УДК 528.236.517.54

А. В. БУТКЕВИЧ, д-р техн. наук,
Львовский политехнический институт,
В. Г. КИРИЛЛОВ,
Кадиевский филиал Коммунарского горно-металлургического института

О КОНФОРМНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

В 1975 г. М. Н. Булушев в статье [2] привел обзор методов конформного преобразования координат в трехмерном пространстве для целей фотограмметрии. Однако он допустил ряд методических и фактических ошибок, а историю вопроса изложил с большими неточностями, не ссылаясь на работы ряда авторов, в том числе советских [6, 7].

Так, он применял неудачную и нечеткую терминологию и писал «конформные полиномы» (вместо «полиномы для конформного преобразования»), «пространственные полиномы» (вместо «полиномы для совместного преобразования координат $X, У, H$») и, наконец, «квантерионы» (?!) (вместо «кватернионы») и т. д. Он ссылался на работы М. Эдварда, но мы не нашли в литературе такого автора. Оказалось, что М. Н. Булушев перепутал имя и фамилию американского геодезиста Эдварда Михаеля [12], который, кстати, применил другой метод вывода формул (без использования кватернионов).

Применив для вывода формул конформного преобразования кватернионы, М. Н. Булушев, по сути дела, повторил опубликованную в 1970 г. работу [6], но окончательные формулы (42)—(44) получил с ошибками в знаках и не сослался на ряд работ по данному вопросу.

Поэтому в данной статье мы делаем краткий обзор развития методов конформного преобразования в пространстве и обсуждаем возможности использования алгебры кватернионов, уточняем понятие конформности в пространстве трех и четырех измерений и рассматриваем использование конформных преобразований в пространстве для целей геодезии, имеющее свои особенности.

Одна из важнейших задач современной геодезии — связь изолированных (квазигеоцентрических) систем координат и создание единой мировой геоцентрической системы пространственных прямоугольных координат $X, У, Z$, связанной с центром масс Земли.

Однако, поскольку в геодезии используются прямоугольные системы координат, следует для их связи рассматривать лишь ортогональные * и подобные преобразования, относящиеся к группе конформных ** и характеризующиеся ортогональной матрицей связи, в которой суммы квадратов элементов строк и столбцов равны единице. В фотограмметрии приходится применять также аффинные и коллинеарные (проективные) преобразования [6].

Как показал в 1881 г. М. Схольс [13], наиболее удобным аппаратом для получения формул конформного преобразования на плоскости, в том числе и нелинейного, являются комплексные числа (векторы):

$$\rho' = x' + iy'; \quad \rho = x + iy. \tag{1}$$

Задаваясь видом преобразования $\rho' = f_a(\rho)$, где f_a — аналитическая функция, он использовал простейшую связь (степенной ряд)

$$\rho' = A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + \cdots = (a_0 + ib_0) + (a_1 + ib_1)(x + iy) + \\ + (a_2 + ib_2)(x + iy)^2 + \cdots. \tag{2}$$

---

* Согласно работе [1], мы называем *ортогональным* преобразование подобия с линейным масштабом $m = 1$.

** При *конформном* преобразовании подобие сохраняется лишь в бесконечно малых областях.

После перемножения и отделения действительных и мнимых слагаемых М. Схольс получил формулы для нелинейного конформного преобразования на плоскости (с шестью коэффициентами):

$$x' = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 (x^2 - y^2) - 2b_2 xy + \cdots; \tag{3}$$

$$y' = b_0 + b_1 x + a_1 y + 2a_2 xy + b_2 (x_2 - y^2) + \cdots, \tag{4}$$

удовлетворяющие известным условиям конформности Коши-Римана:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}. \tag{5}$$

Из них как частный случай (при $a_2 = b_2 = 0$) получаются формулы для линейного конформного преобразования Ф. Гельмерта (1895), Н. А. Урмаева (1924), Н. Г. Келля (1926), И. Ришави (1928) и др. с четырьмя параметрами (a_0, b_0, a_1, b_1 или δx_0, δy_0, $\delta\alpha$, δm).

