УДК 004.421.2:517.443

І.О. Процько
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ЕФЕКТИВНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАРТЛІ НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК

Розглянуто узагальнений підхід ефективного обчислення дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) на основі циклічних згорток. Підхід ґрунтується на приведенні матриці аргументів і матриці знаків дійсного базису ДПХ до еквівалентних циклічних секцій.
Ключові слова: дискретне перетворення Хартлі, твірний масив, циклічна згортка.

The general method of efficient computation discrete Hartley transform using of circular convolutions is considered. The method is based on the presentation of the matrix of arguments and signs of the real basis the discrete Hartley transform to the equivalent cyclic sections.
Keywords: discrete Hartley transform, hash array, cyclic convolution.

Вступ. Сучасні обчислювальні засоби використовують ефективні алгоритмічні підходи до виконання гармонічних дискретних перетворень. Широко застосовують дискретне перетворення Хартлі (ДПХ) для виконання перетворення в області дійсних значень даних в їх спектральний образ [1]. Ефективність обчислення перетворення ґрунтується на алгоритмічних підходах з точки зору оптимальної організації за реалізації в програмних та апаратно-програмних засобах.

Огляд літературних джерел. Існують різні підходи до синтезу ефективних алгоритмів дискретних гармонічних перетворень. Найрізноманітнішими є досліджені засоби дискретного перетворення класу Фур’є. В основу цих швидких перетворень покладені базові операції з основою два (метелика), змішаною основою, розщепленою основою тощо [2, 3]. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають у специфічній складності узагальненого представлення синтезу ефективного алгоритму для конкретних значенṅ обсягів та певних наборів перетворення. Розвиток сучасних інформаційних технологій ставить вищі вимоги по швидкісних та функціональних можливостях перед алгоритмічними та програмно-апаратними засобами дискретних перетворень.

Тому актуальними є дослідження і подальший розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень послідовностей довільних обсягів. Це дасть можливість проектувати гнучкі, універсальні інструменти швидких перетворень інформації з однієї області в іншу за ефективним проміжком сконцентрованої інформаційної енергії.

Постановка проблеми. Для представлення даних в їх спектральний гармонічний образ застосовуються перетворення класу Фур’є з використанням ефективних алгоритмічних підходів. Багато методів обробки інформації віддають перевагу обробці послідовності дійсних даних, до них і належить дискретне перетворення Хартлі. На відміну від перетворення Фур’є, що відображає дійсні функції в комплексну область, перетворення Хартлі відображають дійсні сигнали в дійсний образ, використовуючи базисну функцію cas, що являє собою суму косинуса і синуса одного аргументу: cas $\omega t = \cos \omega t + \sin \omega t$. Пряме і зворотне перетворення Хартлі взаємно симетричні.

Аналіз останніх досліджень показав, що одержано різноманітні форми узагальненого опису, дискретного перетворення Хартлі [4]. Існуючі підходи мають як свої переваги, так і особливості, що полягають у специфічній складності формування обчислювального алгоритму для певних значень обсягів. Програмна реалізація цих підходів вимагає створення уточнювальних алгоритмів на конкретних етапах виконання дискретних перетворень дійсних послідовностей.

Актуальним для застосувань є обчислення дискретного перетворення Хартлі на основі циклічних згорток [5]. Розробка узагальненої схеми ефективного обчислення дискретних перетворень Хартлі на основі циклічних згорток вимагає: аналізу базису перетворення; ефективного формування структури базису; виділення підмножин, що мають однотипові базисні структури.

Аналіз структури матриці аргументів базису ДПХ. Пряме та зворотне одновимірне ДПХ визначається співвідношеннями:

$$X(k)= N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\mathrm{cas}(2\pi kn/N);$$

$$x(n))= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\mathrm{cas}(2\pi kn/N). \qquad (1)$$

У матричній формі дискретне перетворення Хартлі задається виразом:

$$X = W^* x , \qquad (2)$$

де $W(k,n)=\mathrm{cas}(2\pi kn/N)=(\cos(2\pi kn/N)+\sin(2\pi kn/N))$, квадратна базисна матриця: (n,k=0,(1),...,N-1), x(N) та X(N) – матриці стовпці вхідних та вихідних даних; N–обсяг перетворення.

