результатів опрацювання даних
Традиційна	Теорія локально-однорідної лінійної деформації суцільного середовища	Геометричний	Симплекс (трикутник)	Гіпотетична	Аналітичний	Відсутні
Вдосконалена	Теорія локально-однорідної лінійної деформації суцільного середовища	За відповідністю умовам однорідної лінійної деформації	Довільна плоска замкнена геометрична фігура	Емпірична перевірка умов	Метод найменших квадратів	Передбачені

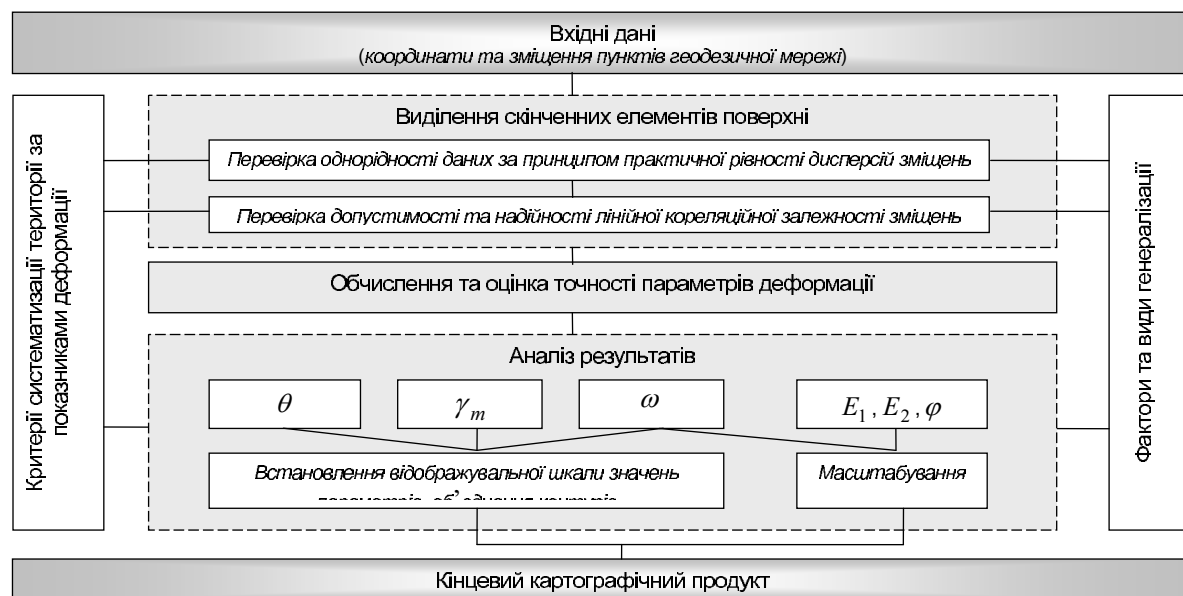


Рис. 2. Методика математико-картографічного моделювання лінійних деформацій земної поверхні [Тадеева та ін., 2014]

Fig. 2. Methods of mathematical and cartographic modeling linear deformations of the earth surface [Tadyeyeva et al., 2014]

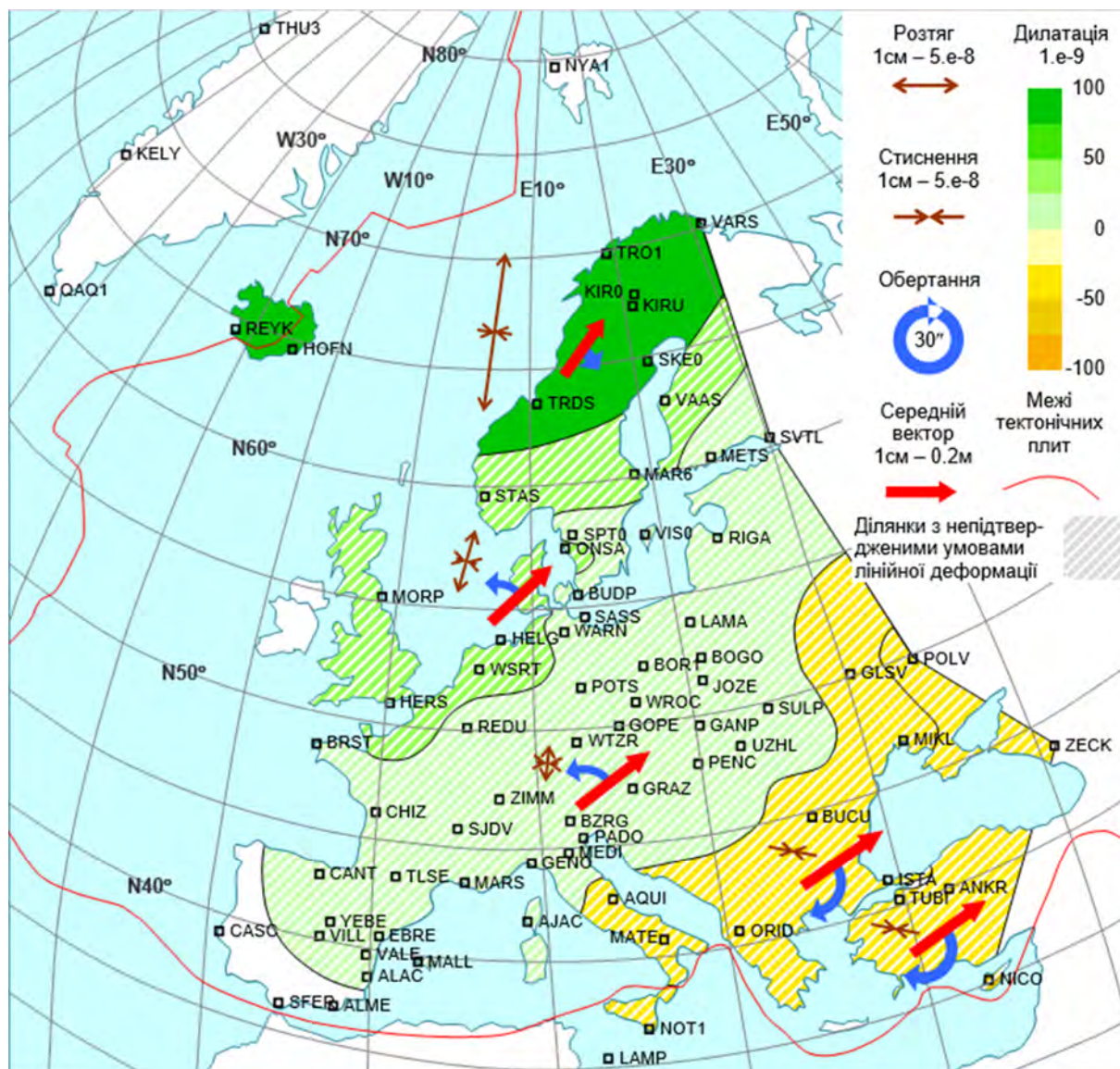


Рис. 3. Схематична карта деформації земної поверхні території Європи [Тадєєв, Луцук, 2014]

Fig. 3. Schematic map the deformation of the earth surface in Europe [Tadyeyev, Lutsyk, 2014]

Як традиційна, так і вдосконалена методики можуть мати практичне застосування для оцінювання горизонтальних деформаційних полів локального і, за певних припущень, регіонального масштабів. Це є наслідком того, що теоретична основа методики зумовлює використання даних у декартовій системі координат, зарахованих до площини. З погляду на використання вхідними геодезичних даних це означає вираження прямокутних координат пунктів, наприклад, у системі проекції Гаусса–Крюгера чи в довільній умовній топоцентричній системі. Похибки визначення таких координат у межах територій значних масштабів великі, що знижує

достовірність обчислення як зміщень пунктів, так і кінцевих оцінок деформації.