Формулы Схольса (3), (4) можно успешно использовать для решения различных задач перехода:

а) от одной конформной проекции к другой;

б) из одной зоны проекции в другую;

в) от местной системы координат к общегосударственной;

г) с одного эллипсоида на другой и т. д.

Некоторым недостатком формул (3), (4) является сложность вычисления их коэффициентов при большом числе общих пунктов и искажение направлений, определяемое формулой Н. А. Урмаева

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{s}{R_\alpha}, \quad (6) \qquad \text{где } \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \ln m}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial y}\sin\alpha.$$

Естественно, возникает мысль применить для конформного преобразования пространственных координат X, Y, Z трехмерные векторы (тернионы) вида

$$\rho = X + iY + jZ. \tag{7}$$

Однако такое преобразование нельзя осуществлять из-за ограниченности алгебры тернионов. Действительно, последовательное умножение единичного вектора $+1$ на $\sqrt{-1} = i$ равносильно поворотам его вокруг оси Z против часовой стрелки на угол 90° (рисунок) [6, 9].

Тогда, очевидно, последовательное умножение вектора $+1$ на третью базисную единицу j будет соответствовать его поворотам на 90° вокруг оси Y. А для поворотов вектора вокруг оси X в алгебре тернионов не хватает четвертой базисной единицы, на которую нужно его для этого умножать.

Поэтому большим событием в математике явилось открытие У. Гамильтоном в 1853 г. гиперкомплексных чисел — кватернионов вида [9]

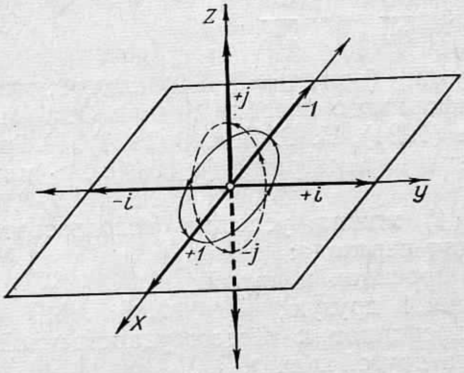
$$\rho = 1 \cdot X + iY + jZ + kT, \tag{8}$$

которые имеют особые правила умножения:

$$1\cdot i=i\cdot 1=j\cdot k=-k\cdot j=i;\quad i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=-1; \tag{9}$$

$$1\cdot j=j\cdot 1=k\cdot i=-i\cdot k=j;\quad k\cdot 1=1\cdot k=i\cdot j=-j\cdot i=k. \tag{10}$$

Однако в течение долгого времени (почти 100 лет) кватернионы не использовались в математике и инженерных науках. Но развитие в конце 50-х годов пространственной и космической геодезии и фотограмметрии потребовало нового математического аппарата. По-видимому, почти одновременно Г. Шют в Канаде в 1962 г. [14], Э. Михаель в США в 1964 г. [12] и А. В. Буткевич в СССР в 1963 г. [5] подошли к мысли об использовании кватернионов для получения формул конформного преобразования в пространстве, подобно тому, как М. Схольс использовал комплексные числа для плоскости *.



Повороты единичного вектора при умножении на i^n и j^n.

Г. Шют [14] при выводе формул направлял по действительной оси четвертую координату (очевидно, для равноправности, т. е. однородности координат X, $У$, Z). При этом он исходил из уравнения

$$1\cdot T'+iX'+jY'+kZ'=(a_0+ib_0+jc_0+kd_0)+$$
$$+(a_1+i\cdot b_1+jc_1+kd_1)(T+i\cdot X+j\cdot Y+kZ)+$$
$$+(a_2+i\cdot b_2+jc_2+kd_2)(T+i\cdot X+j\cdot Y+k\cdot Z)^2+\cdots \tag{11}$$

с двенадцатью коэффициентами (четыре сдвига, четыре поворота и четыре растяжения).