Особливістю цього перетворення є функція $\mathrm{cas}(2\pi kn/N)=(\cos(2\pi kn/N)+\sin(2\pi kn/N))$, введена Хартлі у 1942 році, графік якої показано на рис. 1. Область визначення функції $-2\sqrt{2} < \mathrm{cas}(2\pi kn/N) < 2\sqrt{2}$, (n,k=0,(1),...,N-1).

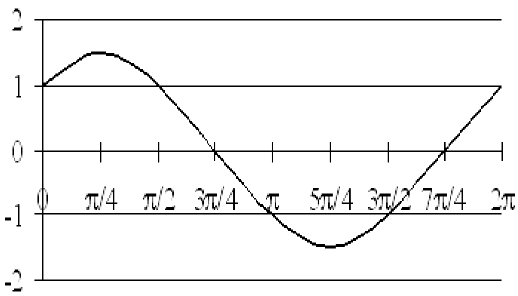

Рис. 1. Графік функції cas (2πkn/N)

Проаналізуємо структуру матриці базису ДПХ для довільних значень обсягів N. ДПХ [2] визначається послідовністю вихідних X(k), k=0,1,…,N-1 та вхідних даних x(n), n=0,1,…,N-1 як

$$X(k) = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\mathrm{cas}(k^*n^*\Delta\varphi), \qquad (3)$$

де $\Delta\varphi=2\pi/N$; N – ціле значення обсягу ДПХ.

Проведемо виділення та аналіз аргументів n,k, пов'язаних з функцією $\mathrm{cas}(k^*n^*\Delta\varphi)$, що є елементами матриці базису ДПХ (3). Функція $\mathrm{cas}(2\pi kn/N)$ – періодична стосовно N, тому можна записати базисну матрицю аргументів V порядку $(N-1\times N-1)$ у вигляді

$$V= [v(k,n) \bmod N], \qquad (4)$$

де $v(k,n) = k^*n$ – значення елементів матриці по k=1(1)N-1 рядку та n=1(1)N-1 стовпцю.

Аналіз одержаних матриць V (4) для аргументів базису ДПХ, що містять цілі числа, показує, що в матриці кожен рядок містить набір елементів v(r,k) mod N, що не повторюються, тобто латинський квадрат. Отже, лінійки латинського квадрата, як і стовпці, являють собою переставлення.

Визначення матриць аргументів базису вимагає затрат часу під час обчислення за формулою (4) для кожного конкретного значення обсягу. Тому ефективніше формувати матриці аргументів базису за допомогою переставлення елементів кожного наступного рядка матриці на основі попереднього. Тобто ефективніше формувати елементи матриці аргументів базису ДПХ за допомогою твірного масиву P(n). Масив P(n) можна одержати з використанням підстановки за першим та відповідним рядками (залежно від обсягу перетворення) матриці аргументів V (4). Елементами твірного масиву P(n) є цілі значення в межах від 1 до N-1.

Розглянемо структуру та властивості, сформовані за твірним масивом P(n) матриць Vp аргументів базису ДПХ у найпростішому випадку для обсягу, рівного простому числу. За твірним масивом P(n) шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної матриці аргументів. Одержана квадратна матриця Vp на основі твірного масиву P(n) містить елементи, рівні між собою, що розміщені паралельно до бічної діагоналі $v[i,j]=v[k,l]$, за $i+j=k+l$, де $i,j,k,l \in \{1,2,..., n\}$, $v[i,j] \in P(n)$, або рівні усі елементи, симетрично розміщені стосовно головної діагоналі. Тобто така квадратна матриця називається ганкелевою (Hankel), що повністю визначається своїм першим рядком або останнім стовпчиком. Окрім того, у цієї ганкелевої матриці кожен наступний рядок одержаний з попереднього циклічним зсувом вліво. Тобто матриця, сформована на основі твірного масиву P(n), називається ліво-циркулянтною, або циклічною зліва. Наприклад, для обсягу N=7 з V базисної матриці аргументів ДПХ сформуємо циклічну зліва матрицю Vp за твірним масивом P(6)= (1, 3, 2, 6, 4, 5) виду:

V=

	1:	2:	3:	4:	5:	6:
1:	1	2	3	4	5	6
2:	2	4	6	1	3	5
3:	3	6	2	5	1	4
4:	4	1	5	2	6	3
5:	5	3	1	6	4	2
6:	6	5	4	3	2	1

Vp=

	1:	3:	2:	6:	4:	5:
1:	1	3	2	6	4	5
3:	3	2	6	4	5	1
2:	2	6	4	5	1	3
6:	6	4	5	1	3	2
4:	4	5	1	3	2	6
5:	5	1	3	2	6	4

Отже, за допомогою твірного масиву P(n) можна одержати циклічну зліва матрицю Vp аргументів базису ДПХ.

Аналіз структур матриць аргументів базису ДПХ. Розглянемо структуру та особливості, сформованих за твірним масивом P(n) матриць Vp аргументів базису ДПХ для послідовностей довільних обсягів. Елементами твірного масиву P(n) є цілі значення в межах від 1 до N-1.

Для непарних значень обсягу перетворення N = p, (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,...,) структура матриць Vp визначається значеннями твірного масиву P(n). Здебільшого твірний масив P(n) має вигляд:

$$P(n) = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_n), \tag{5}$$

де n= N-1 – розмірність твірного масиву; n_i – елемент масиву (n_i<N); i – кількість елементів в масиві P(n).

За твірним масивом P(n) шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної матриці Vp елементів аргументів базису ДПХ. Наприклад, для обсягу N=13 твірний масив дорівнює

P(12)=(1 2 4 8 3 6 12 11 9 5 10 7).

Сформована матриця Vp за твірним масивом P(12) матиме вигляд:

Vp=

1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7
2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1
4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1	2
8	3	6	12	11	9	5	10	7	1	2	4
3	6	12	11	9	5	10	7	1	2	4	8
6	12	11	9	5	10	7	1	2	4	8	3
12	11	9	5	10	7	1	2	4	8	3	6
11	9	5	10	7	1	2	4	8	3	6	12
9	5	10	7	1	2	4	8	3	6	12	11
5	10	7	1	2	4	8	3	6	12	11	9
10	7	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
7	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10

Для складених непарних значень та простих значень обсягів твірний масив P(n) складається з твірних підмасивів:

$$P(n)=P_1(n_1)P_2(n_2) \ldots P_k(n_k), \tag{6}$$

де $n = N-1= {}^{k}\Sigma i=1\ n_i$ – розмірність твірного підмасиву; k – кількість твірних підмасивів.

Структура базисної матриці Vp визначається на основі твірних масивів і містить підматриці. За твірним підмасивом $P(n_i)$ формуються циклічні зліва підматриці. Наприклад, для простого обсягу N=17 твірний масив дорівнює

P(16) = (1 2 4 8 16 15 13 9) (3 6 12 7 14 11 5 10),

матриця Vp містить чотири підматриці. Для обсягу N=15=3x5 твірний масив дорівнює

$P(14)= P_1(4)P_2(4)\ P_3(2)P_4(4) = (1, 2, 4, 8)\ (3, 6, 12, 9)\ (5, 10)\ (7, 14, 13, 11)$,

матриця Vp містить 16 підматриць.

За твірним підмасивом $P(n_i)$ шляхом циклічного зсуву вліво формуються рядки квадратної підматриці в матриці Vp елементів аргументів базису ДПХ. Кількість та обсяг твірних підмасивів визначають структуру базисної матриці Vp елементів аргументу.

Для парних значень обсягу перетворення виду N=2*p, (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 58,...,).