Результати, одержані в цій частині досліджень, стали мотивацією для пошуку альтернативних підходів до вирішення проблеми.

Методи оцінювання деформаційних полів Землі на основі теорії відображень проективно-диференціальної геометрії

Рухи земної поверхні, які виражені чисельно за результатами повторних геодезичних спостережень, можна ідентифікувати як перетворення фізичної поверхні Землі, редукованої на ту чи іншу відносну відлікову поверхню. Будь-

яка із загальноприйнятих у геодезії відлікових поверхонь має геометричну сутність і зумовлює встановлення відповідної їй системи координат для геодезичних пунктів, які підлягають спостереженням. Така мотивація дає підстави розглядати проблему з геометричної точки зору незалежно від походження і характеру рухів земної поверхні. Тоді доцільно окреслити її з позицій проективно-диференціальної геометрії [Фиников, 1937], а для пошуку шляхів вирішення проблеми використати теорію поверхонь [Каган, 1948], яка має дуже широкий спектр прикладного застосування, зокрема й у різних областях загального землезнавства. З погляду цілей цієї статті варто використати деякі розв'язки у математичній картографії, які стосуються врахування спотворень під час відображення поверхонь. Такі розв'язки спрямовані, здебільшого, на пошук оптимальних картографічних проєкцій різних поверхонь на площину. Для власних досліджень з метою пошуку вирішення поставленого завдання ми опирались на результати, які одержав проф. Г. О. Мещеряков [1968]. Детальне обґрунтування вирішення проблеми за такого підходу розкрито у статтях [Тадєєв та ін., 2013; Тадєєв, 2013в].

Перспективи застосування теорії відображень до вирішення проблеми визначає властивість гомеоморфізму: відображення поверхонь є взаємно однозначним і взаємно неперервним. Властивість гомеоморфізму дає змогу описувати поверхні їхніми метричними формами. Як лінійні елементи міри вони описують не тільки власне проєкцію (відображення), а й внутрішню геометрію відображуваних поверхонь, яка зумовлена зміною їхніх метричних властивостей. Вирішення проблеми досягається за гіпотези, що зміна метричних властивостей поверхонь спричинена деформацією. Тоді геометричні параметри гомеоморфного відображення, які описують такі зміни і передають спотворення проєкції, це і є, по суті, характеристики деформації початкової (недеформованої) поверхні. Носієм цих характеристик є тензор відображення. Його повністю визначають функції, які виражають його конкретну реалізацію: компоненти тензора – це частинні похідні функцій відображення. Тензор відображення, як і тензор деформації в механіці

суцільного середовища, має диференціальне походження. Тому слід очікувати тотожності не тільки змісту, а й числового вираження характеристик деформації на засадах обох фундаментальних теорій: теорії відображення поверхонь і теорії деформації суцільного середовища.

Під час формування тензора в традиційному вирішенні завдання функції, які виражають закон деформації, підлягають лінеаризації як такі, що повинні передавати виключно афінне перетворення у межах лінійно-однорідної моделі деформації твердого тіла нескінченно малого розміру. Досліджуючи можливості використання теорії відображень для вирішення проблеми у межах лінійної моделі, встановлено [Тадєєв, 1986]: 1) характеристики деформації (спотворення), якими традиційно оперують під час вирішення різних прикладних задач на основі обох теорій, тотожні за змістом; 2) у разі використання як основи теорії відображення поверхонь характеристики деформації обчислюються точніше. Це досягається врахуванням у робочих формулах малих величин другого і вищих порядків точності. Беручи до уваги сучасні можливості функціонального подання полів змішень, теорія відображення поверхонь має потенційно більші перспективи їх використання для вирішення проблеми. Адже властивість гомеоморфізму не обмежує клас, а лише накладає певні умови на функції, які реалізують відображення (вони повинні бути однозначними, неперервними і двічі диференційованими). Останнє дає змогу вирішувати проблему не лише у межах лінійної моделі. З цього погляду її вирішення з позицій теорії відображення поверхонь слід визнати узагальнювальним.

З метою вироблення на такій основі оптимального математичного розв'язання задачі необхідно визначитись з такими двома принципово важливими акомодативними обставинами.

Перша – встановлення функцій, які реалізують відображення (деформацію). Враховуючи дискретну структуру геодезичних даних, єдиним доступним засобом оцінювання неперервних у просторі деформацій є емпіричний. Він передбачає апроксимацію невідомих функцій за відомим дискретним розподілом. Завдання виведення емпіричних формул, які

відповідають таким функціям, не має однозначного строгого вирішення, чим порушуються умови гомеоморфізму відображення. Тому вирішення завдання потрібно вмотивувати з погляду коректності його постановки. Вибір аналітичної форми функцій може бути обґрунтований або змістом поставленого завдання за апіорною інформацією про характер деформації, або формально з математичної точки зору за критеріями точності апроксимації. Останнє видається перспективнішим у зв'язку з можливістю оцінювання ступеня наближення кінцевого розв'язку до строгого з огляду на умови гомеоморфізму. Під час опрацювання геодезичних даних для вирішення таких завдань здебільшого використовують метод найменших квадратів. Він здатний забезпечити визначення та оцінювання точності як самих емпіричних формул, так і виражених за ними тензора і параметрів деформації.

Друга обставина зумовлена потребою конкретизації систем координат на взаємно відображуваних поверхнях, оскільки основи загальної теорії відображень розглядаються у довільній криволінійній (ізометричній) системі. Для пошуку оптимальних шляхів вирішення завдання адекватно вхідним геодезичним даним необхідні узгодження з вимогами параметризації поверхонь загальної теорії відображень. Це забезпечить відповідність розв'язку та змісту завдання.

Питання параметризації поверхонь прямо пов'язані з вибором систем координат на

геодезичних відлікових поверхнях. У табл. 2 показано зв'язки типових геодезичних систем координат з видами параметризації і відображення поверхонь, а також окреслено клас функцій, які реалізують такі відображення. Враховуючи те, що перетворення фізичної поверхні Землі внаслідок деформації передаються в таких системах координат, а також беручи до уваги масштаби перетворень, у статті [Тадєєв, 2013б] визначено шляхи вирішення завдання оцінювання деформацій на основі теорії відображення поверхонь. Рис. 4 відображає систематизацію розв'язків у типових геодезичних системах координат у зв'язку з перспективами застосування їхніх результатів до інтерпретації складових деформаційних полів різних масштабів. Формальні математичні розв'язки задачі різняться лише належністю вхідних даних системі координат обраної відлікової поверхні.

