

ОБҐРУНТУВАННЯ ГРАНИЧНОЇ КІЛЬКОСТІ СТАНЦІЙ У ПОЛІГОНАХ ВИСОТНОЇ МЕРЕЖІ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ГРУБИХ ПОХИБОК

© Бурак К.О., Гринішак М.Я., 2010

Решена задача обоснования пределов идентификации грубых погрешностей в высотных геодезических сетях при их поиске путем анализа невязок в полигонах. Определены критические промежутки идентификации грубых погрешностей в полигоне в зависимости от количества станций и промахов.

The grounding task of identification the flagrant error limits of measurings is decided in height geodesic networks at their search by the analysis of misclosures in grounds. Certainly critical intervals of rough errors identification in a ground depending on the amount of the stations and measurement errors in it.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими завданнями. У роботі [7] автори пропонують алгоритм автоматичної побудови замкнутих полігонів у нівелірних мережах будь-якої складності з подальшим підрахунком невязок у них. Аналізуючи фактичні та допустимі невязки у полігоні, можна робити висновки про наявність чи відсутність вимірів з промахами в ньому. Доведено, що для пошуку грубих похибок необхідно, зокрема, аналізувати не тільки внутрішні, а й зовнішні полігони, які можуть містити значну кількість станцій. У зв'язку з цим виникає проблема визначення величини грубої похибки, яку можна ідентифікувати залежно від кількості станцій у полігоні.

Аналіз публікацій за темою досліджень. Порівняння методів пошуку грубих похибок за допомогою аналізу невязок тільки у внутрішніх полігонах та за поправками з урівноваження наведено в роботі [5] проф. Коугія. Зокрема, в статті з “деякою імовірністю вказані границі проміжку, в якому може бути знайдена груба похибка” для обох методів.

Мета досліджень. Отримати розв'язок задачі встановлення довірчих інтервалів для величини грубої похибки, яку можна знайти в мережі з використанням алгоритму, описаного в роботі [7], в якій автори пропонують аналізувати всі можливі полігони, які здатен утворити кожен хід мережі.

Виклад основного матеріалу. Аналіз величин грубих похибок, які можна знайти з використанням запропонованого нами методу, виконаємо в основному за методикою, запроповану проф. Коугія в праці [5], внісши незначні уточнення та врахувавши, що для кожного ходу аналізуються не тільки внутрішні, а всі можливі полігони.

Для пошуку грубих похибок як критерій при аналізі невязок у замкнутих полігонах використовуємо загальновідому нерівність:

$$|W_{обч}| > W_{дон}, \quad (1)$$

де $W_{обч}$ – обчислене значення невязки у полігоні; $W_{дон}$ – величина допустимої невязки полігона.

Значення допустимої невязки полігона знаходимо за формулою, наведеною в [1]:

$$W_{дон} = t_{кр} \sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i}, \quad (2)$$

де $t_{кр}$ – критичний нормувальний множник, який визначає вірогідність потрапляння нев'язки на відповідний інтервал; σ – середнє квадратичне відхилення одного виміру з урахуванням класу нівелірного ходу; π_i – обернена вага i -го вимірюного перевищення на станції у полігоні; n – кількість вимірів (штативів) у полігоні.

Фактичне значення нев'язки у полігоні обчислюють за формулою:

$$W_{обч} = b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + \dots + b_n\Delta_n, \quad (3)$$

де Δ_i – похибки вимірів, ($i = 1, 2, \dots, n$); b_i – коефіцієнти умовного рівняння (для висотної мережі можуть набувати значення ± 1 залежно від того, чи збігається напрямком вимірюного перевищення з напрямком обходу полігона)

$$W_{дон} = 2\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i}. \quad (4)$$

