

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДІЇ ВЕРТИКАЛЬНОЇ РЕФРАКЦІЇ ТА ТОЧНОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ НАД ВОДНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

© Кравчук О.В., Островський А.Л., 2007

*Описано результати експериментальних досліджень впливу вертикальної рефракції на результати тригонометричного нівелювання над водною поверхнею озера м. Бережани. Виявлено закономірності дії рефракції над озером. Запропоновано методи виключення впливу цього фактора.*

*In article described experimental researches of a vertical refraction on results of trigonometrically levelly above water lake surface of Beregany town discover laws of action of a refraction above lake. Methods of exception of influence of this factor are offered.*

**1. Постановка задачі.** Формула тригонометричного нівелювання має вигляд:

$$h = L \cdot \operatorname{tg} V_{\text{вим}} + i - l + k + r, \quad (1)$$

де  $h$  – шукане перевищення між точками;  $V_{\text{вим}}$  – вимірний кут нахилу;  $L$  – горизонтальна віддаль між цими точками;  $i$  та  $l$  – відповідно висота тахеометра та візирної цілі над цими точками;  $k$  – кривина Землі;  $r$  – вертикальна рефракція.

Найбільші похибки тригонометричного нівелювання викликає саме вертикальна рефракція. Тому підвищення точності тригонометричного нівелювання можливе тільки за умови визначення та урахування вертикальної рефракції. Проте проблема урахування вертикальної рефракції є складною і дотепер повністю не вирішена.

Рефракцією називають непрямолінійність поширення електромагнітних хвиль (ЕМХ) у неоднорідній за густиною атмосфери. В результаті дії рефракції ми бачимо віддалені предмети не там, де вони фактично розташовані.

Теорія рефракції давно розроблена (див., наприклад [1])

Точна формула лінійної вертикальної рефракції має вигляд:

$$r = \cos V \int_0^L \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot l \cdot dl. \quad (2)$$

Оскільки  $r \ll L$ , то кут часткової вертикальної рефракції в секундах дуги –  $\delta_B''$  можна майже безпомилково знайти з виразу

$$\delta_B'' = \frac{r \cdot \rho''}{L}. \quad (3)$$

Кут рефракції  $\delta_B''$  звичайно виражають як функцію метеорологічних параметрів

$$\delta_B'' = 8,132 \cdot \frac{P}{T^2} \cdot (0,0244 \pm \gamma_{\text{ан.ек.сер.}}), \quad (4)$$

$$\gamma_{\text{ан.екюсерю}} = \frac{2}{L^2} \int_0^L \gamma_{\text{АН.І}} \cdot l \cdot dl. \quad (5)$$

У формулах (2) – (5):  $r$  – лінійна вертикальна рефракція, тобто вертикальний відрізок, на

який змістилась видима візирна ціль (віддалена від спостерігача на  $L$ ) відносно свого дійсного положення;  $n$  – показник заломлення світла в атмосфері;  $\frac{dn}{dz}$  – вертикальний градієнт показника заломлення світла в багатьох нескінченно малих відрізках  $dl$  на трасі довжиною  $L$ ;  $l$  – віддаль від візирної цілі або поточної точки інтегрування;  $\gamma_{ан.ек.сер.}$  – аномальний еквівалентний середній градієнт температури.

Цей градієнт можна визначити за (5), якщо знати  $\gamma_{ан.i} = \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ан.i}$  точкові градієнти температури, знов-таки, як і градієнт показника заломлення  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_i$  у багатьох точках на нескінченно малих відрізках  $dl$ .  $P$  та  $T$  – середній тиск та абсолютна температура за вимірюваннями на кінцях траси  $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$ ;  $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$ .