У статті [Тадєєв, 2013а] подано розв'язок задачі на площині у прямокутній системі координат на умовах ріманової параметризації поверхонь. Розв'язок ґрунтується на теорії квазіконформних відображень. Цінність одержаного результату з погляду його застосування до вирішення проблеми полягає у тому, що розкривається перспектива подання деформацій будь-якими функціями двох змінних. Розв'язання задачі досягається незалежно від аналітичної форми функцій відображення, аби лиш вони задовольняли умови гомеоморфізму.

Таблиця 2

Зв'язки геодезичних систем координат з видами параметризації та відображення поверхонь

Table 2

Connections of geodetic coordinate systems with types of parameterization and mapping of surfaces

Геодезичні			Вид параметризації поверхонь	Вид відображення поверхонь	Клас функцій, які реалізують відображення
системи координат		відлікові поверхні			
плоска прямокутна		площина	ріманова	квазіконформне	довільні функції двох змінних
криволінійні	сферична	геосфера	ізометрична	загальне криволінійне	гармонічного типу
	геодезична	еліпсоїд			
просторова геоцентрична		3D-площини	триортогональна система співфокусних ріманових поверхонь	3D-квазіконформне	довільні функції трьох змінних

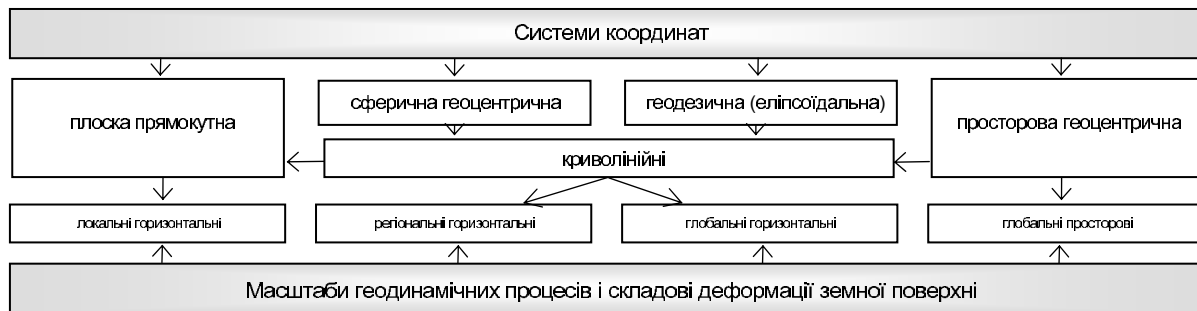


Рис. 4. Перспективи оцінювання деформації у типових геодезичних системах координат [Тадєєв, 2013в]

Fig. 4. Prospects of estimating the deformation in typical geodetic coordinate systems [Tadyeyev, 2013v]

У статті [Тадєєв, 2013б] розкрито розв'язок задачі у геоцентричній сферичній системі координат з редукцією результатів на геосферу. Тут за основу взято загальну теорію відображення поверхонь обертання з криволінійною ізометричною параметризацією. Функції, які реалізують такі відображення, – гармонічного типу. Геосферу як модель Землі найчастіше використовують для описування даних її силових полів у фізичній геодезії. Якщо її застосувати для виконання поставленого завдання і подати поле зміщень рядами сферичних функцій, у підсумку розкривається перспектива пошуку взаємозв'язків полів даних різного фізичного змісту в межах однієї моделі та сумісної інтерпретації результатів для потреб геодинаміки. Опираючись на ту саму теорію, отримано також розв'язок задачі в геодезичній (еліпсоїдальній) системі координат [Тадєєв, 2015]. Його результат дає змогу інтерпретувати деформаційні поля за їхніми оцінками, зарахованими до земного еліпсоїда обертання. Порівняння результатів розв'язання задачі на геосфері та еліпсоїді показало відмінності формул розрахунку параметрів деформації, які зводяться до врахування ними показників кривини поверхонь та їх параметризації. За умови вираження взаємозв'язків цих показників на обох поверхнях такий факт дає підстави трансформувати поля деформації з однієї відлікової поверхні на іншу. Гіпотетично, встановлення таких взаємозв'язків є вирішуваною математичною задачею не тільки щодо геосфери та еліпсоїда обертання, а й стосовно співвідношення цих поверхонь з іншими криволінійними моделями Землі. Означена трансформація має очевидну перспективу в

зв'язку з необхідністю врахування геодинамічних ефектів, зокрема поля деформації планетарного масштабу, під час встановлення (уточнення) фігури Землі.

Якщо ставити за мету залучення до вирішення проблеми даних моніторингу просторових геоцентричних координат XYZ у мережах перманентних GNSS-станцій, то потрібно насамперед визначитись з формулюванням завдання і відповідно сформулювати його зміст. Найпростіше розв'язання зумовлене перспективою нескладних перетворень просторових координат станцій у будь-яку з криволінійних систем чи навіть плоску прямокутну і оцінювання горизонтальних деформацій регіонального або локального масштабів, які зараховані до відповідної відлікової поверхні. Подібний результат можна досягти для інтерпретації горизонтальних деформацій і глобального масштабу. Тоді необхідно забезпечити регулярне покриття станціями Землі щонайменше у масштабах півкулі, адже неможливо повноцінно оцінити такі деформації за зміщеннями дискретних точок тільки якоїсь її частини. Остання умова однаково стосується оцінювання просторових деформацій Землі як об'ємного тіла та використання їх для інтерпретації геодинамічних явищ планетарного масштабу. Тоді розв'язок задачі може бути двояким. Перший, найпростіший, досягається на основі теорії квазіконформних відображень у триортogonalній системі співфокусних поверхонь з рімановою параметризацією окремо для координатних площин XOY , XOZ , YOZ . Результат можна зарахувати до цих площин, як це подано у статті [Тадєєв, 2013а], або визначити просторову орієнтацію параметрів деформації. Важливо, що

лише за такого формулювання завдання набуває значення оцінка дилатації як показника відносної зміни об'єму Землі. Якісно інші результати можна одержати з метою оцінювання просторових деформацій фізичної поверхні Землі незалежно від її масштабу, якщо використати, зокрема, такі методи проективно-диференціальної геометрії. Перший заснований на розв'язках загальної теорії відображень у тривимірній системі, які забезпечують оцінки спотворення поверхонь будь-якої складності з погляду їх кривини. Розв'язки досягаються на основі параметризації поверхонь, які називають рімановими різноманіттями. Другий ґрунтується на дослідженнях перетворень образів простору в межах груп руху і груп подібності [Каган, 1948]. Враховуючи, що результати моніторингу координат GNSS-станцій належать до фізичної поверхні Землі, тільки одержані на такій основі оцінки виражатимуть просторову деформацію поверхні, яку називають топографічною. Тоді розкривається перспектива апроксимації тривимірних полів зміщень функціями гармонічного типу і наступного оцінювання деформацій, зарахованих до криво-лінійної топографічної поверхні. Хоча одержані оцінки будуть максимально наближені до істинних (не змодельованих на тій чи іншій відліковій поверхні), проте інтерпретація за ними деформаційних полів буде позбавлена можливості зіставлення з такою ж для інших силових полів у межах загальноприйнятих моделей, навіть найадекватніших фізичних (наприклад, геоїду). Втім, останній висновок є апіорним. З метою пошуку належного розв'язання і визначення перспектив застосування результатів така задача потребує всебічного обговорення і становить предмет подальших досліджень.