Зазначимо, що ми не можемо ідентифікувати безпосередньо станцію, на якій допущено грубий промах, а тільки хід між двома вузловими точками, в який входить станція з грубою похибкою. Якщо в ході міститься кілька станцій з грубими похибками, то в розрахунках, наведених нижче, матиме значення тільки їх сумарний вплив, а не кожен промах зокрема, тобто величина сумарного впливу всіх промахів у полігоні $\Delta_{zc} = \sum_{j=1}^k b_j\Delta_{zj}$, де $1 \leq k < n$, Δ_{zj} – величина грубої похибки j -го виміру. З урахуванням цього вираз (3) набуде вигляду:

$$W_{обч} = b_1\Delta\delta_1 + b_2\Delta\delta_2 + \dots + b_{n-k}\Delta\delta_{n-k} + \Delta_{zc}, \quad (5)$$

де $\Delta\delta_i$ – допустимі похибки вимірів.

З теорії математичного опрацювання геодезичних вимірів відомо, що математичне сподівання суми похибок вимірів, які не містять систематичних та грубих складових, дорівнює нулю:

$$M[b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2 + \dots + b_n\Delta_n] = 0. \quad (6)$$

Якщо в полігоні немає промахів, то при рівноточних вимірах його нев'язка характеризується інтервалом довіри залежно від значення t :

$$\begin{cases} -t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} \leq W_{обч} \\ t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} \geq W_{обч} \end{cases}. \quad (7)$$

Якщо якийсь із ходів у полігоні містить грубу похибку, то математичне сподівання суми похибок вимірів (нев'язки) у ньому дорівнюватиме Δ_{zc} , що впливає з аналізу виразів (5) та (6). Отже, інтервал довіри, що характеризує нев'язку в полігоні, зміниться і набуде вигляду:

$$\begin{cases} \Delta_{zc} - t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \leq W_{обч} \\ \Delta_{zc} + t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \geq W_{обч} \end{cases}, \quad (8)$$

де π_j – обернена вага j -ї станції у полігоні, яка виміряна з грубою похибкою; j – кількість вимірів з грубими похибками у полігоні.

Для аналізу величини грубої похибки, яку можна виявити за цією методикою, дослідимо граничні значення нев'язки у полігоні, використовуючи допуск (1):

$$\begin{cases} \left| \Delta_{zc} - t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \right| > W_{дон} \\ \left| \Delta_{zc} + t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \right| > W_{дон} \end{cases}. \quad (9)$$

Як відомо з курсу елементарної математики, кожну з нерівностей системи (9) розв'язують, досліджуючи її на проміжках. Наведемо розв'язок першої нерівності системи (9). Для початку

значимо, що доданок $t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}$ завжди набуває додатних значень, оскільки всі його множники, очевидно, є додатними. Отже, розкриття модуля передбачає два випадки:

1. Якщо

$$\Delta_{zc} > t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}, \quad (10)$$

то підмодулевий вираз додатний і в подальшому розв'язку нерівності знак модуля опускають. Очевидно, що Δ_{zc} для цього випадку є додатною, а перша нерівність системи (9) набуває вигляду:

$$\Delta_{zc} - t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} > W_{don}, \quad (11)$$

звідки після нескладних математичних перетворень з урахуванням виразу (4) маємо:

$$\Delta_{zc} > \sigma\left(2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} + t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}\right). \quad (12)$$

Отже, якщо Δ_{zc} відповідає вимозі (10), то ми можемо її ідентифікувати на проміжку (12).

2. Якщо в підмодулевому виразі першої нерівності системи (9) перший доданок буде меншим від другого:

$$\Delta_{zc} < t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}, \quad (13)$$

то лінійна залежність під знаком модуля набуває від'ємного значення і при розкритті модуля знаки при доданках підмодулевого виразу змінюються на протилежні. З урахуванням цього перше рівняння системи (9) набуде вигляду:

$$-\Delta_{zc} + t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} > W_{don}. \quad (14)$$

Подальший розв'язок нерівності (14) можливий із розглядом двох випадків:

- Груба похибка має додатне значення і може лежати в діапазоні:

$$0 < \Delta_{zc} < t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}, \quad (15)$$

У цьому випадку, виконавши перетворення, аналогічні до виконаних під час дослідження Δ_{zc} на проміжку (10), отримаємо вираз:

$$\Delta_{zc} < \sigma\left(t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} - 2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i}\right). \quad (16)$$

Аналізуючи (16), бачимо, що за умови (15) нерівність має розв'язки тільки тоді, коли $t > 2$ (навіть прийнявши, що $\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i}$) тоді як за середніх умов вимірів $t = 0,6745$. У зв'язку з цим вважаємо, що аналізувати грубі похибки на проміжку (15) для першої нерівності системи (9) недоцільно.

