

ЗОВНІШНІ ГРАНИЦІ ВИДІЛЕНИХ ОБ'ЄКТІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Проведено аналіз проблем моделювання хвильових полів методом скінчених елементів в необмежених областях і методів їх подолання. Для оптимального вирішення пропонується використовувати нескінчені елементи по межі досліджуваної зони в комплексі зі стандартним скінчено-елементним моделюванням самої зони досліджень. Важливим при цьому є вибір функцій форми для нескінчених елементів у залежності від умов затухання хвиль на нескінченості.

Ключові слова: метод скінчених елементів, нескінчені елементи, півпростір, хвильові поля.

Метод скінчених елементів (МСЕ) – один із загально визнаних числових методів для вирішення багатьох інженерних та наукових проблем. Він дає можливість моделювати напружено-деформований стан складних середовищ з врахуванням їх нелінійних властивостей, досліджувати поширення хвильових полів в неоднорідних областях, не змінюючи для цього основні програмні модулі. Однак, при дослідженні поширення хвиль в земній корі перед нами постає завдання моделювати хвилі, які прийшли з віддалених джерел – тобто задача на півпросторі. Проте, за означенням, ми маємо скінчені елементи і моделюємо скінчену область.

Таке завдання можна вирішити декількома способами. З одного боку, можна провести моделювання для значно більшої, ніж нас цікавить, області, розширивши межі на досить велику віддал від досліджуваного об'єкта. При моделюванні напружено-деформованого стану такий підхід може бути прийнятним. Хоча при цьому буде використовуватися значно більший ресурс обчислювальної техніки, особливо при моделюванні тривимірних областей. До того ж виникає питання: наскільки більшу область необхідно моделювати, адже при недостатньо великому розширенні досліджуваної області будуть виникати неочікувані результати. З другого боку, можна на границях задавати умови, які б компенсували вплив "зовнішнього" середовища, обчисливши його аналітично, що не завжди є можливим при складності будови досліджуваних середовищ.

Однак, при моделюванні хвильових полів ми маємо границі досліджуваної області і, які б граничні і початкові умови ми не задавали, отримуємо відбиті і розсіяні нею хвилі, що спотворює одержаний результат. Деякі дослідники розміщують по краях досліджуваної області декілька шарів з відповідними коефіцієнтами поглинання, моделюючи затухання хвиль на границях області. Але тоді ми отримуємо додатково змінену структуру досліджуваного середовища і, відповідно, спотворення отриманого результату.

Один з підходів для вирішення цих проблем запропоновано Bettess P. [Bettess, 1992] та Zienkiewicz O.C. [Zienkiewicz, Taylor, 2000]. Автори

пропонують використовувати поряд із скінченими елементами, нескінчені, тобто досліджувана область по границі доповнюється елементами з границею на нескінченості.

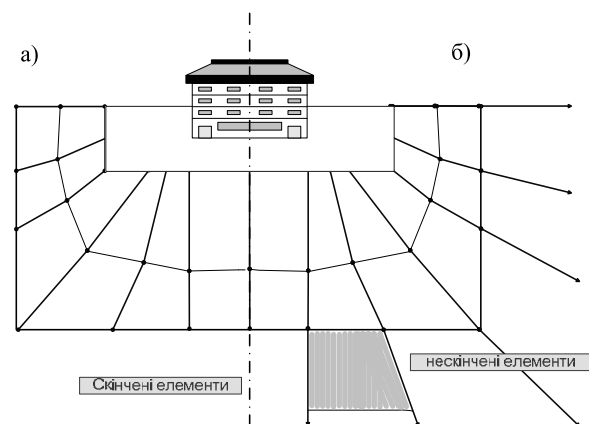


Рис. 1. Розбиття на а) скінчені елементи; б) з використанням нескінчених елементів

Так на рис.1. схематично показано, як для моделювання досліджуваного об'єкта проводилося розбиття на стандартні скінчені елементи (а) і додавалися елементи з границями на нескінченості (б). У такому випадку є можливість задавати граничні умови на віддаленій до нескінченості границі. Для використання цих елементів не обійшло відповідним чином задати перетворення нескінчених елементів в скінчені. Так, для прикладу, можна записати відображення, подане Zienkiewicz O.C. [Zienkiewicz, Taylor, 2000] (рис.2.).

В одномірному випадку – це відображення вздовж лінії, що збігається з CPQ (рис.2.) в напрямку осі Ox. Розглянемо наступну функцію:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi}x_c + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_Q = \bar{N}_c x_c + \bar{N}_Q x_Q \quad (1)$$

Слід зазначити, що

$$\xi = -1 \text{ відповідає } x = \frac{x_Q + x_c}{2} \equiv x_p$$

$$\xi = 0 \text{ відповідає } x = x_Q$$

$$\xi = 1 \text{ відповідає } x = \infty,$$

де x_p точка посередині між Q і C.