Загальна структура базисної матриці Vp для парних обсягів має вигляд

$$Vp = \begin{pmatrix} Vo & Ve \\ Ve & Ve \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де Vo – підматриця, що містить початкові непарні елементи; Ve – підматриця, що містить початкові парні елементи, V'e – підматриця, що містить початкові зміщені парні елементи. Наприклад, загальна структура (7) відповідає обсягу N=14=2x7 з твірним масивом, що дорівнює

$P(13)= P_1(6)\ P_2(1)\ P_3(6) = (\ 1, 3, 9, 13, 11, 5)\ (7)\ (8, 10, 2, 6, 4, 12)$,

матриця Vp, сформована на його основі, має вигляд

Vp =

1	3	9	13	11	5	7	8	10	2	6	4	12
3	9	13	11	5	1	7	10	2	6	4	12	8
9	13	11	5	1	3	7	2	6	4	12	8	10
13	11	5	1	3	9	7	6	4	12	8	10	2
11	5	1	3	9	13	7	4	12	8	10	2	6
5	1	3	9	13	11	7	12	8	10	2	6	4
7	7	7	7	7	7	7	0	0	0	0	0	0
8	10	2	6	4	12	0	8	10	2	6	4	12
10	2	6	4	2	8	0	10	2	6	4	12	8
2	6	4	12	8	10	0	2	6	4	12	8	10
6	4	12	8	10	2	0	6	4	12	8	10	2
4	12	8	10	2	6	0	4	12	8	10	2	6
12	8	10	2	6	4	0	12	8	10	2	6	4

Для обсягу N=18=2x3x3 з твірним масивом, що дорівнює

P(17)= (1 5 7 17 13 11) (2 10 14 16 8 4) (3 15) (6 12) (9)

базисна матриця Vp, сформована на його основі, має вигляд загальної структури (7), причому підматриці Vo, Ve містять менші підматриці, сформовані за твірними підмасивами (1 5 7 17 13 11) (3 15) для Vo та (2 10 14 16 8 4) (3 15) (6 12) для Ve.

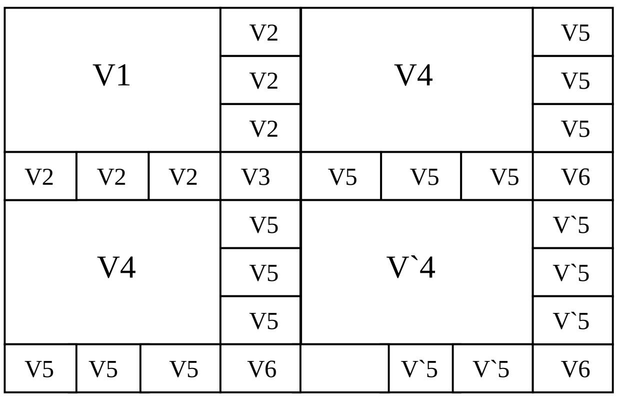

*Рис. 2. Структура базисної матриці ДПХ обсягу **N=18***

Підматриці в структурі базисної матриці мають вигляд

V1 =

1	5	7	17	13	11
5	7	17	13	11	1
7	17	13	11	1	5
17	13	11	1	5	7
13	11	1	5	7	17
11	1	5	7	17	13

V4 =

2	10	14	16	8	4
10	14	16	8	4	2
14	16	8	4	2	10
16	8	4	2	10	14
8	4	2	10	14	16
4	2	10	14	16	8

V `4 =

4	2	10	14	16	8
2	10	14	16	8	4
10	14	16	8	4	2
14	16	8	4	2	10
16	8	4	2	10	14
8	4	2	10	14	16

V2 =		V3 =		V5 =		V`5 =		V6 =	
3	15	9	9	6	12	12	6	0	0
15	3	9	9	12	6	6	12	0	0

Отже, загальна структура базисної матриці аргументів ДПХ залежить від значення обсягу перетворення і може містити від однієї матриці до кількох підматриць, що повторюються як по горизонталі, так і по вертикалі.

Спрощення значень матриці аргументів базису ДПХ. Залежно від значення обсягу перетворення, враховуючи симетричність функції cas $(2\pi kn/N)$ (рис. 1) стосовно – осі $\pi/4$ на проміжку $(0, \pi/2)$; осі π на проміжку $(0, 2\pi)$; осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$; осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$ у матриці елементів аргументів V (4), можна визначити елементи v(r,k), що можуть набувати значення від [1,…,{N/8}] та [{N/4},…,{N/2}] з набору 0(1)N, доповнюючи значеннями +1,-1 матриці знаків Z касинуса.

Для непарних значень обсягу перетворення N = p, (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,...,) значення аргументів базису ДПХ не належать до перерахованих осей симетрії. Тому структура матриць Vp, сформованих за твірним масивом P(n), не міститиме спрощених елементів.