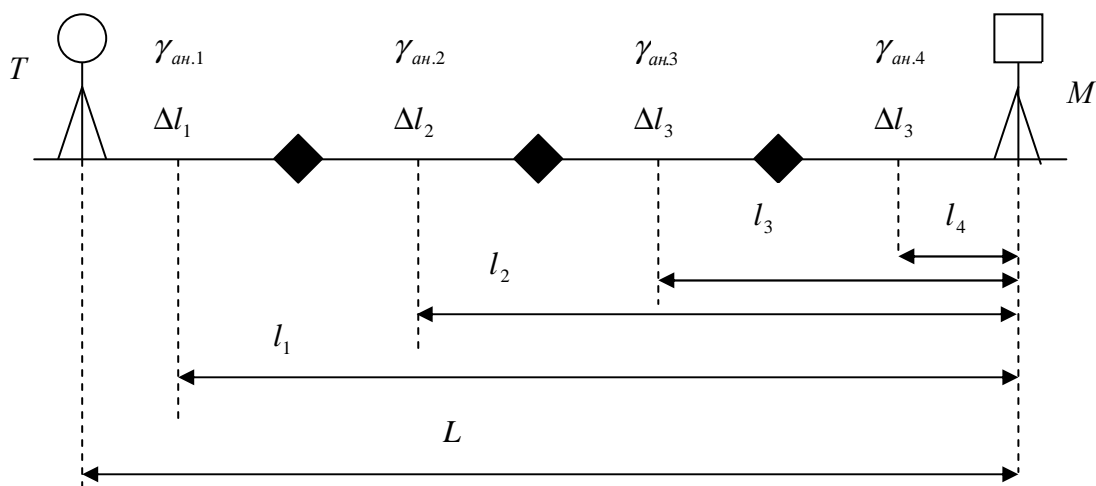


Рис. 1. Модель, що пояснює суть середнього еквівалентного градієнта температури

Геометричну суть формули (5), що описує середній еквівалентний градієнт температури, спрощено пояснює рис.1, на якому числовим інтегруванням визначається сума, що стоїть під інтегралом. Траса довжиною  $L$  між теодолітом  $-T$  та візирною маркою  $-M$  поділена на чотири рівні відрізки  $\Delta l_i = \frac{L}{4}$ ; на кожному з відрізків має бути відомий точковий аномальний градієнт температури  $-\gamma_{ан.i}$ . Вага точкового градієнта тим більша, чим ближче до теодоліта розташований такий градієнт; вага градієнта дорівнює добутку  $\Delta l_i \cdot l_i$ ; у формулі  $l_i$  – віддаль від візирної цілі  $-M$  до поточної точки інтегрування. Насправді градієнти  $-\gamma_{ан.i}$  потрібно знати не в чотирьох, а в багатьох точках траси на шляху променя світла, що практично неможливо (дуже дорого). Саме в цьому головний бар'єр на шляху визначення рефракції.

Якщо буде відомо  $\delta_g$ , тоді теоретичне (точне) значення кута нахилу  $V_T$  знайдемо за формулою:

$$V_T = v_{вим} \pm \delta_g \quad (6)$$

Зрозуміло, якщо в формулі (1)  $v_{вим}$  замінити на  $V_T$ , тоді член  $r = 0$  і ми знайдемо точне значення перевищення  $h_T$

Наші дослідження – пошуки можливостей знешкодити цей бар'єр, тобто визначити рефракцію і підвищити точність тригонометричного нівелювання над водними поверхнями.

**2. Методи, що застосовані для визначення рефракції.** Найпростіший і найточніший метод визначення дії рефракції над озерами і річками – це визначення точного значення перевищення  $h_T$  між точками на лівому та правому берегах річки іншими методами, наприклад прокладенням ходу геометричного нівелювання I, II або III класу по мосту (у нас по дамбі). Такий метод застосовувався нами як контрольний. Дійсно, якщо відоме точне перевищення  $h_T$ , тоді  $r$  знайдеться з (1), яку розв'яжемо відносно  $r$

$$r = L \cdot \operatorname{tg} \nu_{\text{вим}} - h_T + i - l + k, \quad (7)$$

а  $\delta_B$  за (3).

