

1993. – 216 с. 6. Гурський В. М. Розроблення уніфікованого модуля вібраційних машин з напрямленими коливаннями робочого органа // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: укр. міжвід. наук.-техн. зб. – Львів: Нац. ун-т “Львівська політехніка”, 2012. – Вип. 46. – С. 13–19. 7. Ловейкін В.С. Аналітичні розв’язки рівнянь динамічно нелінійних вібросистем за наявності сухого тертя / В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, В.В. Ярошенко // Вібрації в техніці та технологіях: журнал. – 2009. – № 4 (56). – С. 30–38. 8. Гурський В. М. Аналіз електромеханічних характеристик резонансних вібраційних систем / В. М. Гурський, Я. В. Шпак // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: укр. міжвід. наук.-техн. зб. – Львів: Нац. ун-т “Львівська політехніка”, 2011. – Вип. 45. – С. 192–198. 9. Кузьо І.В. Реалізація нелінійних полічастотних резонансних вібраційних машин з використанням одноконтурних електромагнітів / І.В. Кузьо, В.М. Гурський, О.С. Ланець // Вібрації в техніці та технологіях: журнал – 2012. – № 1 (65). – С. 10-14. 10. Вибрации в технике: справочник. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. – 1979. – 351 с.

УДК 621.01

О.В. Ланець, Я.В. Шпак, В.І. Лозинський*, П.Ю. Леонович
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра механіки та автоматизації машинобудування,
*кафедра електронних засобів інформаційно-комп’ютерних технологій

РЕАЛІЗАЦІЯ ЕФЕКТУ ЗОММЕРФЕЛЬДА У ВІБРАЦІЙНОМУ МАЙДАНЧИКУ З ІНЕРЦІЙНИМ ПРИВОДОМ

© Ланець О.В., Шпак Я.В., Лозинський В.І., Леонович П.Ю., 2013

Розроблено та змодельовано вібраційний майданчик, резонансні режими в якому ґрунтуються на ефекті Зоммерфельда. Наведено аналітичні залежності для встановлення інерційно-жорсткісних та силових параметрів коливальної системи, що забезпечують робочі білярезонансні режими роботи вібраційної машини з інерційним збуренням. Складено математичну модель такої машини та проаналізовано рух її коливальних мас та маси дебалансу в перехідних та усталених режимах роботи. Теоретичні результати експериментально підтверджено.

The article works out and models the vibrating ground the resonant modes in which are based on Sommerfeld effect. It also shows the analytical dependence for calculation of inertial, inflexible and power parameters of oscillating systems which provide the working near-resonant modes of the vibrating machine functioning by inertial perturbation. The mathematical model of such machine is made and motion of its oscillating anddebalance masses in transitional and fixed work regimes is analysed. The theoretical results are experimentally confirmed.

Вступ. Сьогодні у світі стрімко розвиваються двомасові вібраційні машини з дебалансними віброзбудувачами, режим роботи яких дорезонансний відносно власної частоти коливань системи (рис. 1). Такий підхід суттєво знижує споживану потужність приводу, що викликано передусім наявністю в білярезонансних режимах роботи високих коефіцієнтів динамічності системи. В таких режимах амплітуди коливань мас істотно зростають залежно від резонансного налагодження механічної коливальної системи.

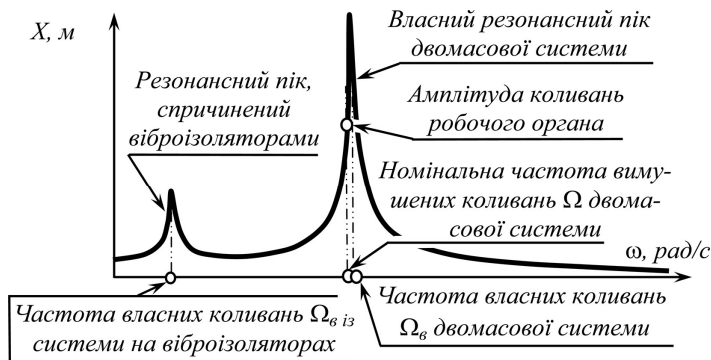


Рис. 1. АЧХ двомасової вібраційної машини, що візуалізує зростання амплітуди коливань робочої маси при використанні близького дорезонансного режиму роботи

Аналіз останніх досліджень та постановка проблеми. В наявних резонансних вібраційних машинах з інерційним приводом [1, 2] (рис. 2) для стабілізації частоти обертання дебаланса в околі резонансного піка використовують дорогі системи керування (рис. 2, в). Проте електронні пристрої для регулювання обертів електродвигуна значно здорожчують вібраційне технологічне обладнання. Зі зростанням потужностей установок непропорційно зростає вартість систем керування.

Формування ідеї. Пропонується синтез резонансного вібраційного технологічного обладнання з інерційним приводом здійснювати на базі електродвигунів постійного струму, взявши частоту вимушених коливань системи дещо нижчою за номінальну частоту обертання ротора електродвигуна. У такому випадку з наближенням кутової швидкості ротора електродвигуна до резонансного піка системи обертати дебаланса “зависатимуть” в околі резонансу завдяки процесам, пов’язаним з явищем Зоммерфельда. Це дасть змогу “зафіксувати” частоту вимушених коливань з близьким дорезонансним налагодженням, реалізуючи в коливальній системі вібраційної машини енергоощадні режими роботи. Для цього необхідно виконати умову, щоб вібраційний момент та момент в’язкого опору руху дебаланса на валу віброзбуджувача були вищими за збурювальний [3, 4]. Тоді незбалансований ротор, не маючи необхідної потужності для переходу через резонансний пік, “зависне” на певній частоті обертання у близькому дорезонансному режимі. Частота “зависання” обертів дебаланса і буде для вібраційної машини вимушеною. Електродвигун постійного струму за таких умов не повинен вийти з ладу.

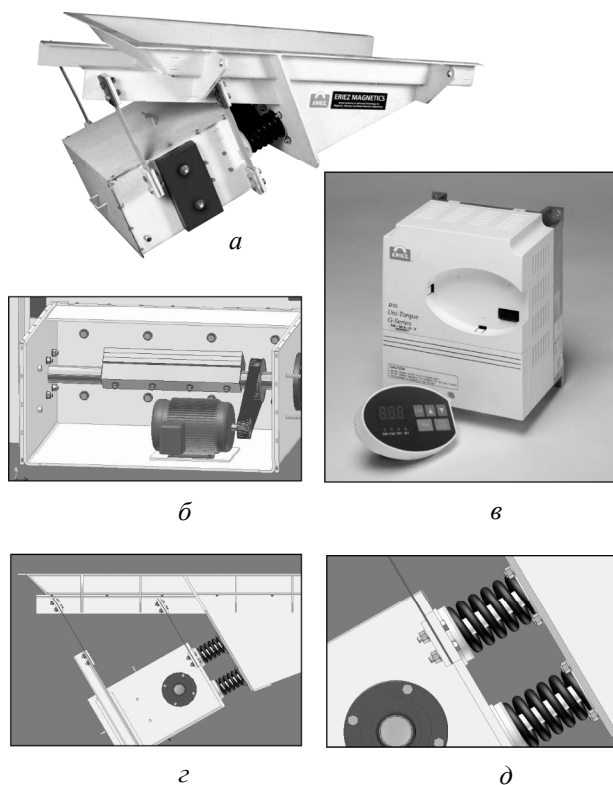


Рис. 2. Вібраційний резонансний живильник з інерційним приводом фірми Eriez Magnetics, Inc. (США): а – загальний вигляд; б – вузол приводу дебалансного віброзбуджувача; в – система керування; г, д – вигляд вузлових з’єднань у віброживильнику

Опис моделі двомасового вібромайданчика. Двомасова вібромашина з інерційним приводом (рис. 3), в якій реалізуються прямолінійні коливання вздовж осі x за незалежними координатами x_1 і x_2 , містить масу m_2 та масу m_1 , утворену з робочого органа m_{po} та умовно приєднаної частини $k_{np} m_{зав}$ маси середовища завантаження. Маса дебаланса m_d входить в масу m_2 . Коливальні маси з'єднані між собою пружною системою жорсткістю c_{12} . Вібраційну машину встановлено на нерухому основу через віброізолятори жорсткістю c_{i3} , що кріпляться до маси m_2 .

Силове збурення вимушених коливань у системі відбувається за рахунок примусового обертання з кутовою частотою ω дебаланса масою m_d , розташованого на радіусі r відносно власної осі симетрії ротора. Відцентрова сила $F_{in} = m_d r \omega^2$, що виникає, є причиною знакозмінного силового збурення $F_{in}^x = m_d r \omega^2 \sin \omega t$ маси m_2 вздовж осі x , а як наслідок – її коливальних рухів в цьому напрямку. Передбачається, що конструкція вібромашини виключатиме паразитні кутові коливання мас і вздовж осі y коливання будуть мізерно малими ($c_{12 \text{ вздовж } y} \gg c_{12 \text{ вздовж } x}$), а тому цими рухами нехтуємо. Маса m_1 приводиться в рух завдяки кінематичному збуренню від маси m_2 .

