УДК 519.6

В. Самотий[1,2], А. Павельчак[1], У. Дзелендзяк[1]
[1]Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра комп’ютеризованих систем автоматики
[2]Politechnika Krakowska, katedra automatyki i technik informacyjnych, (Polska)

ПОКРАЩАННЯ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ УСЕРЕДНЕНОГО ДЕМПФУВАННЯ

Запропоновано спосіб покращання збіжності методу простої ітерації, який дає можливість отримати розв’язок для ширшого класу задач.
Ключові слова: збіжність, метод, проста ітерація.

In this paper, the authors have proposed the way improving convergence of simple iteration method that makes it possible to get a solution for more wide class of problem.
Key words: convergence, method, simple iteration.

Вступ

Для пошуку коренів систем нелінійних алгебричних рівнянь відомо чимало методів, зокрема: Ньютона, бісекції, хорд, градієнтного спуску. Серед них свою ділянку займає і метод простої ітерації, завдячуючи своїй простій реалізації. Окрім нелінійних рівнянь, його також використовують для розв’язування лінійних алгебричних рівнянь та розрахунку періодичних режимів. Найкращим за своїми характеристиками серед наведених є безумовно метод Ньютона. Однак для певних видів нелінійних рівнянь, а особливо тих, в яких нелінійність зумовлена ще й табличними кривими, використання методу Ньютона є ускладнене через необхідність взяття похідної. І в цих випадках для спрощення реалізації досліджуваної задачі використовують метод простої ітерації. Варто зауважити, цей метод часто має погану збіжність, тобто розбігається чи зациклюється, що зумовлено погано вибраними початковими наближеннями або невдалим приведенням рівнянь до вигляду, зручного для ітерації. Пропонуємо покращувати збіжність методу простої ітерації за допомогою усередненого демпфування.

1. Аналіз публікацій

Ідея демпфування в числових методах є не новою і тою чи іншою мірою застосовується до ітераційних методів пошуку розв’язків рівнянь. Наприклад, відомі модифікації методу Ньютона з введеними в ітераційний процес демпфуючих множників [1, 2], чи скажімо, модифікації методу хорд [3]. Для покращання їх збіжності існують різні способи, один з яких запропонував Ейткен, що базується на використанні значень трьох попередніх ітерацій [5, 6]. Процедура Ейткена уточнює корінь рівняння після кожної ітерації. Для методу простої ітерації формула уточнення значення кореня рівняння, згідно з процедурою Ейткена, на (k+1) ітерації має такий вигляд:

$$x_{(k+1)_{ут}} = \frac{x_{(k-1)}x_{(k+1)} - x_{(k)}^2}{x_{(k+1)} - 2x_{(k)} + x_{(k-1)}}, \quad (1)$$

до того ж процес ітерації збігається зі швидкістю показникової функції.

Інший підхід для значного прискорення збіжності пошуку кореня рівняння чи системи рівнянь полягає у застосуванні екстраполяційних методів. Найпопулярніший з них – це ε-алгоритм [7]. Однак ε-алгоритм дає позитивний результат лише за умови збіжності ітераційного ряду методу простої ітерації.

2. Постановка задачі

Для знаходження за методом простої ітерації кореня рівняння вигляду

$$f(x) = 0\,, \tag{2}$$

де x – шуканий корінь, необхідно привести рівняння (2) до вигляду, зручного для методу простої ітерації,

$$x = g(x)\,, \tag{3}$$

де $g(x)$ – ітераційна функція. Від вдалого представлення (3) і залежатиме збіжність методу. Для методу простої ітерації є чотири загальних випадки його збіжності (рис. 1). Збіжність методу зумовлюється модулем тангенса кута нахилу кривої $y = g(x)$ до осі абсцис. Як видно з рис. 1, за виконання умови $|g'(x)| < 1$ (вип. А та В) метод збігається, а при $|g'(x)| > 1$ (вип. Б та Г) – розбігається. Зазначимо, що для випадків А та Б поведінка методу простої ітерації має сходинковий характер ($g'(x) > 0$), а для В та Г – спіральний ($g'(x) < 0$).