Для парних значень обсягу перетворення існує значення елементів матриці базису ДПХ, що дорівнює N/2, що відповідає аргументу π. Це визначає відповідну рівність абсолютних значень функції касинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Тому відповідні значення елементів матриці V’p можуть дорівнювати одному з значень 1,…, N/2-1, тобто замінені за формулою

$$I = N/2+i, \text{ для } i = 1,\ldots, N/2-1,$$

та доповненими відповідною матрицею знаків Z.

Матрицю знаків Z(n) одержують на основі твірного масиву P(n) за умовою

$$Z(i) = \begin{cases} +1, & 7N/8< P(i) <3N/8, \\ -1, & 3N/8< P(i) <7N/8 , \\ 0, & P(i)= 3N/8, 7N/8 . \end{cases} \quad (8)$$

Для зручності позначення використовуватимемо “+” замість +1, “-“ замість -1.

Для парних значень обсягу перетворення виду N=4*p, (12, 20, 28, 36, 44, 52, 60,...,) існує значення матриці базису ДПХ, що дорівнює N/2, що відповідає аргументу π. Це визначає відповідність абсолютних значень функції касинуса на проміжках $(0, \pi)$ та $(\pi, 2\pi)$. Також для множини цих обсягів існують значення матриці базису ДПХ, що дорівнюють N/4, та 3N/4, що відповідають симетрії до осі $3\pi/4$ на проміжку $(0, 3\pi/2)$ та осі $5\pi/4$ на проміжку $(\pi/2, 2\pi)$ функції касинуса. Тому завдяки симетричному відображенню відповідні значення елементів матриці V’p спрощуються. Одне значення присвоюється для відповідних на проміжку симетрії, тобто замінюються:

1) i=N/2+i, на проміжку аргумента $(0, 2\pi)$ з вісю N/2 для i=1,…, N/2;

2) i= N/4-i = N/2+i= 3N/4-i на проміжку аргументу $(0, \pi/4)$ з вісю N/8 для i=1,…, N/8 ;

3) N/4+i = N/2-i= 3N/4+i = N- i на проміжку аргументу $(\pi/2, 3\pi/4)$ з вісю $3\pi/4$ для i=1,…, N/8.

Отже, спрощена матриця V’p містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, з доповненням відповідними значеннями матриці знаків Z. Наприклад, для обсягу N = 20 твірний масив дорівнює

P(19) = (1 3 9 7) (11 13 19 17) (2 6 18 14) (4 12 16 8) (5 15) (10), спрощений твірний масив

$$P'(19) = (1\ 2\ 6\ 7)\ (1\ 2\ 6\ 7)\ (1\ 2\ 6\ 7)\ (2\ 6\ 7\ 1)\ (5\ 5)\ (5),$$

доповнення матрицею знаків

$$Z(n) = (+, +, -, +)\ (+, -, -, -)(\ -, -, +, -)(+,+,+, -)(+1, -1)(-1).$$

Для парних значень обсягу перетворення виду N=8*p, (24,40,48,56,72,80,88,96,104,...,) та $N=2^n$ (4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...,) до значень елементів, що дорівнюють N/4, N/2, 3N/4, що відповідають в матриці базису ДПХ відповідним аргументам $\pi/2$, π, $3\pi/2$ та значенням +1, -1, -1, додатково матимемо значення елементів N/8, 3N/8, 5N/8, 7N/8, що відповідають відповідно аргументам $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ та значенням $\sqrt{2}$, 0, $-\sqrt{2}$, 0. Тому спрощена матриця V'p містить значення елементів, що відповідають аргументам, розміщеним на проміжках $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, з доповненням відповідними значеннями матриці знаків Z. Тобто завдяки симетричному відображенню елементам на проміжку $(0, \pi/4)$ присвоюються відповідні значення елементів проміжків $(\pi/2, \pi/4)$, $(\pi, 5\pi/4)$, $(3\pi/2, 5\pi/4)$; елементам на проміжку $(\pi/2, 3\pi/4)$, $(\pi, 3\pi/4)$, $(3\pi/2, 7\pi/4)$, $(2\pi, 7\pi/4)$. Наприклад, для обсягу N = 24 твірний масив P(23) та спрощений твірний масив P'(23) дорівнюють