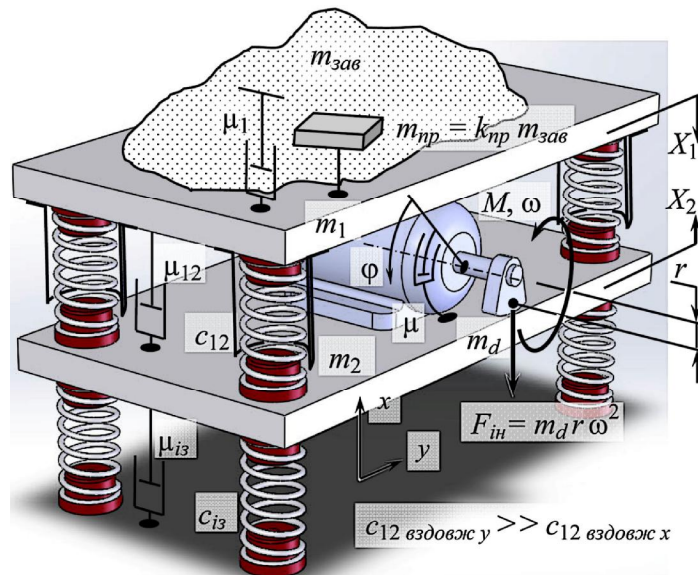


Рис. 3. Принципова схема двомасового вібраційного майданчика на базі інерційного віброзбудника

У динамічну модель у вигляді демпферів вводяться коефіцієнти в'язкого тертя, які пропорційні до швидкості. Коефіцієнт μ_1 відображає зовнішній в'язкий опір руху маси m_1 , викликаний впливом маси завантаження $m_{зав}$. Коефіцієнт μ_{12} описує розсіювання енергії у резонансній пружній системі жорсткістю c_{12} ; μ_{i3} – в'язке тертя у віброізоляційних пружних елементах жорсткістю c_{i3} ; μ – відображає в'язке тертя під час обертання за координатою ϕ ротора двигуна з жорстко закріпленим до нього дебалансом.

Синтез інерційно-жорсткісних та силових параметрів вібромайданчика. Система диференціальних рівнянь для двомасової структури, якщо прийняти, що рух дебаланса наперед задано, закон зміни жорсткості в пружних елементах відповідає закону Гука, а механічна коливальна система розглядається як така, що складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних пружними системами строго визначеної жорсткості, має вигляд відомого запису лінійної системи:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + m_1 \dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{12}(x_2 - x_1) + c_{i3}x_2 + m_2 \dot{x}_2 + m_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_d r w^2 \sin w t. \end{cases} \quad (1)$$

В систему (1) час входить у явному вигляді, хоч це не відповідає реальній моделі. Проте цей підхід дає змогу використати систему як основу для синтезу параметрів механічної коливальної системи. Користуючись загальними методами розв'язання системи диференціальних рівнянь, аналітичні вирази руху мас за двома незалежними степенями вільності шукаємо у вигляді:

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t} \text{ та } x_2 = X_2 e^{i\omega t},$$

де X_1, X_2 – амплітудні значення лінійних вимушених коливань відповідно за незалежними координатами x_1 та x_2 . Підставляючи ці вирази в (1) і скоротивши в кожній частині системи рівнянь член $e^{i\omega t}$, можна отримати залежності для встановлення значень X_1 та X_2 . У матричному поданні за амплітудами коливань мас цей запис матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \left(c_{12} - m_1 \omega^2 + i(m_1 + m_2)\omega \right) & -c_{12} - i m_2 \omega \\ -c_{12} - i m_2 \omega & \left(c_{12} + c_{i3} - m_2 \omega^2 + i(m_3 + m_2)\omega \right) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Позначивши: $k_{11}(\omega) = c_{12} - m_1 \omega^2 + i(m_1 + m_2)\omega$;

$k_{12}(\omega) = k_{21}(\omega) = -c_{12} - i m_2 \omega$;

$k_{22}(\omega) = c_{12} + c_{i3} - m_2 \omega^2 + i(m_3 + m_2)\omega$,

розв'язок системи (1) у вигляді виразів для амплітуд коливань X_1 та X_2 відповідно мас m_1 та m_2 в усталених режимах зведуться до таких залежностей:

$$X_1(\omega) = \frac{F_{in} \cdot k_{12}(\omega)}{\Delta}; \quad X_2(\omega) = \frac{-F_{in} \cdot k_{11}(\omega)}{\Delta}, \quad (3)$$

де

$$\Delta = k_{12}(\omega)k_{21}(\omega) - k_{11}(\omega)k_{22}(\omega), \quad (4)$$

– детермінант матриці коефіцієнтів при невідомих у системі рівнянь (2). Формуючи характеристичне рівняння механічної коливальної системи, прирівнявши (4) до нуля, знехтувавши коефіцієнтами в'язкого опору та жорсткістю віброізоляторів, знаходимо значення жорсткості c_{12} через єдину власну частоту $\Omega_g = \Omega/z$ коливань системи. Вираз набуває відомого вигляду:

$$c_{12} = m_{3g} (\Omega/z)^2, \quad (5)$$

де $m_{3g} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – зведена маса; z – резонансне налагодження системи; Ω – кутова частота вимушених коливань.

Зазначимо, що під час встановлення інерційних та жорсткісних параметрів системи знехтувано коефіцієнтами в'язкого тертя, щоб уникнути комплексних значень. Жорсткістю віброізоляторів також знехтувано, оскільки на перерозподіл параметрів у коливальній системі вони істотно не впливають. Для цього необхідно, щоб виконувалась умова: частота власних коливань вібраційної машини як умовно твердого тіла на м'яких пружних елементах повинна бути в 3К4 рази нижчою за вимушену. Проте врахування дисипативних сил та жорсткості віброізоляторів є обов'язковим під час моделювання роботи вібраційної машини.

Хоч неврахування дисипативних сил та жорсткостей віброізоляторів під час визначення інерційно-жорсткісних параметрів вносить похибку в модель системи, результати отримуються з достатньою для інженерних розрахунків точністю, а кінцеві аналітичні залежності формуються математично просто та однозначно.

Встановимо таке інерційне значення незрівноваженої маси дебаланса m_d , за якого система на заданій частоті вимушених коливань Ω розвивала б необхідне значення амплітуди коливань

робочого органа. Приймаючи, що незбалансований ротор вийшов на номінальну частоту обертання в дорезонансному режимі відносно власного піка системи, оперуючи наперед заданою (технологічно необхідною) амплітудою коливань X_1 маси m_1 (робочого органа) та враховуючи, що амплітудне значення інерційного збудовального зусилля визначається як $F_{in} = m_d r \Omega^2$, вираз для встановлення інерційного значення незрівноваженої маси дебаланса m_d одержимо з першого рівняння виразів (3):

$$m_d = \left| \frac{X_1}{r \Omega^2 c_{12}} [w^4 m_1 m_2 - w^2 (c_{12} (m_1 + m_2) + c_{i3} m_1) + c_{12} c_{i3}] \right|. \quad (6)$$

Вираз (6) взято за модулем, оскільки амплітуда коливань X_1 може набувати від'ємного значення.

Попередній підбір інерційно-жорсткісних та конструктивних параметрів вібромайданчика. Установка проектується лише для підтвердження закладеної ідеї та використовувати на виробництві її не передбачається, а тому вирішено вібромашину виготовляти малогабаритною. Приймаємо, що робочий орган становить лише $m_1 = 0.22$ кг, а реактивна маса – $m_2 = 0.9$ кг. Якщо резонансне налагодження вібраційного майданчика $z = 0.98$, а частота вимушених коливань $\Omega = 628.3$ рад/с (100 Гц), необхідна жорсткість резонансної пружної системи згідно з (5):

$$c_{12} = \left(\frac{0.22 \cdot 0.9}{0.22 + 0.9} \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot p \cdot 100}{0.98} \right)^2 = 7.27 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Геометричні параметри пружної системи встановлюємо так. Вибираємо матеріал пружних елементів – склотекстоліт. Товщина b плоскої пружини за конструктивно вибраних довжини $l_c = 29$ мм та ширини $h = 16$ мм пружного елемента та кількості $i = 8$ пружних пар встановлюється за відомим виразом $b = l_c \sqrt[3]{\frac{c_{12}}{E h i k}}$, де: $E = 1.9 \cdot 10^{10}$ Па – модуль пружності першого роду для склотекстоліту;

k – коефіцієнт защемлення, що враховує неідеальну затяжку гвинтами, пов'язану як з податливістю самих гвинтів, так і наявністю мікролюфтів у з'єднанні. Все це знижує коефіцієнт жорсткості пружної системи. Тому на практиці необхідно дещо збільшити її жорсткість відносно розрахункового значення. Приймаючи коефіцієнт защемлення $k = 0.7$ та користуючись вищезгаданими параметрами, товщину пружного елемента згідно з вищенаведеною формулою визначимо $b = 1$ мм.