Проте метод дуже трудомісткий. Тому нами паралельно застосовувався ще й метод двостороннього одночасного нівелювання, який дає змогу визначити повну рефракцію  $\sigma$  без вимірювання метеопараметрів за формулою:

$$\sigma = 180 \cdot (Z_1 + Z_2) + \frac{L}{R_3} \rho'' . \quad (8)$$

Поставити одночасні виміри за сучасних методів зв'язку не викликає труднощів. Зауважимо, що і методи супутникової геодезії (GPS методи) також вимагають одночасних спостережень на відомій і шуканій точках.

Як відомо [1]

$$\sigma = \delta_1 + \delta_2, \quad (9)$$

$$\delta_2 = \sigma - \delta_1. \quad (10)$$

Розділити  $\sigma$  на  $\delta_1$  і  $\delta_2$  можна за формулою:

$$\frac{\delta_{an1}}{\sigma - \delta_{an1}} = \frac{h_{e2}}{h_{e1}} . \quad (11)$$

У (11)  $h_{e1}$ ,  $h_{e2}$  – еквівалентні висоти променя, які, своєю чергою, визначаються за формулою:

$$\frac{1}{h_{e_i}} = \frac{2}{L^2} \cdot \int_0^L \frac{1}{h_i} \cdot l \cdot dl . \quad (12)$$

У (12)  $h_i$  – висоти променя в багатьох точках  $i$  траси. Необхідні дані вибирають з карти.

Під час практики група ГД-24 виконала топографічну зйомку частини Бережанського озера, що дало можливість визначити еквівалентні висоти променя світла. Нами для визначення рефракції застосовувався метод одночасного двостороннього тригонометричного нівелювання, який ми і рекомендуємо виробництву.

**3. Побудова дослідного полігону. Виконання експериментальних вимірів.** Для досліджень завчасно були закладені 6 реперів: по 3 на лівому і правому березі озера-річки з таким розрахунком, щоб промені проходили над озером на висоті близько 2 м – 10 м – 20 м. Виконані одночасні, цілодобові, через 2 години, виміри довжин  $L_i$  трьома електронними тахеометрами та взаємні вимірювання кутів нахилу  $\nu_i$  або зенітних кутів  $Z_i$  ( $\nu_i = 90^\circ - Z_i$ ). На трьох лівобережних пунктах, де встановлювалися тахеометри, візирними цілями були відбивачі, що були встановлені над правобережними пунктами.

Програма спостережень складалася з таких пунктів:

1. За 3 хвилини до початку 0,2,4... годин – запуск психрометра, підвішеного на висоті тахеометра.

2. В години 0, 2, 4... відліки двох термометрів психрометра, анероїда та анемометра, фіксація

хмарності за п'ятибальною системою.

3. Спостереження кутів нахилу  $V$  (або зенітних кутів  $Z$ ) та віддалей  $L_i$ . При КЛ наведення труби електронного тахеометра на відбивач, зчитування з дисплея  $V$  та  $L$  те саме при КП. Такі дії – один прийом. У часовій програмі виконано 3 прийоми.

4. Виміри коливань зображень наведенням труби на максимальні верхні та максимальні нижні положення візирної цілі: три наведення на верхні положення візирної цілі і зчитування відліків з дисплея, те саме при наведенні труби на нижні положення візирної цілі.

5. Запуск та відліки термометрів, психрометра, фіксація хмарності.

На правобережних пунктах програми спостережень були аналогічні і відрізнялися тільки в такому:

- $V$  (або  $Z$ ) вимірювалися вертикальними кругами теодолітів;
- віддалі  $L$  не вимірювалися;
- коливання зображень візирної цілі вимірювалися у десятих частках горизонтального бісектора (також три прийоми вимірів); кути  $V$  (або  $Z$ ) та коливання зображень також виконувались трьома прийомами;
- візирними цілями слугували візирні марки, що встановлювалися над лівобережними пунктами.

На рис. 2 наведені вертикальні профілі поверхні, над якою проходили візирні промені. Спостереження велись упродовж двох діб 3–4 та 6–7 серпня 2007 року.