$$P(23) = (1\ 5)\ (2\ 10)\ (3\ 15)\ (4\ 20)\ (6)\ (7\ 11)\ (8\ 16)\ (9\ 21)\ (12)\ (13\ 17)\ (14\ 22)\ (18)\ (19\ 23),$$

$$P'(23) = (1\ 1)\ (2\ \ 8)\ \ (3\ \ 3)\ \ (2\ \ 8)\ (6)\ (7\ \ 7)\ \ (8\ \ 2)\ \ (9\ \ 9)\ \ (12)\ \ (1\ \ 1)\ \ (2\ \ 8)\ \ (6)\ \ (7\ 7),$$

$$Z(23) = (+\ +)\ (+\ -)\ \ (+\ -)\ \ (+\ -)\ \ (+1)\ \ (+\ -)\ \ (+\ -)\ (0\ 0)\ \ (-1)\ \ (-\ -)\ \ (-\ +)\ (-1)\ \ (-\ +)\ ,$$

доповнення спрощеного твірного P'(23) масиву матрицею знаків Z(23).

Для обсягу N=32 твірний масив дорівнює P(31) та спрощений твірний масив P'(31) дорівнює

$$P(31) = (1\ 3\ 9\ 27\ 17\ 19\ 25\ 11)\ (5\ 15\ 13\ 7\ 21\ 31\ 29\ 23\ )(2\ 6\ 18\ 22)\ (10\ 30\ 26\ 14\ )\ (4\ 12\ )\ (8\ 24)\ (20\ 28)\ (16);$$

$$P'(31) = (1\ 3\ 9\ \ 11\ 1\ \ \ 3\ \ 9\ \ \ 11)\ (\ 3\ 9\ \ 11\ 1\ \ 3\ \ 9\ \ \ 11\ 1\ )\ \ (2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ )\ (\ 10\ \ 10\ \ 10\ \ 10)\ (4\ 12)\ (8\ 4\ )\ (4\ 12)\ (8),$$

$$Z(31) = \ (+\ \ +\ \ +\ -\ \ -\ -\ -\ +)\ (+\ -\ -\ +\ -\ +\ +\ -)\ (+\ \ +\ -\ \ -)\ (\ +\ \ +\ -\ -)\ (+\ \ 0)\ (1\ \ -1)\ (-\ \ 0)\ (-1).$$

Отже, базисну матрицю аргументів ДПХ можна сформувати за допомогою елементів декомпозиції – спрощеного твірного масиву індексів P'(n) та масиву знаків Z(n):

$$P'\ (n) = P'\ (n_1) P'\ (n_2)\ \ldots\ P'\ (n_k); \tag{9}$$

$$Z(n) = Z(n_1) Z(n_2)\ \ldots Z(n_k), \tag{10}$$

де n = N-1 – розмірність масиву; k – кількість підмасивів, елементи твірного масиву; n_k – цілі значення твірних масивів індексів P(n) в межах від 1 до N-1 та знаків Z(n) з +1, -1, 0.

Сформовані твірні масиви P'(n), Z(n) визначають структури спрощених матриць аргументів V'p базису ДПХ з доповненням відповідними еквівалентними матрицями знаків касинуса Z, що в сукупності становлять цілісність базису ДПХ для довільного обсягу перетворення. Взаємозв'язок елементів декомпозиції базису ДПХ потребує переставлення рядків і стовпців, відповідно до твірного масиву P(n). Під еквівалентністю матриць V'p та Z вважаються матриці одного порядку з однаковими властивостями, що можуть містити відповідні підматриці з однаковими порядками та властивостями, але складаються з різних елементів.

Обчислення ДПХ на основі проведеної декомпозиції. Одержана структура спрощених матриць V' і відповідних матриць знаків Z на основі P'(n), Z(n) визначає проведення обчислення ДПХ за допомогою циклічних згорток. Адже матриця V'p та Z або відповідні підматриці в матриці є циклічними зліва. Застосування швидких алгоритмів циклічних згорток [5] призводить до ефективного обчислення цього перетворення.