• Груба похибка від'ємна ($\Delta_{zc} < 0$). Тоді ми можемо знайти її за умови потрапляння останньої на проміжок (16).

Для другої нерівності з (9) наведемо тільки кінцеві результати її аналізу:

1. Якщо Δ_{zc} містяться на проміжку:

$$\Delta_{zc} \geq -t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}, \quad (17)$$

то друга нерівність системи (9) набуває вигляду:

$$\Delta_{zc} > \sigma\left(2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} - t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}\right). \quad (18)$$

Виникають два випадки:

- Груба похибка додатна, у випадку чого можлива її ідентифікація за умови потрапляння на проміжок (18).
- Δ_{zc} від'ємна і лежить на проміжку:

$$-t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} < \Delta_{zc} < 0. \quad (19)$$

Тоді, аналізуючи (18), робимо висновок, що ця нерівність має зміст при $t > 2$, а це не відповідає середнім умовам вимірів. Тому вважаємо, що дослідження грубих похибок на інтервалі (19) для другої нерівності системи (9) не потрібне.

2. Груба похибка від'ємна і лежить на проміжку:

$$\Delta_{zc} < -t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}, \quad (20)$$

у разі чого нерівність (18) набуває вигляду:

$$\Delta_{zc} < -\sigma\left(2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} + t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}\right). \quad (21)$$

Проаналізувавши розв'язки системи (9), можемо зробити такі висновки:

1. З виразів (15) та (19) випливає, що аналізувати грубі похибки недоцільно у випадку:

$$\begin{cases} \Delta_{zc} > -t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \\ \Delta_{zc} < t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \end{cases}, \quad (22)$$

оскільки їх потрапляння на (22) можливе тільки при $t > 2$, що не відповідає середнім умовам вимірів.

2. Якщо груба похибка знаходиться на проміжку:

$$\begin{cases} \Delta_{zc} < -t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \\ \Delta_{zc} > t\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j} \end{cases}, \quad (23)$$

то, аналізуючи вирази (12), (16), (18) та (21), робимо висновок, що грубу похибку можна ідентифікувати на таких проміжках:

$$\begin{cases} |\Delta_{zc}| > \sigma\left(2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} + t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}\right) \\ |\Delta_{zc}| > \sigma\left(2\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i} - t\sqrt{\sum_{i=1}^n \pi_i - \sum_{j=1}^k \pi_j}\right) \end{cases}. \quad (24)$$

Аналізуючи систему нерівностей (24), бачимо, що значний вплив на нижню межу діапазону, в якому можна знайти грубу похибку, має нормувальний множник t .

Проаналізуємо величину грубої похибки, яку можна знайти у полігоні залежно від кількості станцій у ньому. Для розрахунків прийmemo $t_{kp} = 2$ та $t = 0,6745$, що відповідає середнім умовам вимірів [2]. Для окремих станцій обернені ваги π_i, π_j прийmemo однаковими та для простоти аналізу такими, що дорівнюють 1. Для випадків появи грубих похибок в одному, двох чи трьох ходах полігона виконаємо аналіз граничної величини Δ_{zc} , більша за яку може бути ідентифікована в результаті аналізу нев'язки у полігоні. Обчислення Δ_{zc} виконано за виразами (24), а результати наведені в табл. 1 та графічно подані на рис. 1, 2, 3.