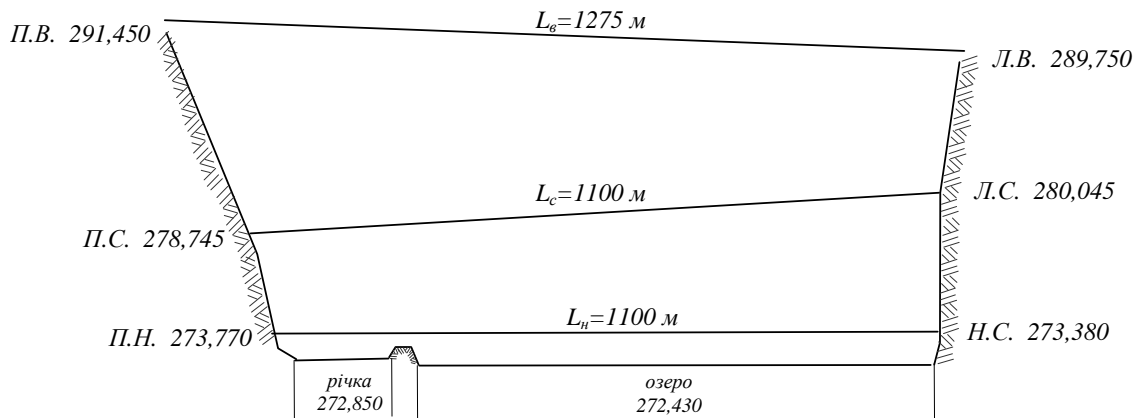


Рис. 2. Вертикальні профілі ліній дослідного полігону

Опрацювання результатів спостережень велось в такій послідовності:

- перевірка польових журналів;
- обчислення місця нуля електронних тахеометрів та теодолітів;
- визначення теоретичних (точних) кутів нахилу за перевищеннями, отриманими з геометричного нівелювання на основі формули (1);
- обчислення вертикальних рефракцій як різниці між теоретичними та вимірними кутами нахилу;
- розрахунок теоретичних (точних) зенітних кутів, приведених до центрів знаків;
- обчислення повних вертикальних рефракцій  $\sigma$  із взаємних одночасних спостережень (за формулою (8));
- побудова вертикальних профілів місцевості, над якими проходили світлові промені між пунктами Л.В.-П.В., П.В.-Л.В.; Л.С.-П.С., П.С.-Л.С.; Л.Н.-П.Н. П.Н.-Л.Н.. Спостереження велись трьома електронними тахеометрами: TC403 (Leica.) – точність  $2''$ , Topcon GPT3007 –  $5''$ , Topcon GTS 233 –  $5''$  та трьома теодолітами Theo 010В.

Найменша точність одного з тахеометрів  $5''$ . При трьох прийомах вимірів (у часовій програмі) апріорно очікувалась точність вимірювання рефракції:  $\frac{5''}{\sqrt{3}} = 2,89''$ .

На основі профілів обчислені еквівалентні висоти променів, які наведені в табл. 1.

Оскільки профілі виявилися достатньо симетричними, то прямі та зворотні еквівалентні висоти відрізняються незначно. Це дало змогу надалі користуватися середніми еквівалентними висотами і вважати прямі та зворотні кути рефракції  $\delta_{B_1}$  та  $\delta_{B_2}$  однаковими. Тоді, оскільки

$\sigma = \delta_1 + \delta_2$  то  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\sigma}{2}$ . Зрозуміло, що переважно через похибки вимірів, кути  $\delta_1$  і  $\delta_2$  дещо відрізнялися, але найімовірнішими з двох значень кутів буде їхнє середнє.