Останній підхід до вирішення завдання ідентичний описаному вище, який іменувався як зовнішнє моделювання деформацій [Voosoghi, 2000; Grafarend, Voosoghi, 2003]. Беручи до уваги, що теорія відображень не обмежує використання різних функціональних моделей зміщень, вирішення завдання на такій основі має очевидні переваги і більші перспективи.

Одержані математичні розв'язки мають єдиний алгоритм, який містить два блоки задач. Їх можна розкрити, як це передано на рис. 5.

Перший блок схеми, маючи в основі теорію похибок вимірів і метод найменших квадратів, містить задачу апроксимації функцій за даним емпіричним розподілом з метою побудови емпіричних формул, які реалізують відображення.

Другий блок задач ґрунтується на теорії відображення поверхонь. З погляду цілей статті, це ключове розв'язання задач, яке спрямоване на вираження та оцінювання точності параметрів деформації за побудованими на попередній стадії емпіричними формулами. Його основою є формування тензора відображення (деформації). Тензор має сталу структуру та алгоритм побудови для будь-яких поверхонь і цілком визначається функціями відображення. Його компоненти є частинними похідними функцій координат деформованої поверхні за її початковими координатами. Компоненти тензора виражають перетворення, якому піддаються коефіцієнти метричної форми початкової (недеформованої) поверхні при диференційованій трансформації її координат. Тензор заданий у окремій точці поверхні. Якщо за обраною функціональною моделлю сформулювати тензор для всієї області відображення, утвориться тензорне поле, яке й визначає поле деформації з властивими йому параметрами.

За своїм змістом ці параметри можна систематизувати у три групи: 1) показники лінійних спотворень; 2) показники кутових спотворень; 3) показники відносної зміни площі або об'єму. Такі параметри разом з відповідними їм аналогами, якими традиційно оперують під час інтерпретації деформаційних полів Землі на основі механіки суцільного середовища, зведено до порівняльної табл. 3. Навіть зіставлення кількості параметрів, а тим більше аналіз їх змісту, посвідчує потенційно більші інформативні можливості вибраного підходу до оцінювання та інтерпретації деформаційних полів. Крім того, показники лінійних та кутових спотворень можна використати для вирішення якісно іншої задачі – врахування геодинамічних ефектів під час оцінювання деформацій геодезичних систем координат.

Наукова новизна і практична значущість

Розв'язки задачі оцінювання деформаційних полів Землі досягнуто методами про-

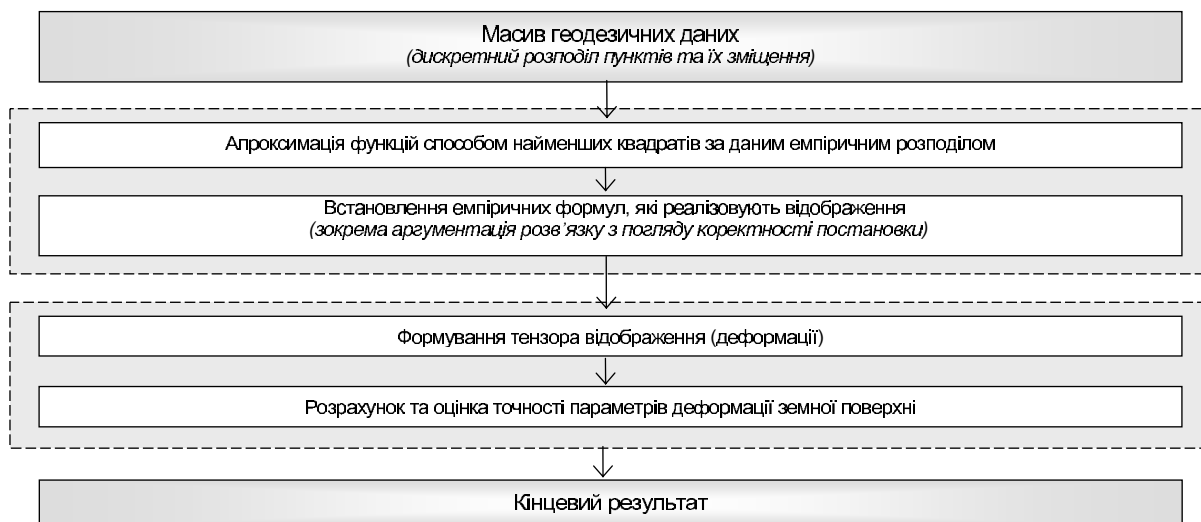


Рис. 5. Загальний алгоритм розв'язання задачі [Тадєєв, 2013в]
Fig. 5. The general algorithm of solving the problem [Tadyeyev, 2013v]

Таблиця 3

Характеристики деформації земної поверхні

Table 3

Characteristics of the earth's surface deformation

Теорія відображення поверхонь		Аналоги механіки суцільного середовища
Лінійні спотворення	Екстремальні масштаби спотворень та відповідні їм головні напрями	Максимальне та мінімальне розширення та напрям головної осі деформації
	Максимальне зміщення	Зсув
	Коефіцієнт спотворення у заданому напрямку	—
	Коефіцієнти спотворень у напрямках координатних ліній початкової поверхні	—
Кутові спотворення	Напрями проєкцій координатних ліній початкової поверхні в разі переходу на поверхню відображення	—
	Спотворення ортогональності координатних ліній початкової поверхні	—
	Обертання області відображення	Обертання ділянки як абсолютно твердого тіла
Коефіцієнт відносної зміни площі (об'єму) області відображення		Дилатація

ективно-диференціальної геометрії на альтернативній теоретичній основі – теорії відображення поверхонь. Обраний альтернативний підхід має більші потенційні можливості порівняно з традиційним, де за основу взято лінійно-однорідну модель механіки суцільного середовища. Одержані розв'язки дають змогу

оцінювати деформаційні поля у межах будь-якої, зокрема й лінійної, емпіричної функціональної моделі за однієї лише умови гомеоморфного відображення досліджуваних поверхонь. На такій основі сформульовано загальний алгоритм розв'язування задачі.

Висновки

1. Вирішення проблеми методом скінченних елементів у межах лінійно-однорідної моделі деформації суцільного середовища забезпечує упереджену інтерпретацію деформаційних полів Землі. Оцінки деформованого стану поверхні є достовірними тільки в межах тих її елементів скінченних розмірів, де за тими чи іншими критеріями підтверджено умови лінійно-однорідної моделі. Інші частини досліджуваних територій позбавлені можливості об'єктивного оцінювання деформаційних процесів.

2. Вирішення проблеми на основі теорії відображення поверхонь дає змогу оцінювати будь-якої деформації. Вибір шляхів розв'язання задачі залежить від типу вхідних геодезичних даних, який визначає відносна відлікова поверхня з відповідно встановленою системою координат. Формування тензорів не обтяжене умовами вибору функціональної моделі чи необхідністю лінеаризації базових функцій, за якими здійснюється подання деформаційних полів. Інваріанти тензорів належать до обраних відлікових поверхонь. Одержані математичні розв'язки завдання систематизовано у взаємозв'язку з перспективами інтерпретації складових деформаційних полів Землі різних масштабів.