После перемножения скобок и расщепления уравнения (11) на действительные и мнимые части он вывел с учетом связей (9), (10) формулы:

$$T'=a_0+a_1T-b_1X-c_1Y-d_1Z+a_2(T^2-X^2-Y^2-Z^2)-$$
$$-2b_2TX-2c_2TY-2d_2TZ; \tag{12}$$

$$X'=b_0+b_1T+a_1X-d_1Y+c_1Z+b_2(T^2-X^2-Y^2-Z^2)+$$
$$+2a_2TX+2c_2TZ-2d_2TY; \tag{13}$$

---

* По нашему мнению, применению формул Схольса и кватернионов в геодезии способствовала статья Г. Лоофа, вышедшая в свет в 1951 г. [11], в которой он опубликовал формулы Схольса.

$$Y' = c_0 + c_1 T + d_1 X + a_1 Y - b_1 Z + c_2 (T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 TY - 2b_2 TZ + 2d_2 TX; \qquad (14)$$

$$Z' = d_0 + d_1 T - c_1 X + b_1 Y + a_1 Z + d_2 (T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 TZ + 2b_2 TY + 2c_2 TX. \qquad (15)$$

Приравнивая затем избыточные координаты T' и T'' нулю, т. е. ставя дополнительное условие

$$a_0 - b_1 X - c_1 Y - d_1 Z - a_2 (X^2 + Y^2 + Z^2) = 0, \qquad (16)$$

он получил для трехмерного пространства «усеченные» формулы (без смешанных членов II порядка) с десятью коэффициентами:

$$X' = b_0 + a_1 X - d_1 Y + c_1 Z - b_2 (X^2 + Y^2 + Z^2); \qquad (17)$$

$$Y' = c_0 + d_1 X + a_1 Y - b_1 Z - c_2 (X^2 + Y^2 + Z^2); \qquad (18)$$

$$Z' = d_0 - c_1 X + b_1 Y + a_1 Z - d_2 (X^2 + Y^2 + Z^2). \qquad (19)$$

А. В. Буткевич [5] направил по четвертой оси дополнительную координату T (чтобы она не «мешала»), и исходил из уравнения

$$\rho' = X' + i \cdot Y' + j \cdot Z' + k \cdot T' = f\rho = \\ = (a_0 + i \cdot b_0 + j \cdot c_0 + kd_0) + (a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1) \times \\ \times (X + i \cdot Y + j \cdot Z + k \cdot T) + (a_2 + i \cdot b_2 + j \cdot c_2 + k \cdot d_2) \times \\ \times (X + i \cdot Y + j \cdot Z + k \cdot T)^2 + \cdots . \qquad (20)$$

После перемножения скобок он получил формулы с одиннадцатью коэффициентами [6]:

$$X' = a_0 + a_1 X - b_1 Y - c_1 Z - d_1 T + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) - \\ - 2b_2 (XY + ZT) - 2c_2 (XZ + YT) + 2d_2 (XT + YZ); \qquad (21)$$

$$Y' = b_0 + a_1 Y + b_1 X + c_1 T - d_1 Z + b_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2a_2 (XY - ZT) - 2c_2 (XT + YZ) - 2d_2 (XZ + YT) + \cdots; \qquad (22)$$

$$Z' = c_0 + a_1 Z - b_1 T + c_1 X + d_1 Y + c_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2a_2 (XZ + YT) - 2b_2 (XT + YZ) - 2d_2 (XY - ZT) + \cdots; \qquad (23)$$

$$T' = d_0 + a_1 T + b_1 Z + c_1 Y + d_1 X + d_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2a_2 (XT + YZ) - 2b_2 (XT - YZ) - 2c_2 (XY - ZT) + \cdots \qquad (24)$$

и для трехмерного пространства (при $T' = T = 0$):

$$X' = a_0 + a_1 X - b_1 Y - c_1 Z + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) - \\ - 2b_2 XY - 2c_2 XZ + 2d_2 YZ; \qquad (25)$$

$$Y' = b_0 + a_1 Y + b_1 X - d_1 Z + b_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 XY - 2c_2 YZ - 2d_2 XZ; \qquad (26)$$

$$Z' = c_0 + a_1 Z + c_1 X + d_1 Y + c_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 XZ + 2b_2 YZ - 2d_2 XY. \tag{27}$$