Таблиця 1

**Еквівалентні висоти променів світла на дослідному полігоні**

№ ліній	Назви ліній	Еквівалентні висоти $h_{l_i}$ , м	Середні еквівалентні висоти, м
1	Ліва-верхня-Права-верхня (Л.В.-П.В.)	17,46	16,83 8,34 2,36
2	Права-верхня-Ліва-верхня (П.В.-Л.В.)	16,20	
3	Ліва-середня-Права-середня (Л.С.-П.С.)	8,99	
4	Права-середня-Ліва-середня (П.С.-Л.С.)	7,69	
5	Ліва-нижня-Права-нижня (Л.Н.-П.Н.)	2,36	
6	Права-нижня-Ліва-нижня (П.Н.-Л.Н.)	2,36	

Таблиця 2

**Результати експериментальних вимірювань**

2.1. Середні значення рефракцій на лінії Л.В.-П.В.

Години знімання	Значення рефракцій (сек. дуги)		Середні значення рефракцій
	3 – 4 серпня	6 – 7 серпня	
1	2	3	4
9:02	+1,49	-	+1,49
10:03	+5,67	+3,69	+4,68
12:08	+1,17	-0,23	+0,47
14:12	+0,67	-2,05	-0,69
16:06	+2,77	-7,45	-2,34
18:04	+4,11	+0,86	+2,48
1	2	3	4
20:05	+3,37	+1,07	+2,22
22:02	+5,66	+2,40	+4,03
00:09	+2,14	+4,51	+3,32
02:06	+6,43	+3,46	+4,95
04:04	+8,08	+4,21	+6,14
06:18	+3,80	+3,77	+3,78
08:07		+4,45	+4,45
		сер.	+2,69

Продовження табл. 2

2.2. Середні значення рефракцій на лінії Л.С.-П.С.

Години знімання	Значення рефракцій (сек. дуги)		Середні значення рефракцій
	3 – 4 серпня	6 – 7 серпня	
09:17	+4,41	+0,19	+2,30
11:09	+5,45	+1,41	+3,43
13:09	+5,20	+0,80	+3,00

15:07	+6,50	+2,10	+4,30
17:09	+6,06	+5,54	+5,80
19:06	+7,30	+5,89	+6,60
21:05	+3,73	+5,32	+4,52
23:05	+3,04	+4,80	+3,92
01:05	+2,02	+4,40	+3,21
03:07	+3,97	+7,90	+5,94
05:07	+5,81	+9,94	+7,88
07:05	+4,24	+5,50	+4,87
Сер.			+4,65

### 2.3. Середні значення рефракцій на лінії ЛН-П.Н

Години знімання	Значення рефракцій (сек. дуги)		Середні значення рефракцій
	3 – 4 серпня	6 – 7 серпня	
08:10	+28,85		+28,85
10:05	+30,70	+29,30	+30,00
12:04	+48,15	+37,32	+42,74
14:04	+31,0	+43,02	+37,02
16:03	+31,5	+43,92	+37,71
18:04	+38,35	+43,12	+40,74
20:12	+37,05	+44,52	+40,78
22:15	+25,5	+43,07	+34,28
00:04	+22,35	+40,42	+31,38
02:04	+23,5	+38,82	+31,16
04:07	+30,15	+37,12	+33,64
06:02	+25,35	+37,32	+31,34
07:20		+37,42	+37,42
сер.			+35,16

Крім того, були обчислені середні за дві доби спостережень (3 – 4 та 6 – 7 серпня 2007 року) погодинні значення рефракції, наведені в табл. 2. Внизу, в кожній частині, цієї самої таблиці наведено загальні середні значення рефракції упродовж двох діб.

Фактичні середні квадратичні похибки визначення рефракції складаються з похибок вихідних даних (похибки геометричного нівелювання) та похибок виміру кутів нахилу.

Перевищення між точками, отримані з геометричного нівелювання, обтяжені похибками максимуму  $\pm 2$  мм. Такі похибки при довжині лінії 1000 м внесуть похибки у визначення рефракції  $0.4''$ . Похибки кутів нахилу або зенітних кутів обчислювалися за коливаннями місця зеніту  $MZ$  або місця нуля  $MO$ . Така оцінка точності вимірювання кутів доволі надійна. Обчислена зі всіх спостережень середня часова похибка визначення рефракцій (без похибок вихідних даних) становить  $m_{\text{сер}} = 3,437''$ . Тоді похибки середніх часових рефракцій (за дві доби) будуть

$\frac{3,437''}{\sqrt{2}} = 2,44''$ . Оскільки вимірювалися прямі і зворотні рефракції, то подальше усереднення

часових вимірів дає:  $\frac{2,44''}{\sqrt{2}} = 1,71''$ . Тому сумісні похибки вихідних даних та вимірів рефракцій

становить  $m = \sqrt{(1,71)^2 + (0,4)^2} = 1,76''$ .