Таблиця 1

Критичні проміжки ідентифікації Δ_{zc} у полігоні з n станцій залежно від кількості ходів з промахами m

| Кількість станцій у полігоні n | Граничне значення Δ_{zc} , більше за яке буде ідентифіковане для кількості станцій n у полігоні нівелірної мережі за наявності m ходів з грубими похибками | | | | | |
|-------------------------------------|--|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| | $m = 1$ | | $m = 2$ | | $m = 3$ | |
| | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| 5 | 3,12 σ | 5,82 σ | 3,30 σ | 5,64 σ | 3,52 σ | 5,43 σ |
| 10 | 4,30 σ | 8,35 σ | 4,42 σ | 8,23 σ | 4,54 σ | 8,11 σ |
| 15 | 5,22 σ | 10,27 σ | 5,31 σ | 10,18 σ | 5,41 σ | 10,08 σ |
| 20 | 6,00 σ | 11,88 σ | 6,08 σ | 11,81 σ | 6,16 σ | 11,73 σ |
| 25 | 6,70 σ | 13,30 σ | 6,77 σ | 13,23 σ | 6,84 σ | 13,16 σ |
| 30 | 7,32 σ | 14,59 σ | 7,39 σ | 14,52 σ | 7,45 σ | 14,46 σ |

Розрахунки табл. 1 справедливі тільки тоді, коли у кожному з ходів, що містять грубу похибку, її допущено тільки на одній станції. Інакше збільшиться величина $\sum_{j=1}^k \pi_j$ і звузиться критичний проміжок ідентифікації Δ_{zc} .

У табл. 1 прийнято, що σ – величина середньої квадратичної похибки вимірів на станції. Зазначимо, що у стовпцях з назвою Min наведені значення Δ_{zc} , більші від яких будуть ідентифіковані за умов найсприятливішого розподілу допустимих похибок вимірів Δd_i у полігоні (коли всі Δd_i мають такий самий знак, як і Δ_{zc} , а їх середня величина дорівнює $0,6745\sigma$). Відповідно у стовпцях Max наведено Δ_{zc} , більші від яких будуть знайдені при найгіршому розподілі Δd_i у полігоні (всі Δd_i мають протилежний до Δ_{zc} знак, а їх середня величина становить $0,6745\sigma$).

$Min < |\Delta_{zc}| \leq Max$ назвемо критичним проміжком ідентифікації грубих похибок у полігоні. Наприклад, для полігона, що складається з 15 станцій ($n = 15$) і містить грубу похибку в одному ході ($m = 1$), за найсприятливіших умов розподілу випадкових похибок Δd_i ми можемо констатувати наявність промаху, якщо його абсолютна величина ($|\Delta_{zc}|$) більша за $5,22\sigma$, тоді як за найгірших умов розподілу Δd_i можна встановити наявність грубої похибки, якщо $|\Delta_{zc}| > 10,27\sigma$. Отже, критичний проміжок ідентифікації грубих похибок для такого полігона $5,22\sigma < |\Delta_{zc}| \leq 10,27\sigma$.

Важливо зазначити, що методика пошуку грубих похибок за результатами аналізу нев'язок у полігонах дає змогу ідентифікувати кілька промахів у полігоні, що не досліджується при використанні методик [5, 3, 8]. Аналізуючи дані табл. 1, хочемо звернути увагу на те, що зі збільшенням кількості ходів з грубими похибками в полігоні (m) критичний проміжок ідентифікації $|\Delta_{zc}|$ звужується, причому чим більша кількість станцій в полігоні n , тим на меншу величину спостерігається звуження за тієї самої різниці m (для $n = 5$ критичний проміжок ідентифікації при $m = 3$ на $0,81\sigma$ вужчий, ніж при $m = 1$, тоді як для полігона із 30 станцій відповідна різниця становить $0,26\sigma$).

