УДК 621.313

П. Скоропад[1], В. Чабан[2], З. Гоголь[1]
Національний університет "Львівська політехніка",
[1]кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,
[2]кафедра теоретичної та загальної електротехніки

ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ МОНОДРОМІЇ В РОЗБУДОВІ АЛГОРИТМІЧНИХ ОСНОВ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПРОЕКТУВАННЯ

Розглянуто задачу обчислення матриці монодромії на прикладі виконавчого конденсаторного асинхронного мотора як компонента комп'ютерної системи.

The article considers the problem of determination of monodromy matrix on exemple of condenser induction motor as component of computer system.

Аналіз останніх досліджень. Для розв'язання поставленої задачі необхідно було розв'язати спершу кілька важливих теоретичних задач, зокрема: побудувати математичну модель пристрою, а також допоміжну модель параметричної чутливости [1]. Це й стало підставою побудови матриці монодромії, а на її основі просимулювати перехідний і усталений процеси виконавчого конденсаторного мотора й визначити статичну стійкість усталених процесів [1].

Постановка задачі. Матриця монодромії будь-якого фізичного пристрою використовується під час аналізу усталених процесів, статичної стійкості й параметричної чутливості. Покажемо, як знаходити її на прикладі одного з виконавчих компонентів комп'ютерної системи – виконавчого конденсаторного асинхронного мотора.

Математична модель мотора. Обмотка ротора мотора за кількістю витків вважається приведеною до обмоток статора. Струми обмотки ротора приводяться також за частотою до струмів обмотки статора. У такому разі рівняння електромагнетного стану мотора можна записати у вигляді [1]:

$$\frac{di}{dt} = A(u - \Omega'\Psi - Ri), \tag{1}$$

де

$$\begin{bmatrix} \lambda_S \\ \lambda_R \end{bmatrix}, \ \lambda = u, \Psi, i; \quad A = \begin{bmatrix} A_S & A_{SR} \\ A_{RS} & A_R \end{bmatrix}; \quad \Omega' = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \Omega \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_S & \\ & R_R \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$i_k = (i_{kA}, i_{kB})_t$, $k = S, R$ – колонки фазних струмів статора й перетворених струмів ротора; $u_k = (u_{kA}, u_{kB})_t$, $k = S, R$ – колонки фазних напруг статора; A_S, A_{SR}, A_{RS}, A_R – матриці коефіцієнтів:

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G); \ A_{SR} = A_{RS} = -\alpha_S \alpha_R G; \ A_R = \alpha_R(1 - \alpha_R G), \tag{3}$$

де G, Ω – матриці

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A i_A & b_B i_A \\ b_A i_B & T + b_B i_B \end{bmatrix}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

причому

$$b_A = b(2i_A + i_B); \quad b_B = b(i_A + 2i_B); \quad b = \frac{2}{3}\frac{R - T}{i_m^2};$$
$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \qquad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau}, \tag{5}$$

де τ, ρ – обернені статична й диференціальна індуктивності, їх знаходимо за характеристикою намагнечування (неробочого стану) машини як

$$\tau = \left[\frac{\psi_m(i_m)}{i_m}\right]^{-1}; \quad \rho = \left[\frac{d\psi_m(i_m)}{di_m}\right]^{-1}, \tag{6}$$

де i_m – модуль просторового вектора намаґнечувальних струмів:

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2)/3}; \quad i_A = i_{SA} + i_{RA}; \, i_B = i_{SB} + i_{RB}. \tag{7}$$

За відсутності насичення характеристика намаґнечування вироджується в пряму $i_m = \alpha_m \psi_m$, де α_m – обернена основна індуктивність, а матриця (4) згідно з (6) – у діагональну:

$$G = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

що значно спрощує рівняння (1). У такому разі ми отримаємо найпростішу з усіх відомих математичну модель асинхронного мотора; R_S, R_R – матриці опорів:

$$R_s = \begin{bmatrix} r_S & \\ & r_S \end{bmatrix}; \quad R_R = \begin{bmatrix} r_R & \\ & r_R \end{bmatrix}, \tag{9}$$

причому $\alpha_S, \alpha_R,$ – обернені індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; r_S – опір фаз статора; r_R – приведений опір обмотки ротора; Ω – матриця кутової швидкості ω.

Компоненти колонки повних потокозчеплень обмотоки ротора знаходимо так:

$$\Psi_{Rj} = \frac{1}{\tau}(i_{Sj} + i_{Rj}) + \frac{1}{\alpha_R} i_{Rj}. \quad j = A, B. \tag{10}$$

Елементи колонок напруг статора й ротора:

$$u_S = U_m \sin(\omega_0 t) - u_C/3, U_m \sin(\omega_0 t - 120^0)_t - u_C/3; \quad u_R = 0, \tag{11}$$

де U_m, ω_0 – амплітуда й кругова частота напруги мережі; u_C – напруга конденсатора.