Конструктивно задавши радіус розташування центра мас дебаланса відносно осі його обертання ($r = 3$ мм), згідно з (6) встановлюємо інерційне значення маси дебаланса ($m_d = 3$ з).

Вибір електродвигуна. Перш ніж вибрати тип та потужність електродвигуна, задамо необхідну амплітуду коливань робочого органа. Нехай $X_1 = 0.2$ мм – еквівалент восьми перевантаженням, адже у такому випадку воно становитиме $x = \frac{X_1 \Omega^2}{g} = \frac{0.0002 \cdot 628^2}{9.81} = 8$. Цього параметра на практиці достатньо, щоб забезпечувати ефективне оброблення середовища.

Попередньо потужність електродвигуна можна встановити так. Визначимо необхідну потужність $N_{зб}$ на збудовання одномасової коливальної системи:

$$N_{зб} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cdot \mathfrak{K}(t) dt, \quad (7)$$

де $P(t)$ – закон зміни збудовального зусилля; $\mathfrak{K}(t)$ – закон зміни швидкості руху коливальної маси; T – період, на якому відбувається інтегрування. Відомо, що закон зміни збудовального зусилля через коефіцієнт динамічності має вигляд:

$$P(t) = \frac{X c}{I} \sin(\omega t) = \frac{m X \omega^2}{I} \sin(\omega t), \quad (8)$$

де X – амплітуда коливань маси m ; c – жорсткість пружної системи; I – коефіцієнт динамічності механічної коливальної системи. Оскільки рух маси m зміщений за фазою e відносно збудовального зусилля, закон зміни швидкості руху коливальної маси визначатиметься так:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} X \sin(\omega t - e) = \omega X \cos(\omega t - e). \quad (9)$$

Інтегруючи вираз (7) на періоді $T = \frac{2\pi}{\omega}$, враховуючи (8), (9) та розглядаючи випадок при зсуві фаз $e = \frac{\pi}{2}$ (саме коли споживана потужність набуває максимального значення), вираз для $N_{зб}$ запишемо у вигляді:

$$N_{зб} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{m X \omega^2}{I} \sin(\omega t) \omega X \cos(\omega t - e) dt = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{X^2 \omega^3 m}{I}. \quad (10)$$

До речі, якщо зсув фаз $e = \frac{\pi}{4}$: $N_{зб} = \frac{X^2 \omega^3 m}{2 I}$. Коли дисипація відсутня, хоч на практиці в принципі такого не спостерігається: $N_{зб} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{X^2 \omega^3 m}{I}$. Поширюючи отриманий результат (10) згідно з принципом суперпозицій на n -масову структуру коливальної системи, фіксуючи певну встановлену частоту вимушених коливань (перепозначивши $\omega = \Omega$) та вводячи ККД вібраційного приводу:

$$N_{зб} = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\Omega^3}{h} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2 m_i}{I_i}, \quad (11)$$

де X_i , I_i – амплітуда коливань та коефіцієнт динамічності маси m_i ; h – ККД вібраційного приводу. Враховуючи, що робочий орган масою $m_1 = 0.22 \text{ кг}$ повинен коливатись з амплітудою $X_1 = 0.2 \text{ мм}$, використовуючи співвідношення $X_1/X_2 = m_2/m_1$, встановлюємо, що амплітуда коливань реактивної маси ($m_2 = 0.9 \text{ кг}$) буде $X_1 = 0.05 \text{ мм}$.

Коефіцієнти динамічності мас m_1 та m_2 визначаються із залежностей:

$$I_1(\Omega) = \frac{x_1 m_2 \Omega^2}{F_{in}}; \quad I_2(\Omega) = \frac{x_2 m_2 \Omega^2}{F_{in}}. \quad (12)$$

У нашому випадку, якщо використати перший та другий вираз з (3), залежності (12) набудуть вигляду:

$$I_1(\Omega) = \left| \frac{m_1 \Omega^2 k_{12}(\Omega)}{k_{12}(\Omega) k_{21}(\Omega) - k_{11}(\Omega) k_{22}(\Omega)} \right|;$$

$$I_2(\Omega) = \left| \frac{m_2 \Omega^2 k_{11}(\Omega)}{k_{12}(\Omega) k_{21}(\Omega) - k_{11}(\Omega) k_{22}(\Omega)} \right|. \quad (13)$$

Коефіцієнт в'язкості m_{12} розраховано з умови, що коефіцієнт внутрішнього частотно-незалежного тертя $c_{12} = 0.02 \text{ м}^3 \text{ с}$, а тому $m_{12} = \frac{c_{12} c_{12}}{\Omega} = 2.3 \frac{H \cdot c}{m}$. Решту коефіцієнтів в'язкості взято конструктивно: $m_{12} = 2.5 \frac{H \cdot c}{m}$, $m_{13} = 10 \frac{H \cdot c}{m}$.

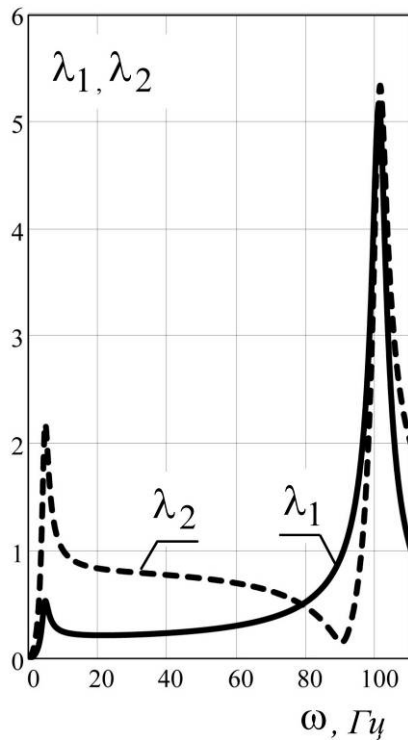


Рис. 4. Залежність коефіцієнтів динамічності мас m_1 та m_2 від частоти вимушених коливань ω

Графічно відтворюючи залежності із (13) (рис. 4), бачимо, що на частоті вимушених коливань $\Omega = 628.3 \text{ рад/с}$ (100 Гц) значення коефіцієнта динамічності маси m_1 у білярезонансній зоні практично ідентичне масі m_2 і становить $I_2 \approx 4$. Підставляючи дані в (11), отримаємо:

$$N_{зб} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{628^3}{0.8} \left(\frac{0.0002^2 \cdot 0.22}{4} + \frac{0.00005^2 \cdot 0.9}{4} \right) = 0.46 \text{ Вт}.$$

Як привод вибрано малопотужний двигун постійного струму марки QX-RF-130-2860 (виробник QX Motor со., Ltd, Гонконг), зображення та характеристики якого наведено на рис.5, рис. 6 та в табл. 1.

Для такого електродвигуна момент збурення M є функцією швидкості обертання $j\&$ дебалансу (рис. 7), який можна записати у вигляді лінійної залежності:

$$M(j\&) = M_0 - a j\&, \tag{14}$$

справедливої для двигуна постійного струму, де M_0 – значення моменту збурення M за нерухомого дебалансу (коли $j\&=0$); $a = \text{tg } b$; b – кут нахилу лінійної залежності $M(j\&)$ відносно осі абсцис.