На підготовчому етапі проводиться переставлення вхідних даних x(i), i=1(1)N-1, що визначаються за твірним масивом P(n). Одночасно можуть визначатись коефіцієнти касинусних складових базису ДПХ, що беруть участь в операціях згортки. Для касинусної частини проводиться групування за P(n).

Аналіз структури спрощених матриць V' визначає порядок об'єднаних вхідних даних x(i). Цей аналіз виконується через визначення відповідних параметрів твірного масиву $P(n)=P(n_1)\ P(n_2)$ … $P(n_k)$ для цього обсягу перетворення. До таких взаємопов'язаних параметрів належать:

- N обсяг перетворення: a) N=p (просте або непарне); b) N=2p; (парні або кратні N=4p; $N=2^p$);
- k – кількість підмасивів у твірному масиві $P(n)=P(n_1)\ P(n_2)\ \ldots\ P(n_k)$;
- кількість елементів кожного твірного підмасиву $(t_1),(t_2),\ldots(t_k)$;

– кількість підматриць $m \geq k^2$ базової матричної структури;
– координати $(v_{i,j})$ і відповідні значення (p_{11}), (p_{21}),…(p_{m1}) перших елементів підматриць у матричній структурі;
– кількість повторень однакових підматриць $r<m$ визначається за однаковими значеннями перших елементів у матричній структурі та належності до відповідного твірного підмасиву;
– кількість підматриць, що починаються з (n_{ij}) проміжного елемента твірного підмасиву $P(n_i)$.

Для підматриць, що містять як по горизонталі, так і по вертикалі однакові значення аргументів у матриці V', проводяться об’єднання вхідних даних. Це зменшує кількість циклічних згорток, що необхідно буде виконати.

Другий етап включає саме виконання циклічних згорток над об’єднаними вхідними даними та згрупованими значеннями касинусної функції. Незалежне обчислення циклічних згорток використовує ефективні алгоритми швидких згорток [6]. Серед особливостей виконання можна виділити обчислення симетричних циклічних згорток для парних обсягів з довільних послідовностей обсягів. Наприклад, виконання симетричних циклічних згорток виконується серед обсягів N, що дорівнюють цілому степеню два. Для цих обсягів можна узагальнити одержану структуру базисної матриці та подати: k – кількість підмасивів у твірному масиві, обсяг – d згорток та кількість – s на основі цього підходу у вигляді таблиці.

Циклічні згортки в структурі базису ДПХ обсягів цілого степеня два

N	16	32	64	128	...
k	6	8	10	12	
d/s	4/4 2/2 1	8/4 4/4 2/2 1	16/4 8/4 4/4 2/2 1	32/4 16/4 8/4 ... 1	...

На завершальному етапі на основі одержаної матричної структури об’єднуємо одержані значення циклічних згорток, і компонуючи відповідні одержані значення, проводимо обчислення вихідних значень дійсних дискретних коефіцієнтів ДПХ.

Висновки. Показано, як на основі переставлення елементів вхідної послідовності ефективно обчислюється ДХП за допомогою ефективних алгоритмів циклічної згортки. Визначення твірного массиву, за яким відбувається переставлення, не потребує складних обчислень і визначається на основі рядка базисної матриці аргументів (4). Використання твірного масиву приводить до однотипного підходу в організації обчислення ДПХ під час проектування обчислювальних засобів послідовностей довільного обсягу. Окреме проведення обчислень циклічних згорток, на який структуровано базис ДПХ, як і подальше об’єднання одержаних результатів, дає змогу розпаралелювати процес обчислення і підвищувати швидкодію опрацювання інформації.

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цыфровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. 2. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. 3. Злобин С.Л. Матричные рекуррентные алгоритмы преобразования Хартли по основаниям 2 и 4 повышенного быстродействия. – М.: Радиотехника, 11, 2009. 4. Jonckheere E.A., Chingwo M.A. Split-Radix Fast Hartley Transform in One and Two Dimensions // IEEE TASSP. – 1991. – Vol. 39, № 2. 5. Процько І.О. Приведення до ефективних обчислень довільних обсягів ортогональних перетворень Хартлі // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2004. – № 522: Комп'ютерні системи проектування. 6. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983.