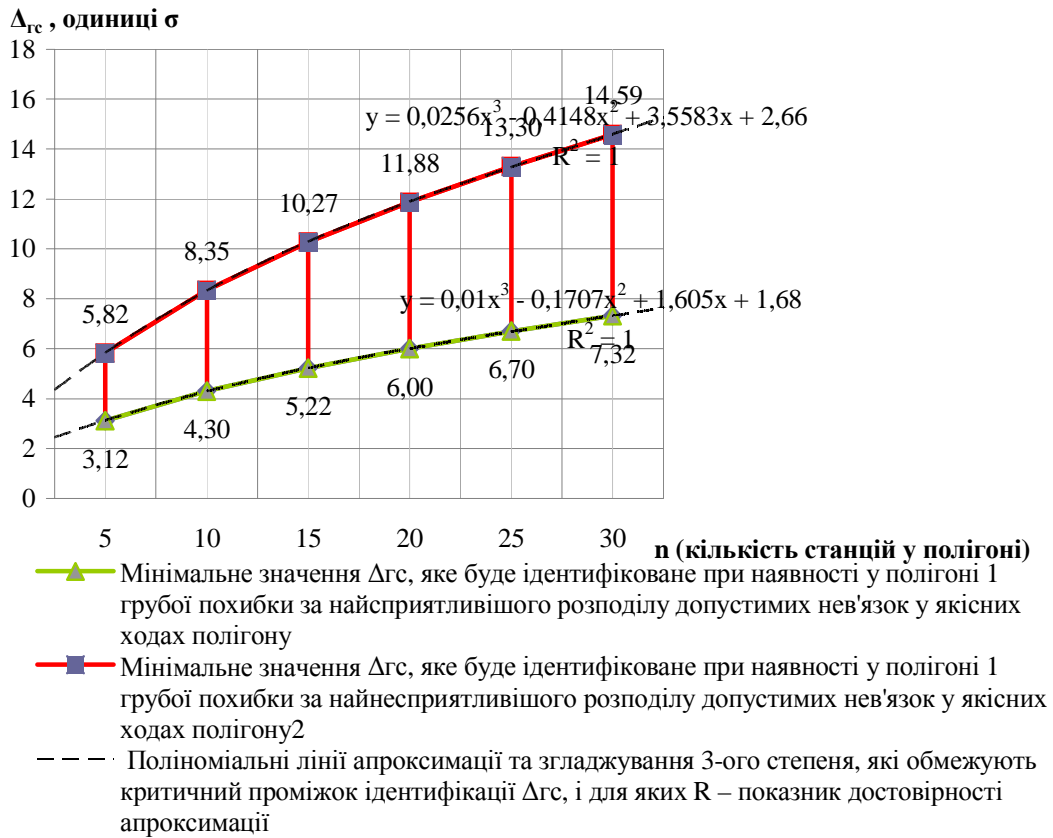


Рис. 1. Границі критичного проміжку ідентифікації $\Delta_{гс}$ для $m=1$

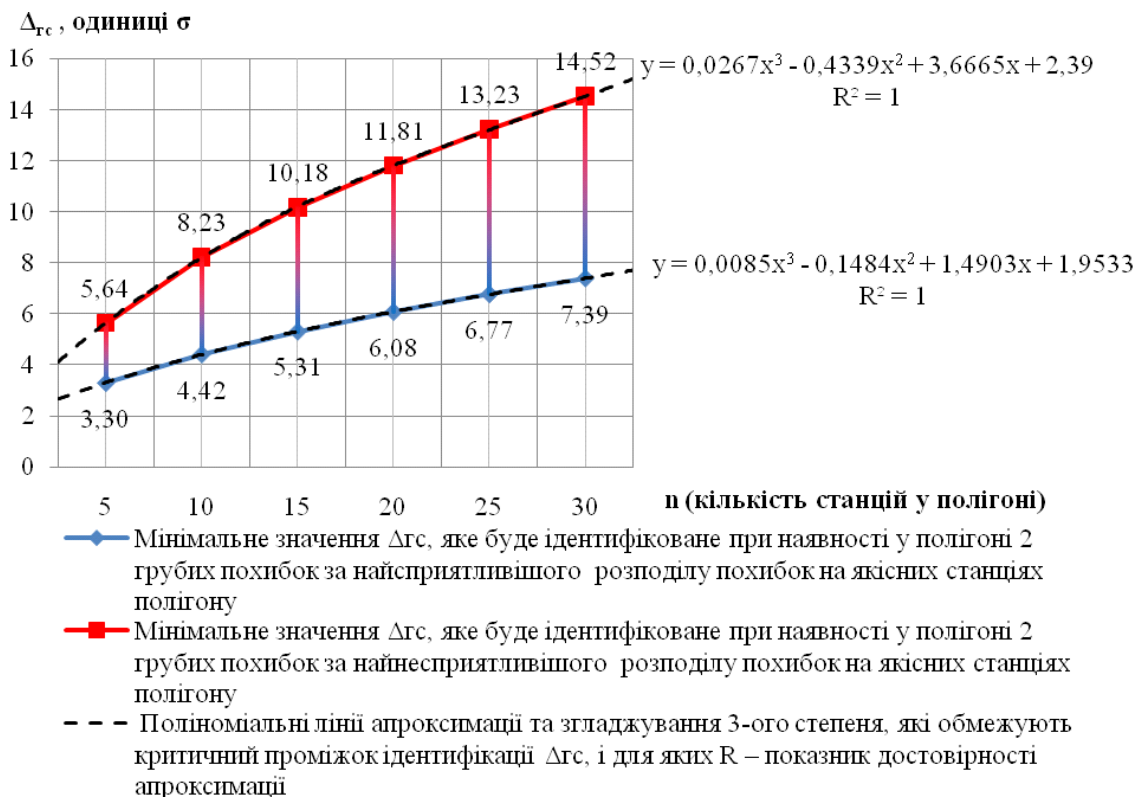


Рис. 2. Границі критичного проміжку ідентифікації $\Delta_{гс}$ для $m=2$

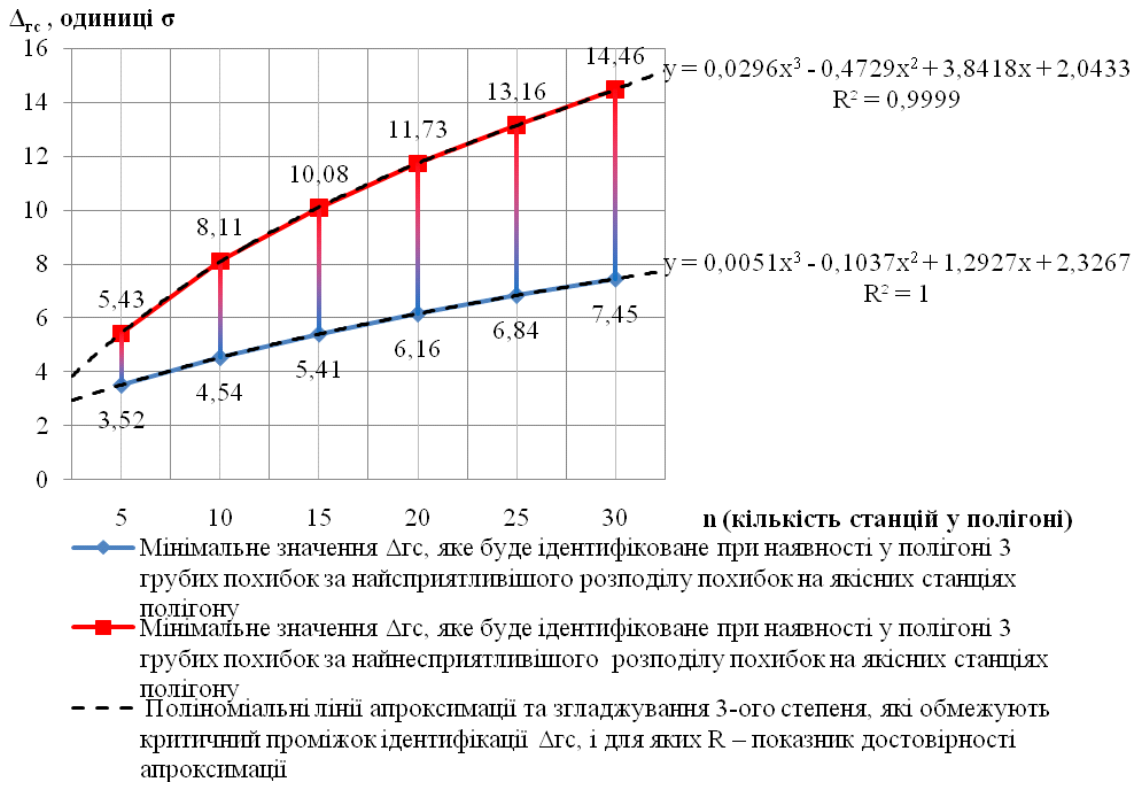


Рис. 3. Границі критичного проміжку ідентифікації Δ_{zc} для $m=3$

Для наочності наведемо результати аналізу критичних проміжків ідентифікації Δ_{zc} для I, II та III класів нівелювання, прийнявши такі самі вихідні умови, як і для розрахунків даних табл. 1. Аналіз виконаємо для випадку, коли тільки в одному ході полігона міститься груба похибка ($m = 1$). Допустимі значення похибок на станції (σ) для вищевказаних класів нівелювання прийняті згідно з [1]. Результати аналізу