Встановимо аналітично частотно-силову характеристику (14) електродвигуна (рис. 5). Користуючись даними табл. 1, а саме тим, що при пуску електродвигуна ($j\&=0$) момент на роторі становить $M_0 = 0.0043 \text{ Н} \cdot \text{м}$, а при кутовій швидкості $j\&= 796 \text{ рад/с}$ ($n = 7600 \text{ об/хв}$) він зменшується до $M = 0.00075 \text{ Н} \cdot \text{м}$, можна записати таку залежність: $M(j\&) = M_0 - a j\& = 0.0043 - 5.6 \cdot 10^{-6} j\&$. На частоті ж вимушених коливань $\Omega = 628.3 \text{ рад/с}$ момент збурення становитиме $M_\Omega = 0.0007 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

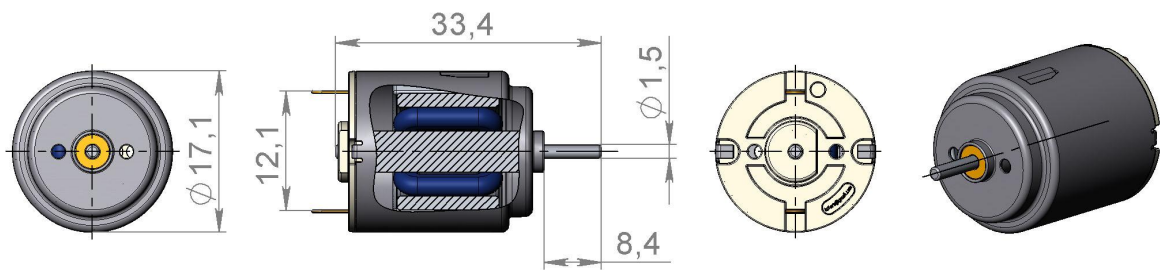


Рис. 5. Загальний вигляд та основні розміри двигуна постійного струму марки QX-RF-130-2860

Таблиця 1

Технічні характеристики двигуна QX-RF-130-2860, надані виробником

Model	Voltage		Free load		At Max. Efficiency				Stall Torque (g.cm)
	Operating range	Norminal Voltage (V)	Speed (r.p.m.)	Current (A)	Speed (r.p.m.)	Current (A)	Torque (g.cm)	Output (W)	
QX-RF-130-2860	1.0~1.5	1.5	9200	0.14	7600	0.67	7.5	0.58	43

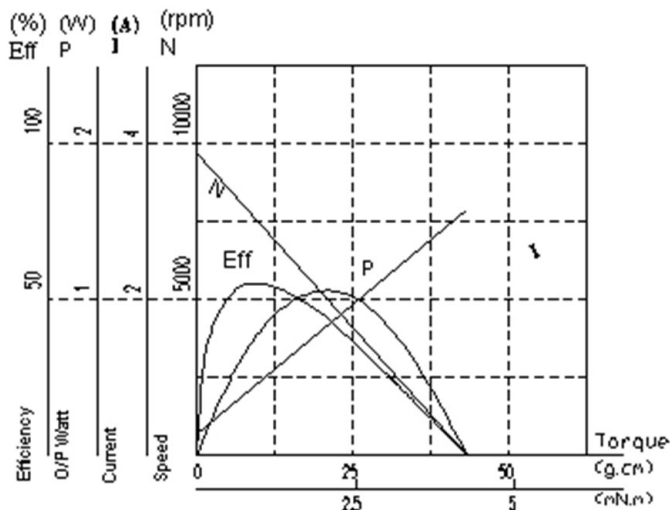


Рис. 6. Характеристики двигуна QX-RF-130-2860 в графічному вигляді, надані виробником

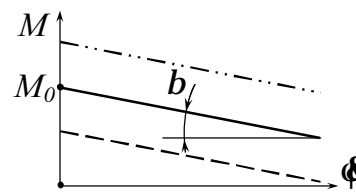


Рис. 7. Характеристика моменту збурення M залежно від її швидкості обертання phi

Як зазначено вище, оберти дебаланса “зависатимуть” в околі резонансного піка, коли виконуватиметься умова: вібраційний момент та момент в’язкого опору руху дебаланса на валу вібробуджувача вищий за збурювальний $M_{\Omega} = 0.0007 \text{ H} \cdot \text{м}$.

Справді, рівняння балансу руху незрівноваженої маси m_d матиме вигляд:

$$J \ddot{\phi} = M(\omega) - R(\omega) + V(\omega), \tag{15}$$

де $M(\omega)$ – момент збурення; $R(\omega)$ – момент опору обертання; $V(\omega)$ – вібраційний момент. Момент опору вважатимемо пропорційним до швидкості обертання дебаланса, а тому:

$$R(\omega) = m \dot{\phi}, \tag{16}$$

Вібраційний момент $V(\omega)$ згідно з [3] має аналітичний запис:

$$V(\omega) = -\frac{1}{2} m_d r \omega^2 \frac{m_d r}{m_2} I_2 \left[\sin \frac{m_2 I_2}{m_2 \omega} - \sin (2\omega t + g_x) \right], \tag{17}$$

де $g_x = \frac{m_2 I_2}{m_2 \omega}$ – кут, що характеризує відставання переміщення від збурювальної сили, викликаной інерційним вібробуджувачем, у випадку “зависання” обертів незбалансованого ротора в околі власної частоти системи. Як бачимо, доданок $\sin (2\omega t + g_x)$ змінюється за гармонійним законом (власне, він і враховує доданок $J \ddot{\phi}$ з рівняння (15)). Тому, встановивши дійсне значення коливань вібраційного моменту відносно середнього рівня:

$$\sqrt{\frac{\omega}{2p} \int_0^{2p/\omega} (\sin (2\omega t + g_x))^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{18}$$

з виразу (15), використовуючи (16)–(18), визначаємо необхідний момент опору M_{on} руху дебаланса на частоті вимушених коливань Ω :

$$M_{on} = \frac{1}{2} \frac{m_d^2 r^2 \Omega^2 I_2}{m_2} \left[\sin \frac{m_2 I_2}{m_2 \Omega} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + (m + a) \Omega. \tag{19}$$

Прийнявши, що $m = 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ та підставляючи параметри в (19) – $M_{on} = 0.0007 \text{ H} \cdot \text{м}$ і зі

збільшенням кутової частоти зростає (рис. 8). Тому оберти дебаланса справді повинні “зависнути” в околі частоти вимушених коливань $\Omega = 628.3 \text{ рад/с}$.

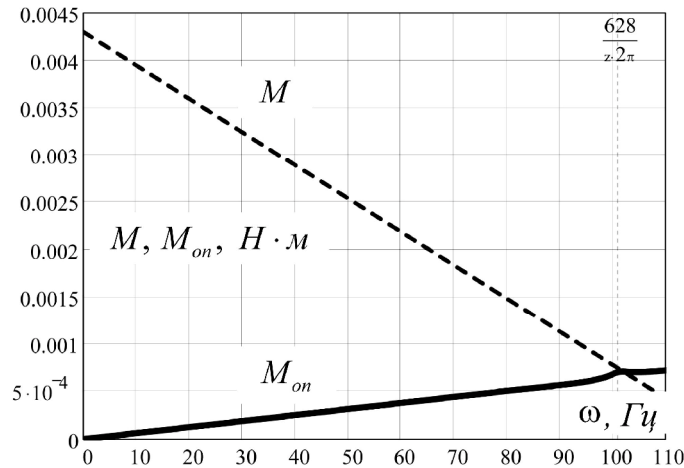


Рис. 8. Залежність моменту збудження M і моменту опору M_{on} від частоти вимушених коливань ω

Розроблення вібраційного майданчика та перевірка інерційних параметрів механічної коливальної системи. Приймаємо, що розміри поверхні робочого органа майданчика 134×194 мм. Зважаючи на те, що дві коливальні маси вібромайданчика повинні бути легкими (для таких габаритів необхідно забезпечити параметри $m_1 = 0.22$ кг, $m_2 = 0.9$ кг), вирішено робочий орган виконувати з оргскла, реактивну масу з алюмінію, а башмаки з текстоліту. Розроблений вібромайданчик наведено на рис. 9.

Встановимо реальні значення інерційних параметрів коливальних мас вібромайданчика.

