УДК 004.932.4

А.І. Андрухів
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електронних обчислювальних машин

АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ

Паралельно з прогресом в галузі розроблення томографічної апаратури вдосконалюється теорія реконструкції зображень. Ітеративний підхід є важливий у комп’ютеній томографії, і з швидким розвитком комп’ютерних технологій йому приділяють все більше уваги. Наведено класичні результати роботи типового представника ітеративних алгоритмів – алгебраїчного методу відновлення зображення та його модифікацію: синхронний алгебраїчний метод відновлення зображення.

The iterative approach is important for computed tomography and attracting more and more attention with the rapid evolution of computer technology. In this paper, classic results and recent advances on iterative algorithm for image reconstruction are reviewed such as the algebraic reconstruction technique and simultaneous algebraic reconstruction technique

Вступ. Теорію реконструкції зображень покладено в основу функціонування будь-якого сканера. Паралельно з прогресом в галузі конструювання томографічної апаратури вдосконалювалася теорія реконструкції зображень, що, своєю чергою, стимулювало нові розробки апаратури, а також дало змогу прогнозувати оптимальні умови отримання зображень і конструктивні вимоги для нової апаратури. Для розв’язання задачі реконструкції зображень запропоновано багато різних методів, кожний з яких забезпечував хоч і невелике, але все-таки важливе поліпшення якості зображення.

Алгоритми реконструкції зображень розподіляють на дві великі групи[4]:

- аналітичні алгоритми;
- ітеративні алгоритми.

До першої групи належать:

1. Алгоритми зворотного проеціювання;
2. Двовимірна реконструкція за Фур’є.

До другої групи належать:

1. Традиційні алгоритми:
2. Алгебраїчний метод відновлення (ART);
3. Метод одночасного ітеративного відновлення (SIRT);
4. Ітеративний метод найменших квадратів (ILST).

Сучасні алгоритми:

- алгоритм максимізації математичного очікування максимуму правдоподібності (ML – EM);
- алгоритм максимізації математичного очікування упорядкованих підсистем проекційних даних (OS – EM);
- алгоритм коротшого спуску (ICD) та інші.

Аналітичні алгоритми простіші при достатньо повних неспотворених вихідних даних. Вони працюють значно швидше і дають зображення високої якості. Точніші ітеративні методи реконструкції, особливо за недостатньо повних вихідних даних, за малої кількості проекцій [2]. Але вони працюють повільніше порівняно з аналітичними алгоритмами. Для їх реалізації потрібна потужніша комп’ютерна техніка.

Постановка задачі. Відновлення зображень відіграє значну роль у різноманітних прикладних задачах. Сформулювати задачу відновлення можна так:

$$Ax = b\,,$$

де $b=(b^1,\ldots,b^M)\in R^M$ – отримане зображення, $x=(x_1,\ldots,x_M)\in R^N$ – вхідне (оригінальне) зображення та $A=(A_{ij})$ – це ненульова матриця розміром $M\times N$. Задача полягає у відновленні зображення x з зображення b[3]. Цю задачу важко розв'язати звичайними прямими методами через її некоректний вигляд, через зашумленість та велику розмірність потоку(зображення) b.

Алгебраїчний метод відновлення зображення. Разом зі швидким розвитком комп'ютерних технологій велику увагу під час оброблення зображень почали приділяти ітеративним алгоритмам. Їх можна класифікувати за критеріями та шляхами оновлення проміжних результатів роботи алгоритмів. Фактично критерій класифікації зводиться до мінімізації функції найменших квадратів або I-розходження, що еквівалентно максимізації ймовірності у гауссовому чи пуассоновому полях.

Алгебраїчна методика відновлення (ART-методика) та алгоритм максимізації очікування – найтиповіші представники ітеративних алгоритмів.

ART-алгоритми ґрунтуються на простій інтуїтивній основі. Беремо матрицю пікселів зображення розміром $n\times n$, $p_j\,(j=1,\ldots,n^2)$ – числовий показник густини зображення. У цьому квадраті проводимо промінь між двома паралельними лініями. ART-алгоритм полягає у аналізі кольору кожного пікселя проведеного променя за такою математичною моделлю[4].