3. Подача деформаційного поля, зарахованого до однієї з типових геодезичних відлікових поверхонь, відкриває перспективи його сумісної інтерпретації зі силовими полями різного фізичного змісту у межах відповідної такої поверхні загальноприйнятої моделі Землі.

4. Результати розв'язання задачі на основі механіки суцільного середовища і теорії відображення поверхонь тотожні за гіпотези лінійного закону деформації. Беручи до уваги потенційно ширші можливості застосування результатів розв'язку на основі теорії відображень, їх слід визнати узагальнювальними щодо традиційного.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- ДеМерс Майкл Н. Географические информационные системы. Основы. Пер. с англ. / Майкл Н. ДеМерс. – М. : Дата+, 1999. – 489 с.
- Есиков Н. П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н. П. Есиков. – Новосибирск : Наука, 1979. – 173 с.
- Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В. Ф. Каган. – М.-Л. : ГИТТЛ, 1947–1948. – 919 с.
- Киричук В.В. Об одной методике определения характеристик деформации земной коры по геодезическим данным / В. В. Киричук, А. А. Тадеев // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1986. – Вып. 43. – С. 31–38.
- Ландау Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехиздат, 1953. – 788 с.
- Марченко О. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О. Марченко, К. Третяк, А. Кульчицький, Ю. Голубінка, Д. Марченко, Н. Третяк. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 308 с.
- Мещеряков Г. А. Теоретические основы математической картографии / Г. А. Мещеряков. – М. : Недра, 1968. – 160 с.
- Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден; пер. с англ. – М. : Мир, 1976. – 465 с.
- Тадеев А. А. О картографическом смысле инвариантных характеристик деформации земной поверхности / А. А. Тадеев // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. – 1986. – Вып. 43. – С. 117–121.
- Тадеєва О. О. Достовірність результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів / О. О. Тадеєва, О. А. Тадеєв, П. Г. Черняга // Геодинаміка. – 2012. – № 2(13). – С. 28–33.
- Тадеєва О. О. Математико-картографічне моделювання лінійних деформацій земної поверхні / О. О. Тадеєва, О. А. Тадеєв, П. Г. Черняга // Вісник гео-дезії та картографії. – 2014. – № 1(88). – С. 16–22.
- Тадеєв О. А. Дослідження деформацій земної поверхні за результатами GNSS-спостережень на території Європи (2004–2014 pp.) / О. А. Тадеєв, О. О. Луцик // Науковий вісник Ужгородського університету. Географія. Землеустрій. Природокористування. – 2014. – Вип. 3. – С. 27–35.
- Тадеєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат / О. Тадеєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2015. – Вип. I (29). – С. 48–52.
- Тадеєв О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. А. Тадеєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013a. – Вип. 78. – С. 140–145.
- Тадеєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадеєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013b. – Вип. II (26). – С. 46–52.

- Тадєєв О. А. Проблема оцінки деформованого стану земної поверхні за геодезичними даними / О. А. Тадєєв, О. О. Тадєєва, П. Г. Черняга // Геодинаміка. – 2013. – № 1(14). – С. 5–10.
- Тадєєв О. А. Шляхи вирішення задачі оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними / О. А. Тадєєв // Вісник геодезії та картографії. – 2013в. – № 5(86). – С. 21–26.
- Фиников С. П. Проективно-дифференціальна геометрія / С. П. Фиников – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 265 с.
- Altiner Y. Analytical surface deformation theory for detection of the Earths crust movements / Y. Altiner – Berlin : Springer, 1999. – 110 p.
- Altiner Y. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements / Y. Altiner, Z. Basic, T. Basic, A. Coticchia, M. Medved, M. Mulic, B. Nurce // Dilek Y., Pavlides S. (Eds.), Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia : Geological Society of America Special Paper 409, 2006. – P. 43–55.
- Bibbi H. M. Unbiased estimate of strain from triangulation data using the method of simultaneous reduction / H. M. Bibbi // Tectonophysics. – 1982. – Vol. 82. – P. 161–174.
- Brunner F. K. A comparison of computation methods for crystal strains geodetic measurements / F. K. Brunner, R. Coleman, B. Hirsch // Tectonophysics. – 1981. – Vol. 71. – P. 281–298.
- Cacon S. Monitoring and analysis of rock blocks deformation / S. Cacon, B. Kontny, B. Kostak // 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon 2008 May 12–15. – 2008. – 12 p. – http://www.fig.net/resources/proceeding/2008/lisbon2008_comm6/papers/pas06/pas06_01_caconmc038.pdf
- Caspary W. F. Concepts of network and deformation analysis / W. F. Caspary – Kensington, Australia : University of New South Wales, 1987. – 183 p.
- Cline A. K. A storage-efficient method for construction of a Thiessen triangulation / A. K. Cline, R. J. Renka // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – P. 119–139.
- Dermanis A. A method for the determination of crustal deformation parameters and their accuracy from distances / A. Dermanis // Journal of Geodetic Society of Japan. – 1994. – Vol. 40. – P. 17–32.
- Dermanis A. A study of the invariance of deformation parameters from a geodetic point of view / A. Dermanis // Kontadakis M.E., Kaltsikis C., Spatalas S., Tokmakidis K., Tziavos I.N. (Eds.), The apple of knowledge. Volume in honor of prof. D. Arabelos. – Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2010. – P. 43–66. – http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html
- Dermanis A. The finite element approach to the geodetic computation of two- and three-dimensional deformation parameters : a study of frame invariance and parameter estimability / A. Dermanis, E. W. Grafarend // M. J. Sevilla, H. Henneberg (Eds.), Proceeding International Conference “Cartography-Geodesy”, 5th Centenary of Americas : 1492–1992, Maracaibo, Venezuela, 24.11.–3.12.1992 – Madrid : Instituto de astronomia y geodesia, 1993. – P. 66–85.
- Dermanis A. Estimating crustal deformation parameters from geodetic data : review of existing methodologies, open problems and new challenges / A. Dermanis, C. Kotsakis // Sanso F., Gil A. (Eds.), Geodetic deformation monitoring : from geophysical to geodetic roles. IAG symposia. – Berlin : Springer, 2006. – Vol. 131. – P. 7–18.
- Dermanis A. Applications of deformation analysis in geodesy and geodynamics / A. Dermanis, E. Livieratos // Reviews of Geophysics and Space Physics. – 1983. – Vol. 21. – P. 41–50.
- Dermanis A. The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation / A. Dermanis // Arabelos D., Kontadakis M., Kaltsikis Ch., Spatalas S. (Eds.), Terrestrial and stellar environment. Volume in honor of prof. G. Asteriadis. – Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2009. – P. 107–144. – http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html
- Frank F. C. Deductions of earth strains from survey data / F. C. Frank // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1966. – Vol. 56. – P. 35–42.
- Grafarend E. W. The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind : variation of curvature measures / E. W. Grafarend // Pure and Applied Geophysics. – 2012. – Vol. 169. – P. 1457–1462.
- Grafarend E. W. Intrinsic deformation analysis of the Earths surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies : present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E. W. Grafarend, B. Voosoghi // Journal of Geodesy. – 2003. – Vol. 77. – P. 303–326.
- Harada T. Horizontal deformation of the crust in western Japan revealed from first-order triangulation carried out three times / T. Harada, M. Shimura // Tectonophysics. – 1979. – Vol. 52. – P. 469–478.
- Hartmann F. Structural analysis with finite elements / F. Hartmann, C. Katz –Berlin Heidelberg New York : Springer, 2007. – 591 p.