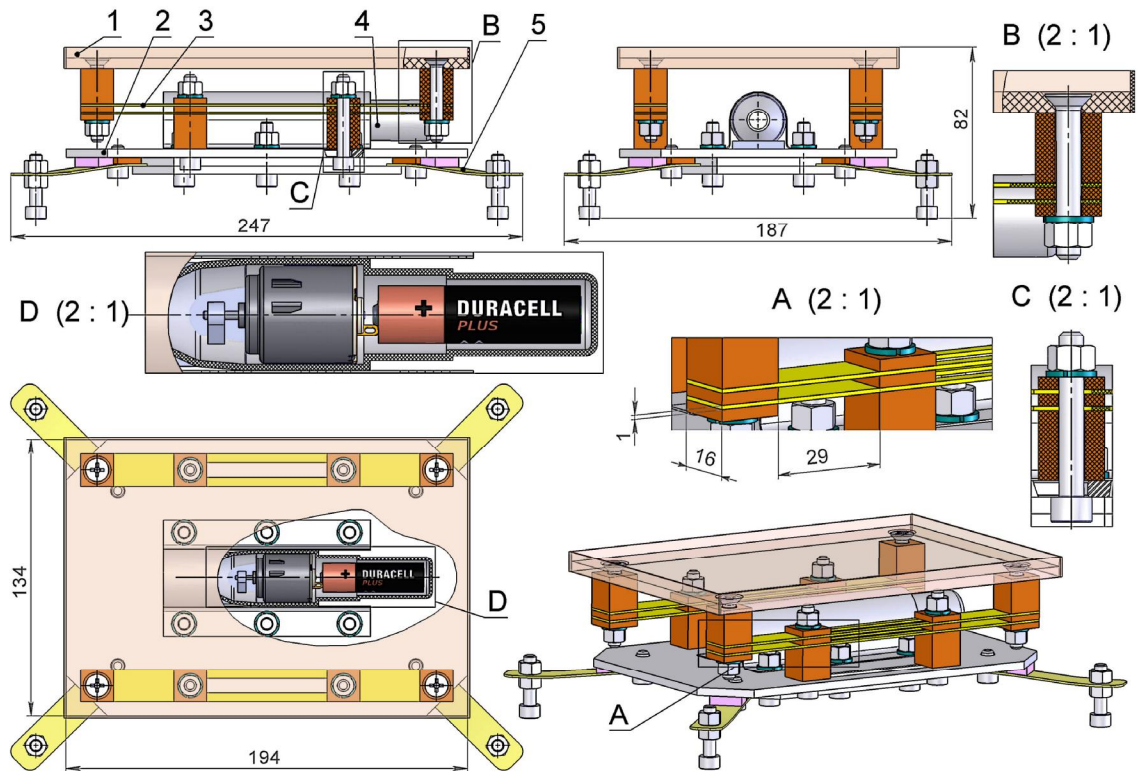
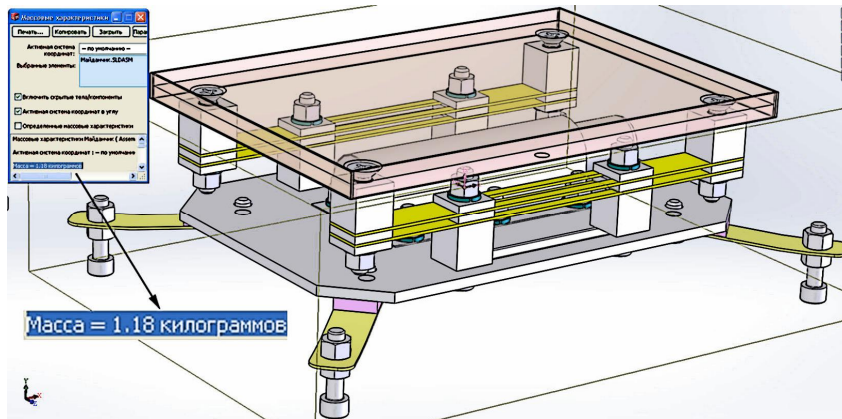
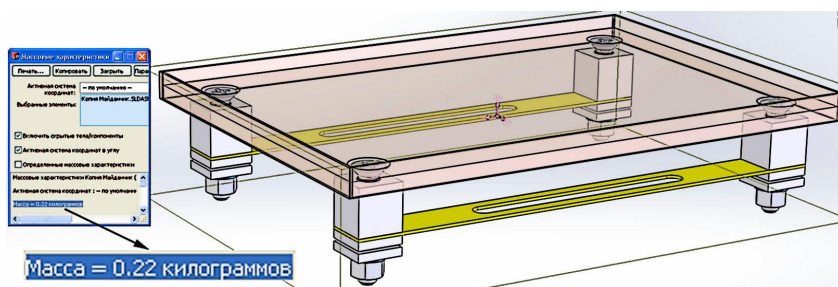


Рис.9. Розроблена конструкція вібромайданчика, де: 1 – робочий орган масою m_1 , 2 – реактивна маса m_2 , 3 – пружні елементи жорсткістю c_{12} , 4 – мотор-вібратор, 5 – віброізолятори жорсткістю c_{13}

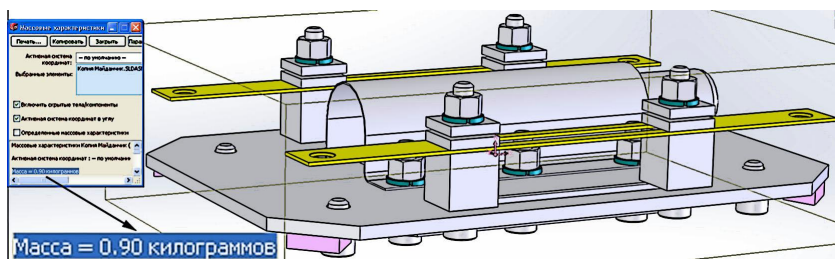
За сучасних методів конструювання, коли використовується програмне забезпечення твердотілого проектування, ці показники визначають наочно й автоматично. Так, у нашому випадку сумарна маса тримасової механічної коливальної системи становить $m = 1.18 \text{ кг}$ (рис.10, а). Активна маса разом з кріпленням, прокладками, частиною пружних елементів, які своєю інертністю додають маси, становить $m_1 = 0.22 \text{ кг}$ (рис.10, б). Інерційний параметр реактивної коливальної маси $m_2 = 0.9 \text{ кг}$ (рис.10, в).



а



б



в

Рис.10. Фрагменты вікон програмного продукту SolidWorks 2012, де виконано розрахунок мас відповідно вібротримачика загальною, робочого органа та реактивної маси

Розглянемо розрахунок на міцність. Враховуючи, що інерційний параметр робочого органа $m_1 = 0.22 \text{ кг}$, а реактивна маси – $m_2 = 0.9 \text{ кг}$, співвідношення амплітуд становить 0.24. Відносна амплітуда коливань визначається як $A_{від} = A \cdot (1 + 0.24)$, де A – амплітуда коливань робочого органу. Згідно з технічними умовами $A = X_1 = 0.2 \text{ мм}$, тоді $A_{від} = 0.25 \text{ мм}$. Розрахунок методом скінченних елементів, коли в твердотілій моделі пружного стрижня жорстко защемлюється один з

його кінців, а другому надається зміщення на величину $A_{\text{від}} = 0.25 \text{ мм}$ без провертання (рис. 11, а), вказує на значний запас за міцністю. Для склотекстоліту мінімальне максимальне допустиме напруження $[s_{-1}] > 100 \text{ МПа}$. Наявне ж напруження $s_{\text{max}} = 15.6 \text{ МПа}$, а отже, ця пружна система витримує навантаження. Згідно з відомою аналітичною залежністю $s_{\text{max}} = 3EbA_{\text{від}}/l_c^2$ максимальне напруження в пружних елементах $s_{\text{max}} = \frac{3 \cdot 1.9 \cdot 10^{10} \cdot 0.001 \cdot 0.00025}{0.029^2} = 21 \text{ МПа}$, що також вказує на значний запас за міцністю, хоча з деякою розбіжністю за результатом.

Проведемо перевірку жорсткості пружного елемента. Моделювання здійснюватимемо методом скінченних елементів. 3D модель пружної системи розділено на кінцеві елементи. Жорстко защемивши середні башмаки, навантажуюємо крайні тестовим зусиллям в 40 Н . Прогин елемента становить $v = 3.818 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ (рис. 11, б), а отже, жорсткість усієї пружної системи, враховуючи коефіцієнт защемлення $k = 0.7$, дорівнює $c_{12} = \frac{40}{3.818 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.7 = 7.333 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$, що трохи більше від розрахункового значення $c_{12} = 7.27 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ і прийнятно.

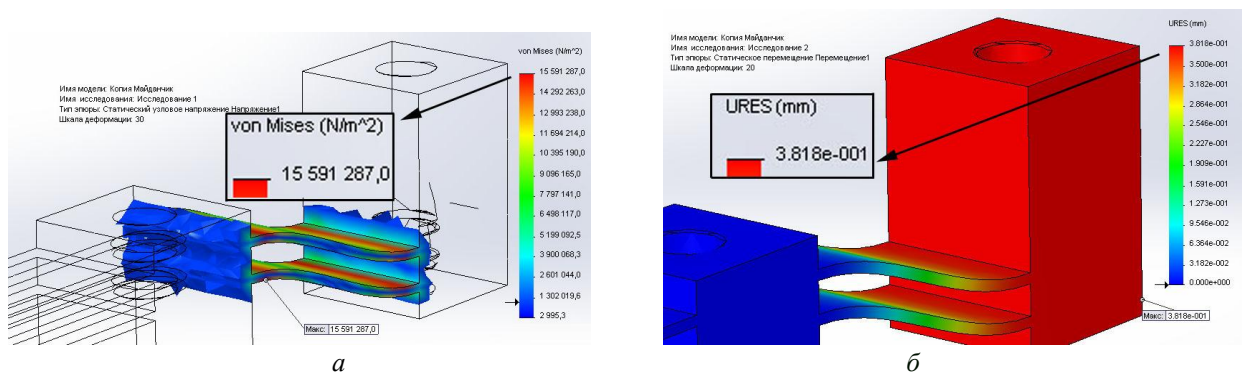


Рис. 11. Розрахунок методом скінченних елементів пружної системи на жорсткість (а) та міцність (б) з використанням симуляційного модуля програмного продукту SolidWorks 2012

Необхідно здійснити перевірку робочого органа на власну частоту коливань, щоб унеможливити виникнення значних паразитних коливань на частоті вимушених коливань. Тому перша власна частота коливань робочого органа повинна бути істотно більшою за вимушену. Справді, результат числового аналізу (рис. 12) вказує на значний запас за жорсткістю.