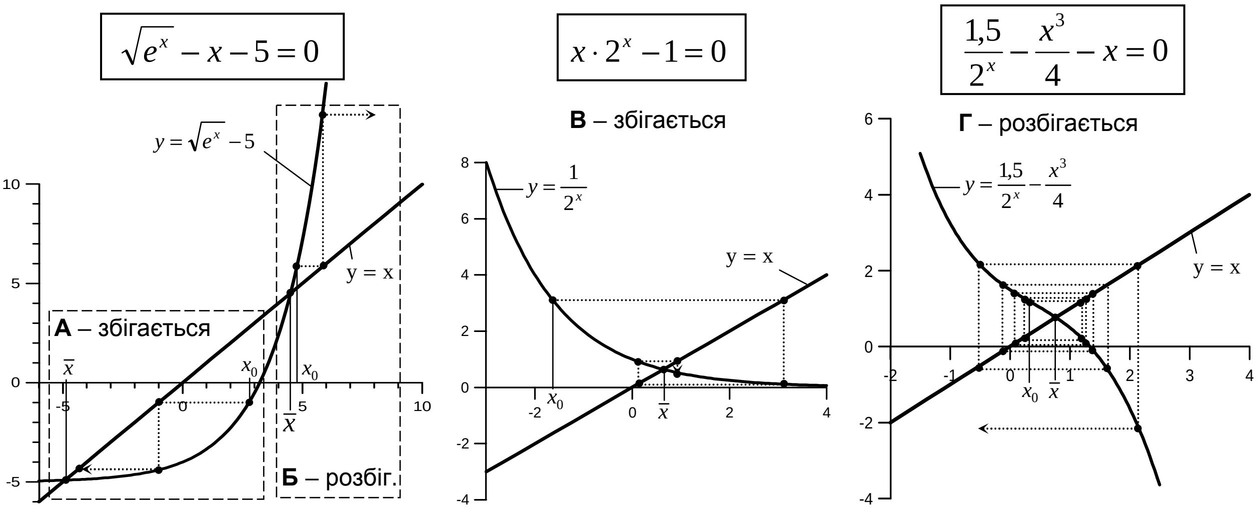


Рис. 1. Геометрична інтерпретація збіжності методу простої ітерації

Для рівняння, що має розв'язок, але метод простої ітерації для вибраного представлення (3) розбігається, приводять рівняння (2) до такого вигляду [4]:

$$x = x + \varphi(x) \cdot f(x)\,, \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ – довільна неперервна знакопостійна функція, а у найпростішому випадку $\varphi(x) = \alpha = \text{const} \neq 0$. Однак для визначення параметра α необхідно додатково дослідити поведінку похідної $f'(x)$ на ділянці локалізації кореня розв'язку [4]. Для системи нелінійних рівнянь взагалі не існує алгоритму приведення до вигляду, зручного для методу простої ітерації, який би до того ж забезпечував збіжність методу. Як правило, тут можливий лише евристичний підхід та досвід дослідника.

Ми пропонуємо для покращання збіжності використовувати усереднене демпфування методу простої ітерації (рис. 2), хоча звісно і воно не завжди дає збіжний результат. Демпфування потрібно виконувати одразу ж після чергової ітерації за такою формулою:

$$x_{(k+1)_{\text{ут}}} = \frac{x_{(k+1)} + x_{(k)}}{2}\,. \tag{5}$$

Для системи рівнянь демпфуванню за формулою (5) підлягає кожна невідома x_i. Іноді для отримання збіжності демпфування потрібно виконувати декілька разів підряд після кожного уточнення.

$$\boxed{x \cdot 2^x - 1 = 0} \qquad \boxed{\frac{1{,}5}{2^x} - \frac{x^3}{4} - x = 0}$$