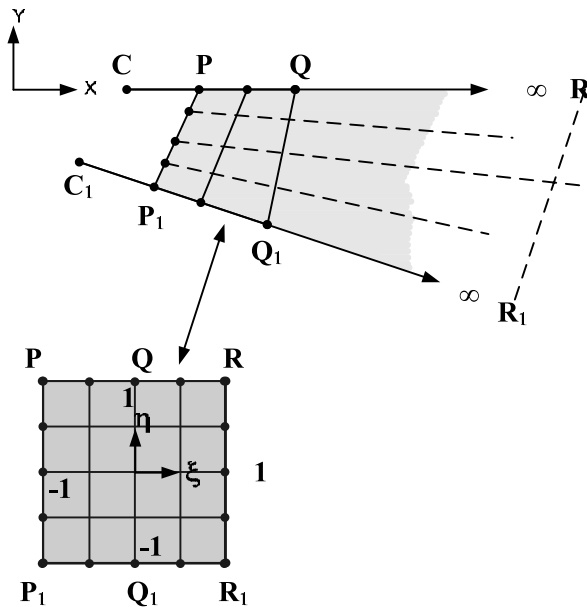


Рис. 2. Відображення нескінченного 2-го мірного елемента в скінченний.

Альтернативно вказане відображення може бути записане в координатах точок Q і P простою підстановкою x_C . Використовуючи попередні позначення, отримаємо:

$$x = N_Q x_Q + N_P x_P = \left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi}\right) x_Q - \frac{2\xi}{1-\xi} x_P \quad (2)$$

Обидві форми дають відображення, яке не залежить від x координат

$$N_Q + N_P = 1 = \bar{N}_C + \bar{N}_Q \quad (3)$$

Розміщення точки C має велике значення: від її координати відлічується r:

$$r = x - x_C \quad (4)$$

Якщо невідомі функції апроксимувати поліномом:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots, \quad (5)$$

То із рівняння (1) можна визначити:

$$\xi = 1 - \frac{x_Q - x_C}{x - x_C} = 1 - \frac{x_Q - x_C}{r} \quad (6)$$

Із вигляду (2) бачимо, що при апроксимації (4) залежно від ступеня полінома загасання на нескінченності ($r \rightarrow \infty$) відбуватиметься обернено

пропорційно ξ . Відповідно, можна провести узагальнення на дво- і тривимірні випадки.

Givoli D. [Givoli D. 1992.], Geers T.L. [Geers T.L. 1998] та Astley A.J. [Astley A.J. 1999] додатково запропонували удосконалення такого перетворення з врахуванням особливостей певних задач поширення хвиль.

При моделюванні виникає додатково не обхідність, провівши розбиття досліджуваної області, доповнити дискретизацію по границі нескінченими елементами і, відповідно провести оптицізацію нумерації вузлів розбиття. Таким чином, ми матимемо повну дискретизацію на півпросторі і зможемо уникнути накладання відбиття хвиль від країв досліджуваного регіону. В решті програмного комплексу нема необхідності вносити зміни.

В результаті аналізу методів подолання проблем, викликаних існуванням границь досліджуваної області при моделюванні хвильових полів зроблено висновок про оптимальність використання нескінчених елементів по межі досліджуваної зони в комплексі зі стандартним скінченно-елементним моделюванням самої зони досліджень.

Важливим при цьому є питання вибору функцій форми для нескінчених елементів. Бажано щоб вони відповідали за формою умовам затухання хвиль на нескінченності.

Література

- Bettess P. Infinite Elements. Penshaw Press, 1992. – P. 265.
- Bettess, J. A. and Bettess, P., A new mapped infinite wave element for general wave diffraction problems and its validation on the ellipse diffraction problem, Cornput. Method Appl. – M., 164. – 1998. – P. 17-48.
- Givoli D. Numerical Methods for Problems in infinite Domains, Elsevier, amsterdam, 1992.
- Geers T.L. Computational Methods for Unbounded Domains, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- Astley A.J. Infinite Elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy. Int. J. Num. Meth. Eng., to appear, 1999.
- Gerdes R. Infinite Elements for wave problems. J.Comput. Acoustics, 8. – 2000. – P.43-62.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. – V 1-3. – 2000.

ВНЕШНИЕ ГРАНИЦЫ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Т.Б. Брыч, Б.Е. Куплёвский

Проведен анализ проблем моделирования волновых полей методом конечных элементов в бесконечных областях и методов их преодоления. Для оптимального решения предлагается использовать бесконечные элементы на границе исследуемой зоны в комплексе со стандартным конечно-элементным моделированием самой зоны. Важным при этом является выбор функций формы для бесконечных элементов в зависимости от условий затухания волн на бесконечности.

Ключевые слова: метод конечных элементов, бесконечные элементы, полупространство, волновые поля.

**EXTERIOR BOUNDARIES OF THE OBJECTS IN MODELING
WITH FINITE ELEMENT METHOD**

T.B. Brych, B.Y. Kuplyovsky

The problems of wave field modeling with finite element method in unbounded domains and methods to deal with them are analyzed. To obtain optimal solution, using of infinite elements is proposed on the boundaries of the modeled area combined with standard finite-element modeling inside the area. It is important however to choose the shape functions of infinite elements depended on the conditions of wave decay at infinity.

Keywords: finite element method, infinite elements, half-space, wave field.

*Відділ сейсмічності Карпатського регіону
Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Львів, Україна*

Надійшла 31.07.2013