Зрозуміло, що диференціальне рівняння (1) потрібно доповнити рівнянням конденсатора:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i_{SA} + i_{SB}}{C}, \tag{12}$$

де С – ємність конденсатора.

Рівняння механічного стану одержимо на підставі рівняння Лаґранжа, нехтуючи штивністю та дисипацією:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M(\omega)), \quad M_E = \sqrt{3} p_0 (\Psi_{SA} i_{SB} - \Psi_{SB} i_{SA}), \tag{13}$$

де $M(\omega)$ – механічний момент; p_0 – кількість пар маґнетних полюсів; J – момент інерції ротора; M_E – електромаґнетний момент. Формулу (13) одержано, враховуючи запас електромаґнетної енерґії у контурах машини.

Система диференціальних рівнянь (1), (12), (13) – математична модель виконавчого конденсаторного асинхронного мотора. Вона призначається для аналізу перехідних і усталених процесів. Для практичного користування нею необхідно знати такі вхідні дані: опори й обернені індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; характеристику неробочого стану, а за неврахування насичення головного маґнетного кола – обернену основну індуктивність машини, ємність конденсатора, кількість пар маґнетних полюсів і момент інерції ротора. Вхідними сигналами є: фазні напруги живлення, механічний момент на валу.

Побудова матриці монодромії. Утворимо колонку невідомих x:

$$x = (i, u_C, \omega)_t; \quad x(t)_{|t=+0} = x(0). \tag{14}$$

Для побудови допоміжної моделі чутливості утворимо колонку невідомих y:

$$y = (\Psi, u_C, \omega)_t. \tag{15}$$

Відповідне (18) рівняння (1) буде

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - \Omega'\Psi - Ri. \tag{16}$$

Матрицю монодромії запишемо у такому вигляді [1]:

$$\Sigma = (\mathrm{A}z, q, w)_t, \tag{17}$$

де

$$z = \frac{\partial \Psi}{\partial x(0)}; \quad q = \frac{\partial u_C}{\partial x(0)}; \quad w = \frac{\partial \omega}{\partial x(0)}. \tag{18}$$

Варіаційні рівняння для обчислення субматриць (18) одержимо диференціюванням по $x(0)$ рівнянь електромеханічного стану (12), (13), (16).

Диференціюючи (16), одержимо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x(0)} + (\Omega' - R\mathrm{A})z + \frac{\partial \Omega'}{\partial \omega} w\Psi. \tag{19}$$

Перша похідна по $x(0)$ у (22) згідно з (13)–(15) буде

$$\frac{\partial u}{\partial x(0)} = -\frac{1}{3}\left(q, q, 0, 0\right). \tag{20}$$

Диференціюючи по $x(0)$ (12), одержимо

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)} + \frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)}\right). \tag{21}$$

Диференціюючи по $x(0)$ (13), одержимо

$$\frac{dw}{dt} = \frac{p_0}{J}\left(\sqrt{3}p_0\left(\frac{\partial \Psi_{SA}}{\partial x(0)} i_{SB} + \Psi_{SA}\frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)} - \frac{\partial \Psi_{SB}}{\partial x(0)} i_{SA} + \Psi_{SB}\frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)}\right) - \frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} w\right). \tag{22}$$

Частинні похідні $\partial\Psi_{SA}/\partial x(0), \partial\Psi_{SB}/\partial x(0), \partial i_{SA}/\partial x(0), \partial i_{SB}/\partial x(0)$ є елементами матриць z, Az, тому вони відомі.

Отже, побудова матриці монодромії виконавчого конденсаторного асинхронного мотора вимагає інтегрування рівнянь першої варіації (19), (21), (22).

Запропонований метод аналізу отримав всебічну перевірку у складних задачах електромеханіки і виявився ефективним*.

Висновки: 1. Обчислення матриці монодромії фізичних пристроїв найпростіше здійснюється на підставі інтегрування рівнянь першої варіації диференціальних рівнянь стану пристрою.

2. Тільки на підставі матриці монодромії є практична можливість будувати загальні алгоритми аналізу фізичних пристроїв у повному обсязі, використовуючи подібний математичний апарат загальної теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Це стосується аналізу перехідних і усталених процесів, визначення статичної стійкості знайдених усталених процесів і, на кінець, знаходження матриці параметричних чутливостей у перехідних і усталених процесах.

---

* *Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010. – 508 с.*