- Hjelmstad K.D. Fundamentals of structural mechanics / K.D. Hjelmstad – New York : Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997. – 480 p.
- Hossainali M. Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // *Journal of Geodetic Science*. – 2011a. – Vol. 1(1). – P. 59–73.
- Hossainali M. Procrustean statistical inference of deformation / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // *Journal of Geodetic Science*. – 2011b. – Vol. 1(2). – P. 170–180.
- International Association of Geodesy (IAG). Commission 3 – Earth Rotation and Geodynamics – http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/33_3_Commission_3.pdf
- International Federation of Surveyors (FIG) – <http://www.fig.net/organisation/comm/index.asp/>
- Joint International Symposium on Deformation Monitoring (JISDM) – <http://jisdm2016.org/>
- Kiamehr R. Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden / R. Kiamehr, L. E. Sjöberg // *Journal of Geodynamics*. – 2005. – Vol. 39. – P. 403–412.
- May D. A. Overview of adaptive finite element analysis in computational geodynamics / D. A. May, W. P. Schellart, L. Moresi // *Journal of Geodynamics*. – 2013. – Vol. 70. – P. 1–20.
- Moghtased-Azar K. Surface deformation analysis on dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects / K. Moghtased-Azar, E.W. Grafarend // *Journal of Geodesy*. – 2009. – Vol. 83. – P. 431–454.
- Ogden R. W. Non-linear elastic deformation (Dover civil and mechanical engineering) / R. W. Ogden – E. Harwood Ltd, Chichester, New York : Halsted Press, 1984. – 526 p.
- Pietrantonio G. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations : methodological aspects and geophysical applications / G. Pietrantonio, F. Riguzzi // *Journal of Geodynamics*. – 2004. – Vol. 38. – P. 1–18.
- Pope A. J. Surveys for crustal movement along the Hayward fault / A. J. Pope, J. L. Stearns, C. A. Whitten // *Bulletin of the Seismological Society of America*. – 1966. – Vol. 56. – P. 317–323.
- Savage J. C. Accumulation of tectonic strain in California / J. C. Savage, R. O. Burford // *Bulletin of the Seismological Society of America*. – 1970. – Vol. 60. – P. 1877–1896.
- Savage J. C. Precision of Geodolite distance measurements for determining fault movements / J. C. Savage, W. H. Prescott // *Journal of Geophysical Research*. – 1973. – Vol. 78. – P. 6001–6008.
- Schneider D. Complex Crustal Strain Approximation / D. Schneider – Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Mitteilungen 33, 1982. – 221p. – <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:1494/eth-1494-01.pdf>
- Terada T. Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature / T. Terada, N. Miyabe // *Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo*. – 1929. – № 7(2). – P. 223–241.
- Vanicek P. Short note : strain invariants / P. Vanicek, E. Grafarend, M. Berber // *Journal of Geodesy*. – 2008. – Vol. 82. – P. 263–268.
- Voosoghi B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements / B. Voosoghi // PhD thesis, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, Germany, 2000. – 110 p. – <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/722/pdf/voosoghi.pdf>
- Xu P. L. Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional second-rank symmetric random tensor / P.L. Xu, E.W. Grafarend // *Geophysical Journal International*. – 1996. – Vol. 127(3). – P. 744–756.

А. А. ТАДЄЕВ

Національний університет водного господарства та природопольовання, ул. Соборна, 11, Рівно 33028. Україна, ел. пошта: oleksandrtad@gmail.com

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ОЦЕНКИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ЗЕМЛИ ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Цель. Анализ современного состояния решения задачи оценивания деформационных полей Земли на основе механики сплошной среды, совершенствование традиционной методики оценки горизонтальных деформаций, определение альтернативного подхода с обоснованием на его основе путей и разработкой алгоритма решения задачи. **Методика и результаты.** По результатам анализа установлено некоторые недостатки традиционных решений задачи. С целью минимизации их влияния предложена усовершенствованная методика математико-картографического моделирования линейных деформаций. Суть усовершенствований сведена к необходимости априорной статистической проверки условий локально-

однородной линейной модели и формирования конечных элементов поверхности по ее результатам при конкретной реализации деформационных полей. Конечным результатом обработки геодезических данных является синтетическая инвентаризационная карта решений. Представлены некоторые результаты апробации методики на территории Европы. Усовершенствованная методика обеспечивает достоверные показатели деформации той части поверхности, где линейно-однородная гипотеза подтверждена. Однако не позволяет полноценно оценить деформации всей исследуемой территории. Чтобы избежать существующих недостатков, предложен альтернативный подход к решению проблемы. Обоснованы перспективы ее решения с геометрической точки зрения на основе проективно-дифференциальной геометрии. Для поиска путей решения отдано предпочтение теории отображения поверхностей. При гипотезе, что искажения исходной поверхности при переходе на поверхность отображения обусловлены геодинамическим фактором, такой подход позволяет сформировать тензор отображения (деформации) и на его основе представить искажения различными числовыми характеристиками. Тензор полностью определяют функции, которые реализуют отображение. Его компоненты являются частными производными функций координат деформированной поверхности от ее исходных координат. Теория отображений не ограничивает класс таких функций, а лишь накладывает на них условия гомеоморфизма. Это позволяет представлять деформации нелинейными функциональными моделями. В зависимости от типов исходных геодезических данных установлены пути решения задачи оценки деформационных полей. Их определяют геодезические отсчётные поверхности с соответствующими им системами координат. Выбор систем координат связано с видами параметризации и отображения поверхностей. Получены математические решения задачи на плоскости в прямоугольной системе (квазиконформное отображение поверхностей с римановой параметризацией), а также на геофере и эллипсоиде вращения в соответствующих криволинейных системах координат (отображение поверхностей вращения с изометрической параметризацией). Обоснованы перспективы использования теории отображений для оценки пространственных деформаций Земли в геоцентрической системе координат. **Научная новизна.** Решения задачи оценивания деформационных полей Земли осуществлены методами проективно-дифференциальной геометрии на альтернативной теоретической основе - теории отображения поверхностей. **Практическая значимость.** Избранный альтернативный подход имеет большие потенциальные возможности по сравнению с традиционным, где за основу взята линейно-однородная модель механики сплошной среды. Полученные решения позволяют оценивать деформационные поля в рамках любой нелинейной эмпирической функциональной модели только при условии гомеоморфного отображения поверхностей. На такой основе сформирован общий алгоритм решения задачи.