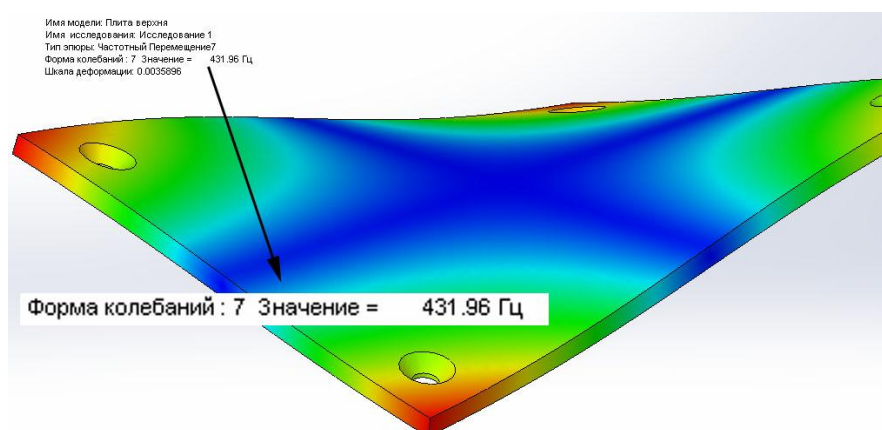


Рис. 12. Розрахунок власної частоти коливань робочого органа методом скінченних елементів

Реальна модель вібраційного вібромайданчика. Система трьох диференціальних рівнянь руху, що описує модель вібромайданчика з інерційним приводом, має вигляд [5–7]:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{12}(x_1 - x_2) + m_1 \dot{x}_1 + m_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_d r (j \ddot{\alpha} \sin j + \dot{j} \dot{\alpha}^2 \cos j) + c_{12}(x_2 - x_1) + m_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{i3} x_2 + m_{i3} \dot{x}_2 = 0; \\ J \ddot{j} - m_d r \sin j (\ddot{\alpha}_2 - g \sin g) = M(j \dot{\alpha}) - m j \dot{\alpha} \end{cases} \quad (20)$$

де $J = J_p + m_d r^2$ – сумарний момент інерції маси дебаланса m_d на радіусі розташування r та момента інерції ротора відносно власної осі симетрії; $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

У систему нелінійних диференціальних рівнянь (20) час t не входить у явному вигляді. Ці рівняння описують рух автономної механічної коливальної системи. Попередньо не розв'язавши їх, закон зміни в часі кута повороту j незбалансованого ротора встановити неможливо. Наближений аналітичний розв'язок системи (20) надто складний. Тому в статті автори обмежились числовим розрахунком з використанням методу Рунге–Кутти. Для цього систему (20) подано у нормальному вигляді відносно старших похідних:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{c_{12}(x_1 - x_2) + m_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + m_1 \dot{x}_1}{-m_1}; \\ \ddot{x}_2 = \frac{\left[-m_d r J \dot{j} \dot{\alpha}^2 \cos j + J [c_{12}(x_2 - x_1) + m_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{i3} x_2 + m_{i3} \dot{x}_2] - m_d^2 r^2 g \sin^2 j \sin g - m_d r \sin j (M(j \dot{\alpha}) - m j \dot{\alpha}) \right]}{m_d^2 r^2 \sin^2 j - J m_2}; \\ \ddot{j} = \frac{\left[-m_2 (M(j \dot{\alpha}) - m j \dot{\alpha}) + m_d r \sin j \times \begin{bmatrix} c_{12}(x_2 - x_1) + m_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_{i3} x_2 + m_{i3} \dot{x}_2 \\ -m_d r \dot{j} \dot{\alpha}^2 \cos j + m_2 g \sin g \end{bmatrix} \right]}{m_d^2 r^2 \sin^2 j - J m_2}. \end{cases} \quad (21)$$

Моделювання роботи вібромайданчика. Зведені дані про параметри вібромайданчика наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Параметри двомасового вібраційного майданчика з інерційним приводом

Інерційні та конструктивні:

Параметр	Значення
$m_1, \text{кг}$	0.22
$m_2, \text{кг}$	0.9
$m_d, \text{кг}$	0.003
$r, \text{м}$	0.003
$X_1, \text{м}$	0.0002
$J, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$1 \cdot 10^{-6}$

Жорсткісні:

Параметр	Значення
$c_{12}, \text{Н/м}$	$7.27 \cdot 10^4$
$c_{i3}, \text{Н/м}$	$\approx 1 \cdot 10^3$

Силкові:

Параметр	Значення
$M_\Omega, \text{Н} \cdot \text{м}$	0.0007
$N, \text{Вт}$	0.5

Частотні:

Параметр	Значення
$\Omega_g, \text{рад/с}$	641.7
$\Omega, \text{рад/с}$	628.3*
z	0.98*

Коефіцієнти в'язкості

Параметр	Значення
$m_{12}, \text{Н} \cdot \text{с/м}$	2.3
$m_1, \text{Н} \cdot \text{с/м}$	2.5
$m_{i3}, \text{Н} \cdot \text{с/м}$	10
$m, \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад}$	$1 \cdot 10^{-6}$

Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь (18) у програмному продукті MathCad 13, використовуючи параметри системи, наведені в табл. 2. Часові залежності руху коливальних мас в першу секунду після запуску вібраційної машини (рис. 13) свідчать, що встановлені значення амплітуд коливань двох мас: $X_1 = 0.2 \text{ мм}$, $X_2 = 0.05 \text{ мм}$. Перехідні процеси проходять порівняно швидко, що пов'язано з доволі високим пусковим моментом для двигуна постійного струму (див. табл. 1).

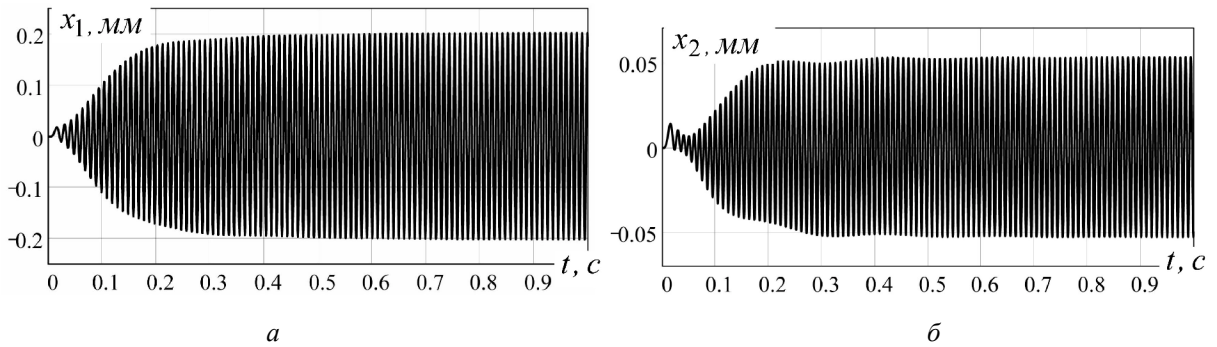


Рис. 13. Теоретичні часові залежності руху мас m_1 та m_2 (відповідно (а) та (б)) в дорезонансному режимі відносно власного піка системи при моменті збурення $M_{\Omega} = 0.0007 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Оберти дебаланса “зависають” на лівій гілці власного піка системи (рис.14, а), який пройти вона не може. Вібраційний майданчик починає працювати в усталеному стійкому дорезонансному режимі відносно першого піка системи на частоті вимушених коливань 101 Гц (рис. 14, б та рис. 15, а). Момент збурення M є замалим для подолання моменту опору на незбалансованому роторі (рис. 8).