подано в табл. 2 та графічно зображені для I класу на рис. 4. Так, з рис. 4 видно, що у полігоні з 10 станцій за найсприятливішого розподілу похибок на якісних станціях можна ідентифікувати грубу похибку абсолютною величиною понад 0,7 мм (нормувальний множник $t = 2$). Для цього ж випадку за найгірших умов розподілу похибок у якісних вимірах полігона можна знайти промах, абсолютне значення якого перевищує 1,35 мм. З рис. 4 та табл. 1 видно, що межа ідентифікації грубих похибок за найсприятливіших умов для I класу майже у 2 рази менша, ніж за найнесприятливіших, на що вказує і аналіз виразу (24) для випадку існування промаху на одній станції полігона.

Таблиця 2

Критичні проміжки ідентифікації Δ_{zc} для I, II та III класів нівелювання у полігоні з n станцій

| Кількість станцій у полігоні n | Граничне значення Δ_{zc} , більше за яке буде ідентифіковане для кількості станцій n у полігоні для різних класів нівелірної мережі, мм | | | | | |
|--------------------------------|--|------|--------------------------|------|---------------------------|------|
| | I клас, $\sigma = 0,16$ | | II клас, $\sigma = 0,30$ | | III клас, $\sigma = 0,65$ | |
| | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| 5 | 0,50 | 0,93 | 0,94 | 1,75 | 2,03 | 3,78 |
| 10 | 0,69 | 1,34 | 1,29 | 2,50 | 2,80 | 5,43 |
| 15 | 0,84 | 1,64 | 1,57 | 3,08 | 3,39 | 6,68 |
| 20 | 0,96 | 1,90 | 1,80 | 3,57 | 3,90 | 7,72 |
| 25 | 1,07 | 2,13 | 2,01 | 3,99 | 4,35 | 8,65 |
| 30 | 1,17 | 2,33 | 2,20 | 4,38 | 4,76 | 9,48 |