Нехай P – це матриця з $m\times n^2$ елементів, де m компонент вектора R, $p_{i,j}$ – (i,j)-й елемент P, R_i – i-й промінь відновлюваної проекції вектора R. Для $1\le i\le m$, N_i – число пікселів проекції променя R_i,і яке визначається за виразом $N_i=\sum_{j=1}^{n^2} p_{i,j}^2$. Значення p_j^q – значення p_j після q ітерації. Після q ітерації інтенсивність відновлюваного променя становить

$$R_i^q=\sum_{j=1}^{n^2} p_{i,j}\rho_j^q\ ,$$

і відповідно значення кожного пікселя обчислюється як

$$\rho_j^{\sim q+1}=\rho_j^q+p_{i,j}\frac{R_i-R_i^q}{N_i}\text{, враховуючи, що } \rho_j^{\sim 0}=0\ ,$$

де R_i – значення проектованого променя та

$$i=\begin{cases} m,\ якщо\ (q+1)\ є\ кратним\ m \\ залишок\ від\ ділення\ (q+1)\ на\ m \end{cases},$$

а також

$$\rho_j^q=\begin{cases} 0, & якщо\ p^{\sim q}\le 0 \\ \rho_j^{\sim q}, & якщо\ 0\le\rho_j^{\sim q}\le 1 \\ 1, & якщо\ \rho_o^{Ëй}\ge 1 \end{cases}$$

Це вигляд загального ART – алгоритму, який широко використовується у задачах комп'ю-терної томографії. S. Kaczmarz спростив алгоритм, звівши його до вигляду[6]:

$$x_j^{(n+1)}=x_j^{(n)}+\lambda_n\frac{A_{ij}}{\|A^i\|^2}(b^i-A^ix^{(n)})\ ,$$

де $i=n\ mod(M)+1$, $\|A^i\|^2=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^2$ – Евклідова норма i-го рядка масиву A.

У 1984 році було запропоновано модифікації до ART-методу J. Browne і фактично він став основою для багатьох систем відновлення зображень у комп'ютерній томографії та отримав назву Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) .

Нехай

$$A_{i,+} = \sum_{j=1}^{N} | A_{ij} |, \quad i = 1, \ldots, M \, , \; A_{+,j} = \sum_{i=1}^{N} | A_{ij} \, , \quad j = 1, \ldots, N \, .$$

Тоді SART функція набуває вигляду

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} + \lambda \frac{1}{A_{+,j}} \sum_{i=1}^{M} \frac{A_{ij}}{A_{i,+}} (b^i - A^i x^{(n)})$$

Результати роботи алгоритму. Тестове зображення взято з [1] і набуває вигляду, як на рис. 1.

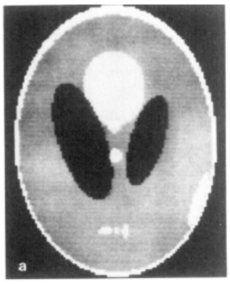

Рис. 1. Оригінальне зображення

Як результат роботи ART та SART-алгоритму отримаємо такі зображення

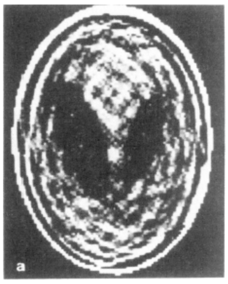

Рис. 4. Зображення, отримане в результаті роботи ART-алгоритму

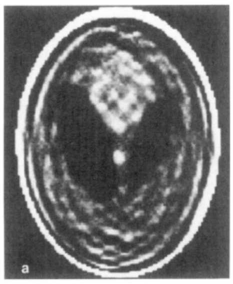

Рис. 5. Зображення, отримане в результаті роботи SART-алгоритму

Висновки. Отже, у статті було розглянуто алгебраїчний метод відновлення зображення та його модифікація як типові представники ітеративних методів реконструкції. ART та SART методи є ефективними у разі недостатньо повних вихідних даних, а також при малій кількості проекцій. Як показують результати, ART та SART алгоритми є ефективними в задачах відновлення зображень, хоча і мають недолік – час роботи є великим. Збільшення кількості ітерацій призводить до суттєвого покращення якості зображення, проте збільшується і час роботи.

1. Andersen A.H. and Kak A.C. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm // Ultrasonic Imaging. – 1984. – P. 81–94. 2. Trummer M.R. Reconstructing pictures from projections: on the convergence of the ART algorithm with relaxation // Computing(3). – 1981. – P. 189–195. 3. Trummer M.R. A note on the ART of relaxation // Computing(3–4). – 1984. – P. 349–352. 4. Jiang M. and Wang Ge. Development of iterative algorithms for image reconstruction. – 2005. – P. 77–86 5. Raparia D., Alessi J., Kponou A. The algebraic reconstruction technique. – 2006. 6. Algebraic Reconstruction Algorithms // COMPUTERIZED TOMOGRAPHIC IMAGING. – 2006. – P. 275–296