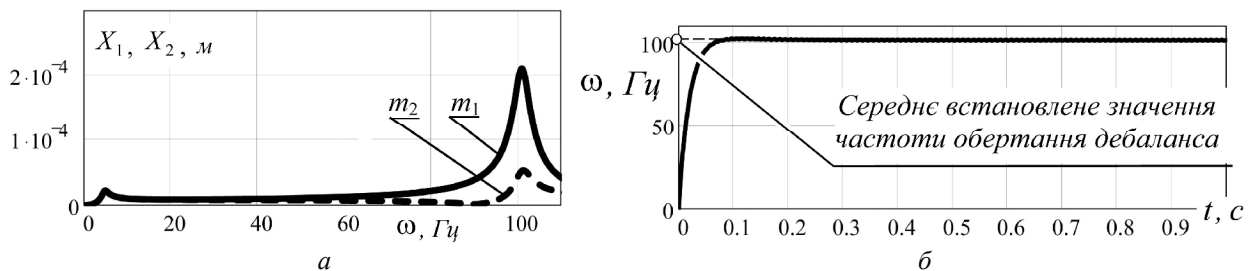


Рис. 14. АЧХ системи (а); вихід частоти обертання дебаланса на дорезонансний режим відносно власного піка системи (б)

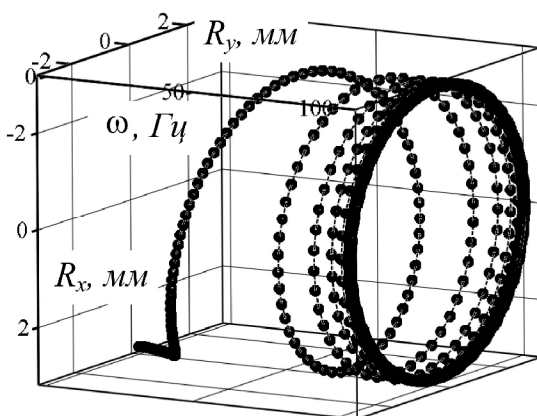


Рис. 15. Зміна частоти обертання дебаланса залежно від проєкцій радіуса вектора R розташування дебаланса m_d на осі x та y нерухомої системи координат

Якщо для цієї коливальної системи взяти потужніший двигун, його силова характеристика (функція моменту збурення $M(j)$) (рис. 7)) зміниться. Вона зміститься паралельно до себе вгору,

збільшивши початковий момент збурення M_0 . Так, якщо початковий момент збурення зростає з $M_0 = 0.0043 \text{ Н} \cdot \text{м}$ до $M_0 = 0.005 \text{ Н} \cdot \text{м}$, після запуску системи відбудеться “зривання” коливань (рис. 16). Оберти дебаланса проскочать резонансну зону системи і зафіксуються на частоті приблизно 120 Гц . Якщо взяти слабший за потужністю двигун, початковий момент збурення буде дещо меншим, для прикладу $M_0 = 0.0035 \text{ Н} \cdot \text{м}$. У разі збурення системи від такого двигуна дебаланс не вийде на номінальну частоту обертання і технологічно необхідної амплітуди коливань маси m_1 досягти не вдасться (рис. 17).

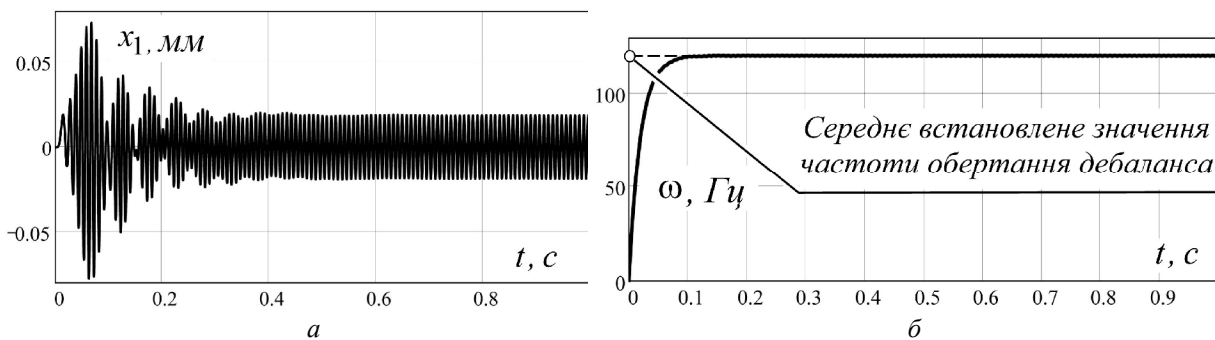


Рис. 16. Теоретичні часові залежності: а – руху маси m_1 ; б – частоти обертання дебаланса, якщо $M(j\omega) = 0.005 - 5.6 \cdot 10^{-6} j\omega$

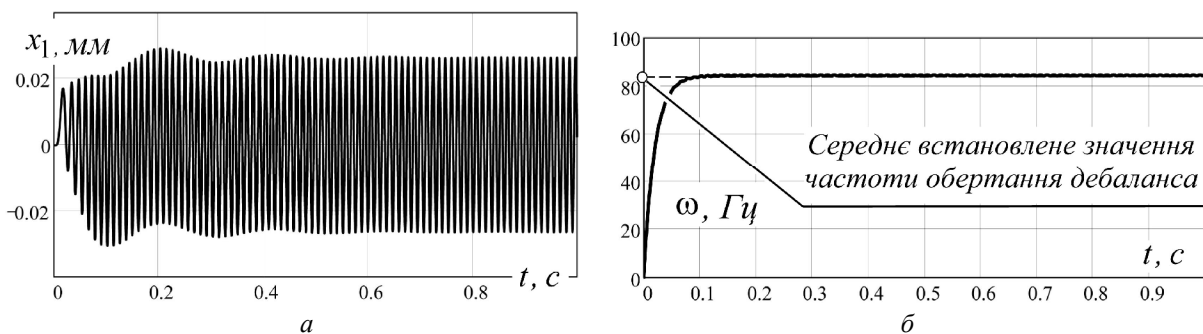


Рис. 17. Теоретичні часові залежності: а – руху маси m_1 ; б – частоти обертання дебаланса, якщо $M(j\omega) = 0.0035 - 5.6 \cdot 10^{-6} j\omega$

Модель вібромайданчика з параметрами, наведеними в табл. 2, внесено у вигляді твердотілої моделі в модуль COSMOSMotion програмного продукту SolidWorks. Результат моделювання коливальної системи в COSMOSMotion 2006 відображено на рис. 18. Спостерігаємо повну узгодженість результату математичного моделювання у програмному продукті MathCAD 13 (рис. 13 та рис. 14) та числового в симуляційному модулі COSMOSMotion 2006. Це свідчить як про правильність складеної математичної моделі (системи диференціальних рівнянь (20)), так і про достовірність виведених аналітичних залежностей для встановлення параметрів вібромайданчика.

Експериментальна перевірка. Виготовлено експериментальний зразок вібромайданчика (рис. 19, а). Експеримент поставлено з використанням лабораторного обладнання. Знімання механічних характеристик з експериментального зразка відбувалось за допомогою двоканального USB-осцилографа (аналогово-цифрового перетворювача IRIS фірми “Відео Інтернет Технології”), під’єднаного до комп’ютера. Живлення електродвигуна відбувалось від пальчикової батарейки на номінальну напругу 1.5 В . Приєднавши датчик віброприскорень (рис. 19, б) до маси m_1 , зчитали дані з використанням програмного продукту для USB-осцилографа.

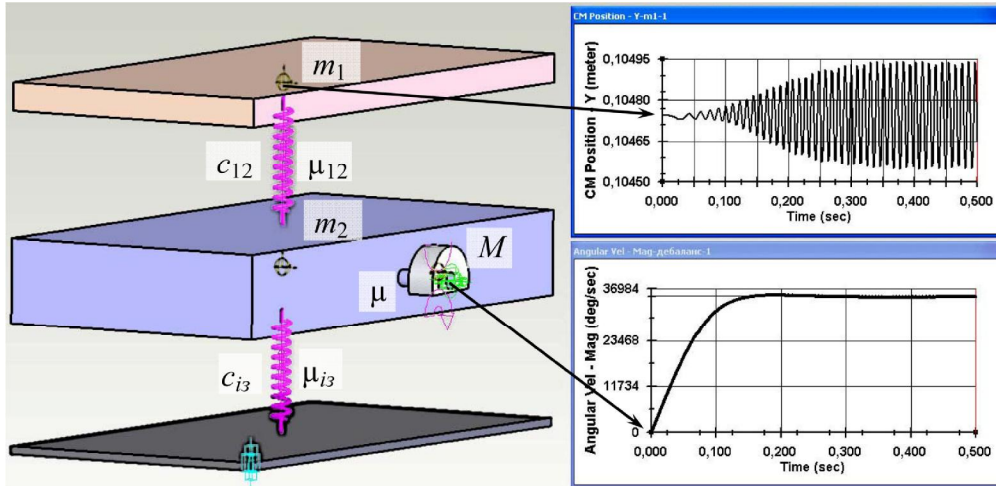


Рис. 18. Вікно програмного продукту COSMOSMotion 2006, де відображено часові залежності руху (одиниці [м]) коливальної маси m_1 та кутової швидкості $\dot{\varphi}$ дебаланса (одиниці [град/с]), коли $M = 0.0007 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Встановимо амплітуду коливань першої маси, що виконує функцію робочого органа. Оскільки давач, який жорстко закріплений до цієї маси, тарований ${}^1U_{на\ 1g} = 200 [\text{мВ}/g]$ (рис. 19, б), а амплітудне значення з давача $U_1 = 1.6 [B]$ (рис. 20, а), перевідний коефіцієнт x , що є й показником перевантаження, розраховуємо з таких умов:

$$\begin{cases} 0.2 [B] \equiv g; \\ 1.6 [B] \equiv x g, \end{cases} \quad (22)$$



Рис. 19. Експериментальний зразок вібромайданчика з інерційним приводом (а) та давач, що приєднувався до маси m_1 (б)

Отже, користуючись (22), визначимо перевантаження на робочому органі:

$$x_1 = \frac{U_1}{{}^1U_{на\ 1g}} = \frac{1.6}{0.2} = 8.$$

Як зазначено вище, для гармонійних коливань перевантаження x знаходять з відомої залежності $x = \frac{X w^2}{g}$. Тому амплітуда коливань робочого органа становитиме

$$X_1 = \frac{8 \cdot 9.81}{(2 \cdot p \cdot 100)^2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \text{ що повністю узгоджується з результатами математичного моделювання (рис. 13).}$$

Кутова ж частота вимушених коливань – справді в околі 100 Гц (рис. 20, б).