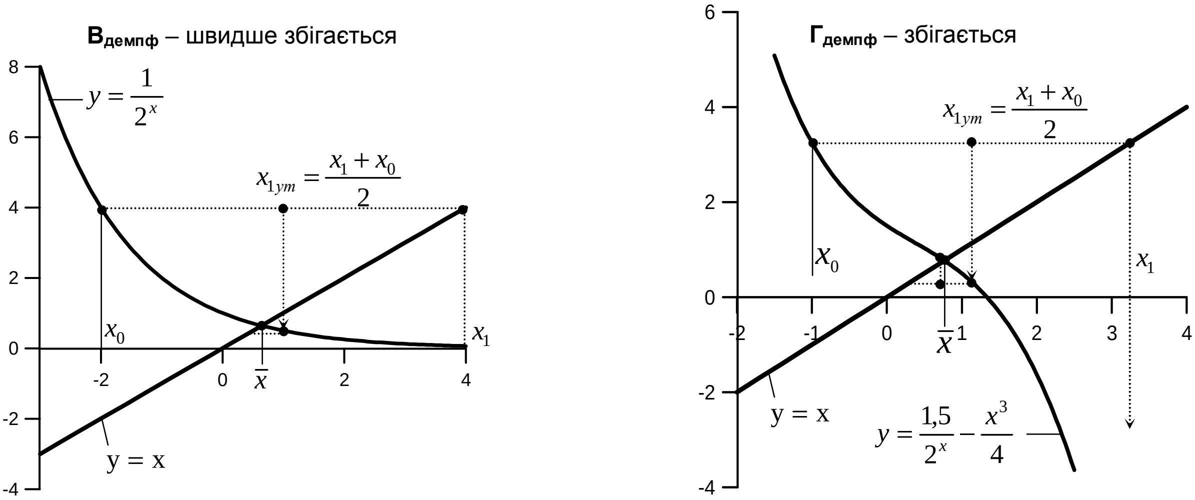


Рис. 2. Покращання збіжності методу простої ітерації за допомогою демпфування

Демпфування методу простої ітерації має зміст лише при спіральному характері процесу збіжності чи розбіжності (рис. 1, вип. В та Г), тобто, коли $g'(x) < 0$. При сходинковому характері ітераційного методу демпфування лише гальмує збіжність чи розбіжність (рис. 1, вип. А та Б), і тому його використання там недоцільне. На рис. 2 проілюстровано реалізацію демпфування для попередніх ітераційних процесів зі спіральним характером. Для випадку В збіжність пришвидшується, а для випадку Г – ітераційний процес починає збігатися.

<u>Загальний алгоритм усередненого демпфування методу простої ітерації:</u>

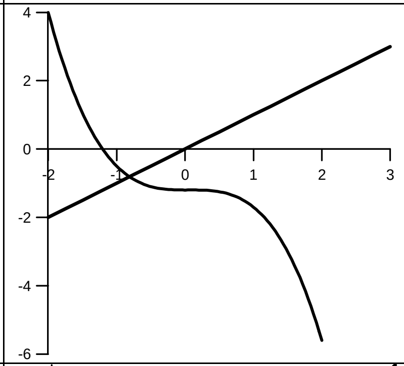
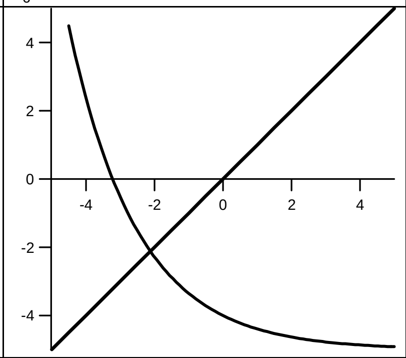
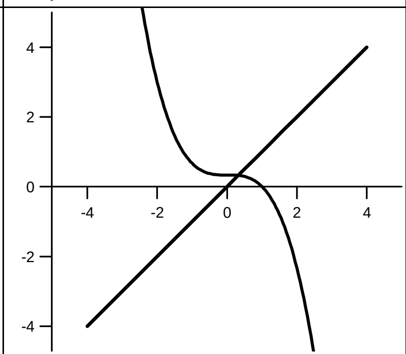
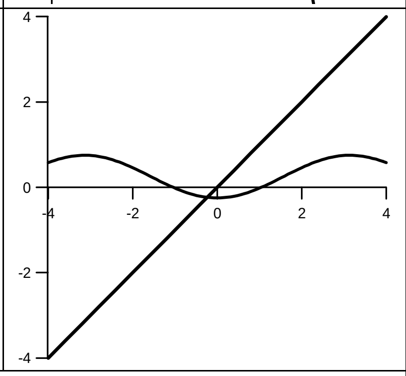
1) рівняння $f(x) = 0$ приводиться до вигляду $x = g(x)$;
2) задається поч. наближення $x_{(0)}$ та точність ε;
3) обчислюється чергове уточнення: $x_{(k+1)} = g(x_{(k)})$;
4) виконується демпфування (1 чи більше разів): $x_{(k+1)_{\text{ут}}} = \left(x_{(k+1)} + x_{(k)}\right)/2$;
5) **якщо** $\left|x_{(k+1)} - x_{(k)}\right| \le \varepsilon$, ітераційний процес зупиняємо,
   інакше переходимо до п.3.