Ключевые слова: деформационный анализ; метод конечных элементов; тензор деформации; теория отображения поверхностей; геодезические системы координат; функциональная модель

O. A. TADYEYEV

National University of Waste Management and Nature Resource Use, Soborna str., 11, 33028, Rivne, Ukraine. e-mail: oleksandrtad@gmail.com

PROBLEMS AND PROSPECTS OF ESTIMATING EARTH DEFORMATION FIELDS FROM GEODETIC DATA

Aim. Analysis of the current state of solving the problem the estimating of earth deformation fields based on continuum mechanics, improving traditional methods the estimating of horizontal deformations, definition an alternative approach and justification of ways and the algorithm of solving the problem based on it. **Methodology and results.** The analysis showed some shortcomings of traditional solving of the problem. In order to minimize their impact the improved method of mathematical and cartographic modeling of linear deformations is proposed. The essence of improvements consists in the necessity of a priori statistical test of conditions of the locally homogeneous linear model and forming finite elements of the surface on its results in the particular implementation of deformation fields. The finish result of geodetic data processing is a synthetic inventory map of decisions. Some results of the method approbation in Europe are shown. An improved method provides reliable indicators of deformations of the surface where the linear homogeneous hypothesis is confirmed. But do not allow to fully estimating the deformation of the surface of the study area as a whole. In order to avoid this shortcoming, an alternative approach to the solving of the problem is proposed. Prospects of the solving with the geometric point of view based on the projective-differential geometry are substantiated. To search for ways of solving the problem was elected the theory of the surfaces mapping. According to the hypothesis that distortions of the initial surface in the transition to the mapping

surface are caused by the geodynamic factor, this approach allows to generate the mapping tensor (deformation tensor) and submit distortions by different numerical characteristics. A tensor defines the function that implements the mapping. Its components are partial derivatives of the function of deformed surface coordinates from her initial coordinates. The theory of mapping does not limit the class of such functions, but only imposes on them homeomorphism conditions. This allows you to transfer deformations by nonlinear functional models. Depending on types of geodetic data defined the ways of solving the problem of deformation fields estimating. Data types define geodetic reference frame surfaces with corresponding to them coordinate systems. The choice of coordinate systems was associated with types of parameterizations and mapping of surfaces. Mathematical solving of the problem on the plane in a rectangular system (quasiconformal mapping of Riemann surfaces parameterization) and also on the geosphere and ellipsoid of revolution in corresponding curvilinear coordinate systems (mapping of surfaces with isometric parameterization) are obtained. Prospects of using the theory of mapping into estimating of spatial earth's deformations in the geocentric coordinate system are substantiated also. **Originality.** Solving of tasks the estimating of earth's deformation fields been achieved by methods of the projective-differential geometry on an alternative theoretical basis - the theory of the surfaces mapping. **Practical significance.** The chosen alternative approach has greater potential capabilities compared with traditional which is based on the linear homogeneous model of continuum mechanics. The obtained solving makes it possible to estimate the deformation fields within the framework of any empirical nonlinear functional models only on homeomorphism conditions of surfaces mapping. On this basis, a general algorithm for solving the problem is generated.

Key words: deformation analysis; finite element method; deformation tensor; theory of the surfaces mapping; geodetic coordinate system; functional model

REFERENCES

- DeMers Maykl N. *Geograficheskie informatsionnye sistemy. Osnovy. Per. s angl.* [Geographic Information Systems. Fundamentals. Transl. from English], Moscow: Data+, 1999, 489 p.
- Esikov N. P. *Tektonofizicheskie aspekty analiza sovremennykh dvizhenij zemnoj poverhnosti* [Tectonophysical aspects of the analysis of recent movements of the earth's surface]. Novosibirsk: Nauka, 1979, 173 p.
- Kagan V. F. *Osnovy teorii poverhnostej v tenzornom izlozhenii. Chast' 1,2* [Fundamentals of the theory of surfaces in tensor presentation. Part 1,2]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Moscow, Leningrad: State Publishing House of technical and theoretical literature, 1947–1948, 919 p.
- Kirichuk V. V., Tadeev A. A. *Ob odnoy metodike opredeleniya kharakteristik deformatsii zemnoy kory po geodezicheskim dannym* [On a method of determining the crystal deformations characteristics from geodetic data]. *Geodeziya, kartografiya i aerofotosemka* [Geodesy, Cartography and Aerial photography]. 1986, issue. 43, pp. 31–38.
- Landau L. D., Lifshits Ye. M. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum Mechanics]. Moscow: State Technical Press, 1953, 788 p.
- Marchenko O., Tretiak K., Kulchytskyi A., Holubinka Yu., Marchenko D., Tretiak N. *Doslidzhennia hravitatsiinoho polia, topohrafiy okeanu ta rukhiv zemnoi kory v rehioni Antarktyky* [Research of gravitational field, ocean topography and crystal movements in the region of Antarctica]. Lviv: Lviv Polytechnic, 2012, 308 p.
- Meshcheryakov G. A. *Teoreticheskie osnovy matematicheskoy kartografii* [Theoretical foundations of mathematical cartography]. Moscow: Nedra, 1968, 160 p.
- Oden Dzh. *Konechnye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred. Per. s angl.* [Finite elements in nonlinear continuum mechanics. Transl. from English]. Moscow: Mir, 1976, 465 p.
- Tadeev A. A. *O kartograficheskoy smysle invariantnykh kharakteristik deformatsii zemnoy poverkhnosti* [About cartographic sense of invariant characteristics of earth surface deformations] *Geodeziya, kartografiya i aerofotosemka* [Geodesy, Cartography and Air-Survey]. 1986, Vol. 43, pp. 117–121.
- Tadieieva O. O., Tadieiev O. A., Cherniaha P. H. *Dostovirnist rezul'tativ opratsiuvannia heodezychnykh danykh metodom skinchennykh elementiv* [Reliability of results of geodetic data processing by finite element method] *Heodynamika* [Geodynamics]. 2012, no. 2(13), pp. 28–33.
- Tadieieva O. O., Tadieiev O. A., Cherniaha P. H. *Matematyko-kartohrafichne modeliuvannia liniinykh deformatsii zemnoi poverkhni*. [Mathematics and cartographic modeling of linear deformations of the earth surface] *Visnyk heodezii ta kartohrafiy* [Bulletin of Geodesy and Cartography]. 2014, no. 1 (88), pp. 16–22.
- Tadieiev O. A., Lutsyk O. O. *Doslidzhennia deformatsii zemnoi poverkhni za rezul'tatamy GNSS-sposterezhen na terytorii Yevropy (2004-2014 r.r.)* [Study of the earth's surface deformations from results of GNSS-observations