Отже, похибки рефракцій, наведені в останній колонці табл. 2, не перевищують  $2''$ . Оскільки упродовж доби виконувались 12 часових програм, то похибки загальних середніх рефракцій, наведені в останньому рядку частин табл. 2, будуть:

$$m_{\text{заг.сер.}} = \frac{1,76''}{\sqrt{12}} = 0,5''.$$

Така висока точність середніх та, особливо, загальних середніх рефракцій дає змогу встановити закономірності дії рефракцій над водними поверхнями. Проте перш ніж перейти до формулювання цих закономірностей, розглянемо похибки перевищень, які можуть бути спричинені рефракцією над водною поверхнею.

На нижній лінії рефракція в окремі моменти досягає  $48''$ ; отже, при  $L = 1100$  м похибка  $m_h$  буде

$$\frac{m_{h_i}}{L} = \frac{\delta_i}{\rho}; \quad m_{h_i} = \frac{\delta_i \cdot L}{\rho} = 0,25 \text{ м.}$$

Урахування рефракцій хоча б з точністю  $2-3''$  зменшить похибки тригонометричного нівелювання до 12 мм, тобто тоді можна отримати точність тригонометричного нівелювання таку саму, як точність геометричного нівелювання III класу.

Перейдемо до розгляду виявлених закономірностей дії рефракції.

1. Вважає величина рефракцій на нижній лінії – середня  $35''$ . Такий порядок рефракцій відзначається над асфальтними поверхнями. Але над водною поверхнею рефракції додатні (криві проходження світла опуклі вверху); над асфальтом максимальні рефракції від'ємні (світлові криві опуклі вниз).

2. Додатні рефракції над водною поверхнею цілодобово при еквівалентних висотах майже до 17 м. Додатний максимум рефракції настає всередині світлої частини доби; саме в цей період над сушею навпаки – максимальна за модулем від'ємна рефракція; виявлене значне зменшення додатної рефракції вночі та вранці, до сходу сонця. Над сушею інверсія (додатна рефракція) максимальна саме в нічний період доби. Тільки на верхній лінії досліджень (висота майже 17 м) рефракція ранком (як і над сушею) – додатна; посередині дня спостерігаються незначні від'ємні значення рефракції; увечері та вночі рефракція додатна. Це уже дещо нагадує закономірність добової зміни рефракції над сушею. Однак над водою на такій висоті рефракції мало відрізняються від нормальних рефракцій, а відрізок часу з від'ємними рефракціями коротший.

3. Інверсійний цілодобовий розподіл температури повітря над водною поверхнею, як відомо (див. наприклад [2]), пояснюється тим, що температура води значно нижча від температури повітря. Так, 3–4 серпня 2007 року температура повітря вночі не опускається нижче за  $16^{\circ}\text{C}$ , тобто цілодобово була вища від температури води. Ніч 6–7 серпня була холодніша (мінімум  $13^{\circ}\text{C}$ ), тобто була нижча від температури води. У результаті вертикальна рефракція в цю ніч помітно менша.

Цікаво, що озеро впливає на температуру повітря не тільки над водою, але і над прибережною смугою суші. Так, середня добова температура повітря на висоті від землі 1,5 м була над верхніми пунктами  $21,49^{\circ}\text{C}$ , над нижніми  $-20,62^{\circ}\text{C}$ , над середніми  $-20,85^{\circ}\text{C}$ , тобто і над сушею цілодобово існувала інверсія. Інший характер розподілення середньої температури 6–7 серпня: над верхніми пунктами  $-19,48^{\circ}\text{C}$ , над нижніми  $-20,61^{\circ}\text{C}$ , над середніми  $-20,50^{\circ}\text{C}$ . Тобто над прибережною сушею цілодобове падіння температури з висотою. Водночас над водою – інверсія, на що вказують значення рефракцій.