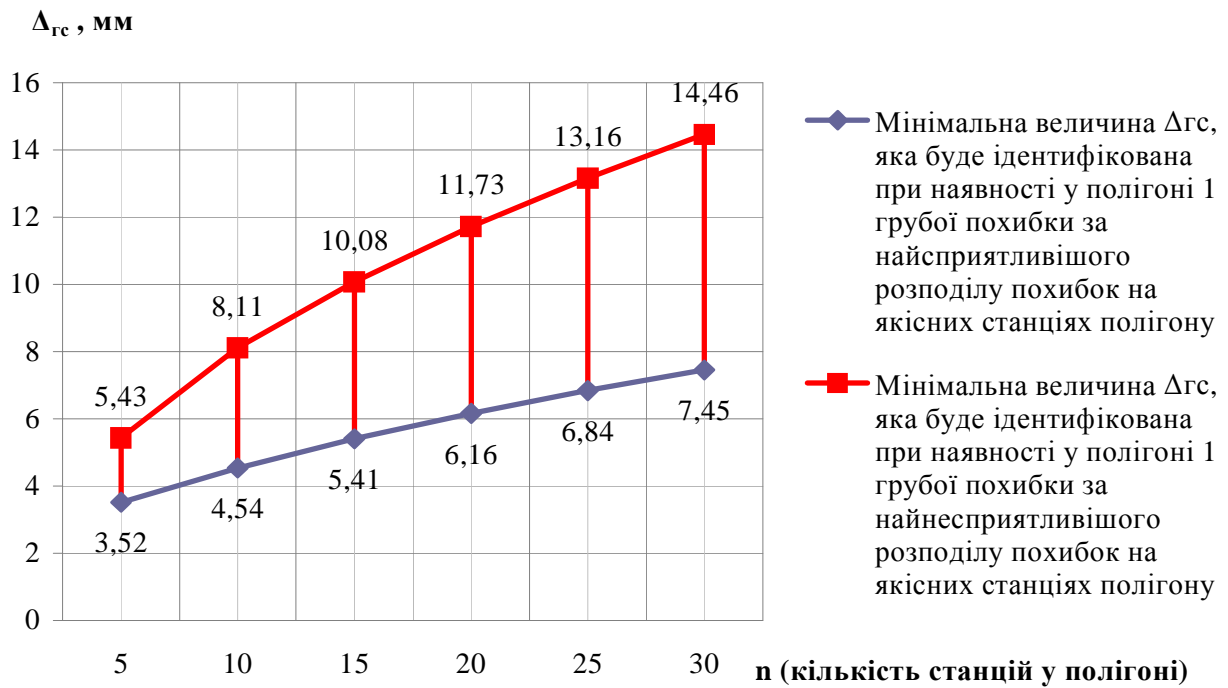


Рис. 4. Границі критичного проміжку ідентифікації Δ_{zc} для I класу нівелювання

Висновки. 1. Розв'язано задачу обґрунтування границь, в яких можуть бути ідентифіковані грубі похибки у висотній геодезичній мережі при їх пошуку за допомогою аналізу нев'язок у полігонах. Встановлено мінімальні значення грубих похибок, більші за які можна ідентифікувати залежно від кількості станцій n у полігоні нівелірної мережі та наявності t станцій з грубими похибками, побудовані графічні залежності.

2. Визначено критичні проміжки ідентифікації Δ_{zc} для I, II та III класів нівелювання залежно від кількості станцій у полігоні.

3. Отримані в роботі залежності дають змогу оптимізувати алгоритм пошуку грубих похибок за допомогою запропонованого в (7) рішення, вилучивши з аналізу полігони, що містять більшу від граничної кількість станцій.

1. Пискунов М.Е. Методика геодезических наблюдений за деформациями сооружений: Учебник. – М.: Недра, 1980. 2. Основы математического opracowania геодезических вимірювань / В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, П.М. Зазуляк, М.Д. Йосипчук / Під ред. Гавриша В.І. – Львів: Растр-7, 2007. 3. Маркузе Ю.И. Уравнивание геодезических сетей с контролем грубых ошибок // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1986. – № 5. – С. 9–18. 4. Инструкция по нивелированию I, II, III, IV классов. – М.: Недра, 1990. 5. Коугия В. А. Сравнение методов обнаружения и идентификации грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. – 1998. – № 6. – С. 23–28. 6. Кушко В.И., Мудров В.И. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976. – 192 с. 7. Бурак К. О., Гринішак М.Я. Побудова замкнутих полігонів у нівелірних мережах з використанням орієнтованого графа // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2010. – Вип. II (20) – С. 71–77. 8. Дьяков Б.Н., Федорова Н. В. Пошаговый поиск грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. – 2001. – № 3.