3. Порівняльний аналіз числових результатів

Для оцінки ефективності роботи демпфування методу простої ітерації можна чисельно зіставити його результати з результатами, які дає процедура Ейткена. Наприклад, випадок В на рис. 1 при похибці $\varepsilon = 10^{-5}$ та поч. наближенню $x_{(0)} = -2$ збігається за 18 ітерацій, при демпфуванні – за 11 ітерацій, з використанням процедури Ейткена – за 19 ітерацій. Випадок Г на рис. 1 розбігається, при демпфуванні ми добиваємося його збіжності за 7 ітерацій (при $\varepsilon = 10^{-5}$ та $x_{(0)} = -2$), з використанням процедури Ейткена – за 19 ітерацій.

Для кількісної оцінки ефективності демпфування методу простої ітерації в таблиці наводиться порівняльний аналіз звичайного методу простої ітерації з демпфованим методом, а також з використанням процедури Ейткена.

Порівняльний аналіз збіжності

Нелінійне рівняння чи система рівнянь	Графічний вигляд, $y=\varphi(x)$ та $y=x$	Початк. наближ.	Кількість ітерацій* ($\varepsilon=10^{-5}$) Звичайний	Демпфований	Процед. Ейткена
$6x^3-x^2+10x+12=0$ предст. для прост. ітер.: $x=\dfrac{-(6x^3-x^2+10x+12)}{10}$		$x_{(0)}=-2$	розбіг.	9 іт.	21 іт.
$\sqrt{e^{-x}}-x-5=0$ предст. для прост. ітер.: $x=\sqrt{e^{-x}}-5$		$x_{(0)}=-5$	зацикл.	10 іт.	20 іт.
$\dfrac{1-x^3}{3}-x=0$ предст. для прост. ітер.: $x=\dfrac{1-x^3}{3}$		$x_{(0)}=-5$	розбіг.	3 уточн. 61 іт.	1 уточн. 17 іт.
$\dfrac{0,5-\cos(x)}{2}-x=0$ предст. для прост. ітер.: $x=\dfrac{0,5-\cos(x)}{2}$		$x_{(0)}=-5$	7 іт.	16 іт.	6 іт.
$\begin{cases} e^{x_1x_2}-x_1^{\,2}+x_2-0,8=0 \\ (x_1+0,5)^2+x_2^{\,2}-0,6=0 \end{cases}$ предст. для прост. ітер.: $\begin{cases} x_1=x_1-\left(e^{x_1x_2}-x_1^{\,2}+x_2-0,8\right) \\ x_2=x_2-\left((x_1+0,5)^2+x_2^{\,2}-0,6\right) \end{cases}$		$x_1=1$ $x_2=1$	розбіг.	18 іт.	21 іт.

** Якщо окремо не зазначається число уточнень за допомогою демпфування чи процедури Ейткена, тоді мається на увазі по одному уточненню після кожної ітерації.*

4. Висновки

Застосування усередненого демпфування до методу простої ітерації дало можливість отримати збіжність методу простої ітерації чи покращити її для певного типу задач. За своїм принципом роботи демпфування можна зіставити з процедурою Ейткена, і для деяких типів задач навіть отримати чисельно кращий результат. Для своєї роботи демпфування потребує значення лише для двох ітерацій: поточної та попередньої, на противагу трьом значенням ітерацій процедури Ейткена. Тому використання демпфування методу простої ітерації вважаємо цілком виправданим.

1. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 440 с. 2. Шмигельський Я. Модифікований метод Ньютона для розрахунку періодичних режимів нелінійних динамічних систем // Теор. електротехніка. – 2009. – Вип. 60. – С. 54–57. 3. Бартіш М., Огородник Н. Модифікація методу хорд розвязування задач мінімізації // Вісник Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 5–10. 4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш.шк., 1994. – 544 с. 5. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с. 6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с. 7. P.R. Graves-Morris, D.E. Roberts, A. Salam. The epsilon algorithm and related topocs. // Journal of computational and applied mathematics. – 2000. – V. 122. – P. 51–80.