- in Europe (2004-2014)]. *Naukovyi visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Heohrafiia. Zemleustrii. Pryrodokorystuvannia* [Uzhgorod University Scientific Herald. Geography. Land Management. Nature Management]. 2014, Vol. 3, pp. 27–35.
- Tadieiev O. *Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni za danymy v heodezychnykh kryvoliniinykh systemakh koordynat*. [Estimation of earth surface deformations according to the data in geodetic curvilinear coordinate systems] *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva* [Modern achievements of geodetic science and industry]. 2015, Vol. I (29), pp. 48–52.
- Tadieiev O. A. *Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni z pozytsii teorii kvazikonformnykh vidobrazhen* [Estimation of earth surface deformations from the standpoint of the theory of quasiconformal mappings]. *Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia*. [Geodesy, Cartography and Aerial Photography]. 2013, Vol. 78, pp. 140–145.
- Tadieiev O. *Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni, redukovanoi na heosferu // Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva*. [Estimation of earth surface deformations transferred to geosphere]. *Modern achievements of geodetic science and industry*. 2013b, Vol. II (26), pp. 46–52.
- Tadieiev O. A., Tadieieva O. O., Cherniaha P. H. *Problema otsinky deformovanoho stanu zemnoi poverkhni za heodezychnymy danymy* [Problem of assessing of the Earth's surface strain state by geodetic data]. *Geodynamics*, 2013, no. 1(14), pp. 5–10.
- Tadieiev O. A. *Shliakhy vyryshennia zadachi otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni za heodezychnymy danymy* [Ways of solving tasks of estimation of earth surface deformation from geodetic data]. *Visnyk heodezii ta kartohrafii*. [Bulletin of Geodesy and Cartography]. 2013, no. 5(86), pp. 21–26
- Finikov S. P. *Proektivno-differentsial'naja geometrija* [The projective differential geometry]. *Obedinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo*, [Joint Scientific and Technical Publishing House]. Moscow, Leningrad, 1937, 265 p.
- Altiner Y. *Analytical surface deformation theory for detection of the Earths crust movements*. Berlin: Springer, 1999, 110 p.
- Altiner Y., Bacic Z., Basic T., Coticchia A., Medved M., Mulic M., Nurce B. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements. Dilek Y., Pavlides S. (Eds.), *Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia: Geological Society of America Special Paper 409*, 2006, pp. 43–55.
- Bibbi H. M. Unbiased estimate of strain from triangulation data using the method of simultaneous reduction. *Tectonophysics*. 1982, Vol. 82, pp. 161–174.
- Brunner F. K., Coleman R., Hirsch B. A comparison of computation methods for crystal strains geodetic measurements. *Tectonophysics*. 1981, Vol. 71, pp. 281–298.
- Cacon S., Kontny B., Kostak B. Monitoring and analysis of rock blocks deformation. 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon 2008 May 12-15. 2008, 12 p. http://www.fig.net/resources/proceeding/2008/lisbon2008comm6/papers/pas06/pas06_01_cacon_mc038.pdf
- Caspary W. F. *Concepts of network and deformation analysis* – Kensington, Australia: University of New South Wales, 1987, 183 p.
- Cline A. K., Renka R. J. A storage-efficient method for construction of a Thiessen triangulation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 1984, Vol. 14, pp. 119–139.
- Dermanis A. A method for the determination of crustal deformation parameters and their accuracy from distances. *Journal of Geodetic Society of Japan*. 1994, Vol. 40, pp. 17–32.
- Dermanis A. A study of the invariance of deformation parameters from a geodetic point of view. Kontadakis M. E., Kaltsikis C., Spatalas S., Tokmakidis K., Tziavos I. N. (Eds.), *The apple of knowledge. Volume in honor of prof. D. Arabelos. Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki*, 2010, pp. 43-66. http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html
- Dermanis A., Grafarend E. W. The finite element approach to the geodetic computation of two- and three-dimensional deformation parameters: a study of frame invariance and parameter estimability. Sevilla M. J., Henneberg H. (Eds.), *Proceeding International Conference "Cartography-Geodesy", 5th Centenary of Americas: 1492–1992*, Maracaibo, Venezuela, 24.11.–3.12.1992, Madrid: Instituto de astronomia y geodesia, 1993, pp. 66–85.
- Dermanis A., Kotsakis C. Estimating crustal deformation parameters from geodetic data: review of existing methodologies, open problems and new challenges. Sanso F., Gil A. (Eds.), *Geodetic deformation monitoring: from geophysical to geodetic roles. IAG symposia, vol. 131*. Berlin: Springer, 2006, pp. 7–18.
- Dermanis A., Livieratos E. Applications of deformation analysis in geodesy and geodynamics. *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1983, Vol.21, pp. 41–50.

- Dermanis A. The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation. Arabelos D., Kontadakis M., Kaltsikis Ch., Spatalas S. (Eds.), *Terrestrial and stellar environment. Volume in honor of prof. G. Asteriadis. Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki*, 2009, pp. 107–144.
http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/Publication_ENG.html
- Frank F. C. Deductions of earth strains from survey data. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1966, Vol. 56, pp. 35–42.
- Grafarend E. W. The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind: variation of curvature measures. *Pure and Applied Geophysics*. 2012, Vol. 169, pp. 1457–1462.
- Grafarend E. W., Voosoghi B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets). *Journal of Geodesy*. 2003, Vol. 77, pp. 303–326.
- Harada T., Shimura M. Horizontal deformation of the crust in western Japan revealed from first-order triangulation carried out three times. *Tectonophysics*. 1979, Vol. 52, pp. 469–478.
- Hartmann F., Katz C. *Structural analysis with finite elements* – Berlin Heidelberg New York: Springer, 2007, 591 p.
- Hjelmstad K.D. *Fundamentals of structural mechanics*. NY: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997, 480 p.
- Hossainali M., Becker M., Groten E. Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula. *Journal of Geodetic Science*. 2011a., Vol.1(1), pp. 59–73.
- Hossainali M., Becker M., Groten E. Procrustean statistical inference of deformation. *Journal of Geodetic Science*. 2011b, Vol.1(2), pp. 170–180.
- International Association of Geodesy (IAG). Commission 3. Earth Rotation and Geodynamics.
http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf
- International Federation of Surveyors (FIG). <http://www.fig.net/organisation/comm/index.asp/>
- Joint International Symposium on Deformation Monitoring (JISDM). <http://jisdm2016.org/>
- Kiamehr R., Sjöberg L.E. Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden. *Journal of Geodynamics*. 2005, Vol. 39, pp. 403–412.
- May D. A., Schellart W. P., Moresi L. Overview of adaptive finite element analysis in computational geodynamics. *Journal of Geodynamics*. 2013, Vol. 70, pp. 1–20.
- Moghtased-Azar K., Grafarend E. W. Surface deformation analysis on dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects. *Journal of Geodesy*. 2009, Vol. 83, pp. 431–454.
- Ogden R. W. *Non-linear elastic deformation (Dover civil and mechanical engineering)*. E. Harwood Ltd, Chichester, New York: Halsted Press, 1984, 526 p.
- Pietrantonio G., Riguzzi F. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications. *Journal of Geodynamics*. 2004, Vol. 38, pp. 1–18.
- Pope A. J., Stearns J. L., Whitten C. A. Surveys for crustal movement along the Hayward fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1966, Vol. 56, pp. 317–323.
- Savage J. C., Burford R. O. Accumulation of tectonic strain in California. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1970, Vol. 60, pp. 1877–1896.
- Savage J. C., Prescott W. H. Precision of Geodolite distance measurements for determining fault movements. *Journal of Geophysical Research*. 1973, Vol. 78, pp. 6001–6008.
- Schneider D. Complex Crustal Strain Approximation – Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Mitteilungen 33, 1982, 221 p.
<http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:1494/eth-1494-01.pdf>
- Terada T., Miyabe N. Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature. *Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo*. 1929, no.7(2), pp. 223–241.
- Vanicek P., Grafarend E., Berber M. Short note: strain invariants. *Journal of Geodesy*. 2008, Vol. 82, pp. 263–268.
- Voosoghi B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements. PhD thesis, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, Germany, 2000, 110 p. <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/722/pdf/voosoghi.pdf>
- Xu P. L., Grafarend E. W. Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional second-rank symmetric random tensor. *Geophysical Journal International*. 1996, Vol. 127(3), pp. 744–756.