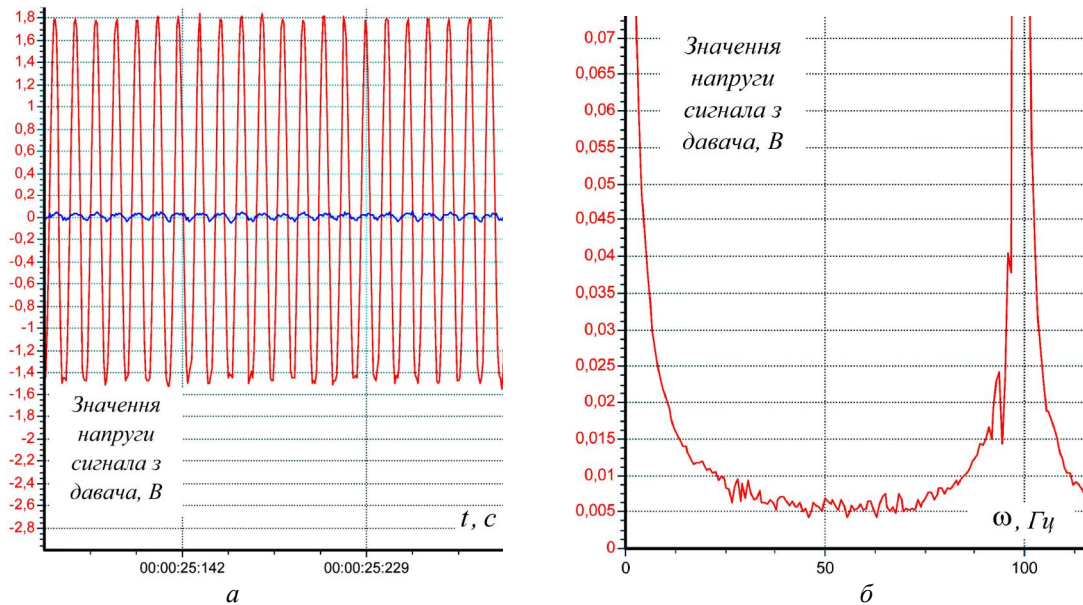


Рис. 20. Експериментально зняті: а – часова залежність руху коливальної маси m_1 ; б – спектральна характеристика руху маси m_1 при усталених коливаннях системи

Отже, можна констатувати, що резонансний вібромайданчик з інерційним приводом працює на частоті вимушених коливань 100 Гц, споживана потужність ≈ 0.5 Вт; амплітуда коливань робочого органа масою $m_1 = 0.22$ кг становить $X_1 = 0.2$ мм (перевантаження на робочому органі 8 земних прискорень).

Режим роботи установки, безумовно, енергоощадний. Адже, якщо припустити, що розроблений вібромайданчик необхідно експлуатувати на нерезонансних частотах з однаковим перевантаженням робочого органа – 8 земних прискорень (рис. 21), потужність, яку споживає привід, буде суттєво більшою.

Висновок. На прикладі малогабаритного вібромайданчика з інерційним приводом підтверджено можливість реалізації енергоощадних резонансних режимів, що ґрунтуються на ефекті Зоммерфельда. Виявлено, що за умови використання двигунів постійного струму можна забезпечувати стабільну роботу вібраційного технологічного обладнання у білярезонансному режимі роботи. Підтверджено правильність виведених аналітичних залежностей для встановлення інерційно-жорсткісних та силових параметрів системи, адже зняті часові та спектральні характеристики амплітуд коливань мас

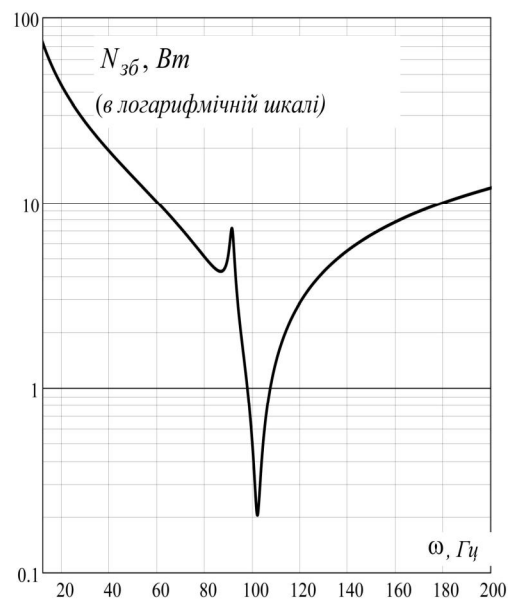


Рис. 21. Залежність споживаної потужності приводу вібромайданчика

експериментального зразка двомасової вібраційної машини з інерційним збуренням практично повністю узгоджуються з теоретичними залежностями коливань, побудованими з використанням математичної моделі у вигляді автономної системи трьох диференціальних рівнянь руху.

1. Назаренко И.И. *Высокоэффективные вибротрамбовочные машины*. – К.: Вища шк., 1982. – 200 с. 2. Назаренко И.И., Гуманська О.В. *Машины и устаткування підприємств будівельних матеріалів: Конструювання та основи експлуатації: підручник*. – К.: Вища шк., 2004. – 590 с.: іл. 3. Ярошевич М.П. *Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом* / М.П. Ярошевич, Т.С. Ярошевич. – Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с. 4. Блехман И.И. *Вибрационная механика* / И.И. Блехман. – М.: Фізматлит, 1994. – 400 с. 5. Кузьо І.В. *Експериментальне дослідження вібраційних машин з аероінерційним збуренням* / І.В. Кузьо, О.В. Ланець, В.М. Гурський // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2012. – № 4 (68). – С. 48–56. 6. Кузьо І.В. *Синтез низькочастотних резонансних вібраційних машин з аероінерційним збуренням* / І.В. Кузьо, О.В. Ланець, В.М. Гурський // *Науковий вісник Національного гірничого університету*. – 2013. – № 2 (134). – С. 60–67. 7. Кузьо І.В. *Формування та аналіз математичної моделі вібраційної машини з аероінерційним збуренням* / І.В. Кузьо, О.В. Ланець, В.М. Гурський // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2012. – № 2 (66). – С. 50–58.

УДК 621.9.048

З.А. Стоцько, В.Г. Топільницький, Я.М. Кусий*
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра електронного машинобудування
*кафедра технології машинобудування

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПИСУ ДИНАМІКИ ВІБРАЦІЙНОГО СЕПАРАТОРА З ДЕБАЛАНСНИМ ПРИВОДОМ

© Стоцько З.А., Топільницький В.Г., Кусий Я.М., 2013

З використанням асимптотичних методів нелінійної механіки розроблено параметризовану математичну модель руху вібраційного сепаратора з дебалансним приводом та пружинною підвіскою, що дає змогу дослідити вплив параметрів сепаратора за довільної їх комбінації на продуктивність його роботи з метою її оптимізації.

The article works out the parametric mathematical motion model of an vibrating separator with an misbalanced drive and an spring hanger by using the asymptotic method of nonlinear mechanics. This allows investigating the influence of separator parameters at their arbitrary combination on the efficiency of its functioning with an aim of its optimization.

Постановка проблеми. Сфера використання вібраційних сепараторів для розділення сипких матеріалів на фракції має тенденцію до подальшого росту в машинобудівній, гірничодобувній, будівельній та інших галузях промисловості. Незважаючи на широкий спектр застосування вібраційних сепараторів, динамічні процеси, які відбуваються у таких складних системах, описувались здебільшого в лінійній постановці, що переважно неадекватно відображає реальні фізичні явища процесу сепарації [1]. Потреби практики вимагають прогнозування результатів сепарації залежно від структури, фізико-механічних властивостей компонентів середовища, що сепарується, а тому і відповідного вибору типу та характеристик вібраційного сепаратора з урахуванням нелінійних сил, які виникають під час його взаємодії із середовищем. Розв'язання таких комплексних задач, що враховують вплив приводу на динаміку різних видів середовища та