4. Значно більші вертикальні градієнти температури в нижньому прошарку повітря над водою, ніж над сушею, приводять до того, що рефракція з висотою над водною поверхнею змінюється за іншим законом, ніж над сушею. Це виявлено за загальними середніми значеннями рефракції.

Як відомо, величина рефракції обернено пропорційна до еквівалентних висот.

$$\frac{\delta_i''}{\delta_A} = \frac{h_A^{(e)}}{h_{ek_i}^{(e)}}, \quad (13)$$

де  $\delta_i''$  – шукана рефракція на висоті  $h_{ек_i}$ , а  $\delta_A''$  – відома рефракція на відомій висоті  $h_A''$ .

Встановлений степінь ( $e$ ) еквівалентної висоти

Над водною поверхнею степінь ( $e$ ) виявився різним на різних за висотою прошарках:

$$\frac{\delta_{ниж}}{\delta_{сер}} = \frac{h_{сер}^{1,6}}{h_{гчh}^{1,6}}; \quad \frac{\delta_{ниж}}{\delta_{вер}} = \frac{h_{евер}^{4/3}}{h_{ениж}^{4/3}}; \quad \frac{\delta_{сер}}{\delta_{вер}} = \frac{h_{евер}^{3/4}}{h_{есер}^{2/3}}.$$

Як бачимо, над водною поверхнею у прошарку між нижнім та середнім променем степінь еквівалентних висот більший від одиниці і дорівнює  $e = 1,6$ . Навіть в прошарку між нижнім та верхнім променем – степінь більший від одиниці  $e = 4/3$  (точніше 1,31). Тільки в прошарку між середнім та верхнім променем степінь менший від одиниці  $e = 3/4$  (точніше 0,8).

Зауважимо, що над сушею в прошарку від 1 м до висоти більше за 200 м при інверсії  $e = 1$ , а при нестійкій стратифікації в прошарку 1–3 м,  $e = 1$ , вище ніж 3 м –  $e = 2/3$ .

5. Зі збільшенням висоти візирного променя над водною поверхнею вплив рефракції різко зменшується.

### Висновки

1. У нижніх прошарках атмосфери над водою до еквівалентних висот майже 17 м влітку цілодобово може зберігатися додатна рефракція, яка на еквівалентній висоті близько 2 м та довжині лінії візування близько 1000 м досягає  $50''$ . Похибки нівелювання будуть більшими за 0,25 м, що не можна не враховувати при топозніманнях з перерізом рельєфу 1 м, а, тим більше, при перерізах 0,5 м та 0,25 м.

2. Виконуючи одночасне двостороннє тригонометричне нівелювання, можна визначити рефракцію з точністю до  $2-3''$  і тим самим досягти точності тригонометричного нівелювання, що дорівнює геометричному нівелюванню III класу.

3. Інший, найпростіший спосіб зменшення впливу рефракції при передаванні висот через водні поверхні – підняття променя. Встановлено, що над водою рефракція з однаковим збільшенням висоти променя зменшується в 1,6 раза більше ніж над сушею.

4. Відомий метод компенсації вертикальної рефракції симетричними спостереженнями відносно моменту зміни знака рефракції, який застосовується над сушею, при нівелюванні через водні поверхні виключається.

*1. Островський А.Л., Джуман Б.М., Заблоцкий Ф.Д., Кравцов М. Учет атмосферных влияний на астрономогеодезические измерения. – М.:Недра, 1990. – С.235. 2. Дрок М.К. Исследования влияния вертикальной рефракции при одностороннем геодезическом нивелировании через водные пространства. Научные записки ЛПИ, серия геодезическая. – Л. – 1961. – №6. – С.154–182.*