При этом он сформулировал [6] обобщенные для трехмерного пространства условия конформности Коши-Римана:

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = \frac{\partial Y'}{\partial Y} = \frac{\partial Z'}{\partial Z}; \tag{28}$$

$$\frac{\partial X'}{\partial Y} = -\frac{\partial Y'}{\partial X}; \quad \frac{\partial X'}{\partial Z} = -\frac{\partial Z'}{\partial X}; \quad \frac{\partial Y'}{\partial Z} = -\frac{\partial Z'}{\partial Y}, \tag{29}$$

но формулы (17)—(19) и (25)—(27) им не удовлетворяют в членах II порядка.

Заметим, что условия (28) и (29) еще не обеспечивают равенства пространственных углов. Первое из них приводит к равенству масштабов по осям координат, а второе — к сохранению проекций координатных углов на три координатные плоскости *.

Чем объяснить, что в формулах (25)—(27) одиннадцать, а не десять коэффициентов? В. Кириллов в 1974 г. показал, что А. В. Буткевич в [6] при выводе формул (25)—(27) допустил неточность, а именно принимал, что

$$(X + iY + jZ + kT)^2 = (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2i \cdot XY + 2j \cdot XZ + 2k \cdot XT + 2k\, YZ - 2j\, YT + 2i\, ZT, \tag{30}$$

тогда как в действительности

$$(X + i \cdot Y + j \cdot Z + k \cdot T)^2 = (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2i \cdot XY + 2j \cdot XZ + 2k \cdot XT. \tag{31}$$

Если исправить эту неточность, то формулы (21)—(24) примут вид:

$$X' = a_0 + a_1 X - b_1 Y - c_1 Z - d_1 T + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) - \\ - 2b_2 XY - 2c_2 XZ - 2d_2 XT; \tag{32}$$

$$Y' = b_0 + b_1 X + a_1 Y - d_1 Z + c_1 T + b_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2a_2 XY - 2d_2 XZ - 2c_2 XT; \tag{33}$$

$$Z' = c_0 + c_1 X + d_1 Y + a_1 Z - b_1 T + c_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) + \\ + 2d_2 XY + 2a_2 XZ - 2b_2 XT; \tag{34}$$

$$T' = d_0 + d_1 X - c_1 Y + b_1 Z + a_1 T + d_2 (X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2) - \\ - 2c_2 XY + 2b_2 XZ + 2a_2 XT, \tag{35}$$

---

* Это аналогично тому, что в теории относительности инвариантным относительно преобразований является интервал $ds\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}$, но его проекции на оси расстояний и времени в разных системах отсчета различны [8].

а для трехмерного пространства (при $T=0$):

$$X' = a_0 + a_1 X - b_1 Y - c_1 Z + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) - \\ - 2b_2 XY - 2c_2 XZ; \qquad (36)$$

$$Y' = b_0 + b_1 X + a_1 Y - d_1 Z + b_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 XY - 2d_2 XZ; \qquad (37)$$

$$Z' = c_0 + c_1 X + d_1 Y + a_1 Z + c_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2d_2 XY + 2a_2 XZ. \qquad (38)$$

Но эти формулы также не удовлетворяют условиям (28) и (29).

Аналогичные формулы были получены другими авторами. Так, Э. Михаель в 1964 г. [12] применил для вывода полиномы общего вида II порядка с тридцатью коэффициентами:

$$X' = A_0 + A_1 X + A_2 Y + A_3 Z + A_4 X^2 + A_5 Y^2 + \\ + A_6 Z^2 + A_7 XY + A_8 XZ + A_9 YZ; \qquad (39)$$

$$Y' = B_0 + B_1 X + B_2 Y + B_3 Z + B_4 XY^2 + B_5 Y^2 + \\ + B_6 Z^2 + B_7 XY + B_8 XZ + B_9 YZ; \qquad (40)$$

$$Z' = C_0 + C_1 X + C_2 Y + C_3 Z + C_4 X^2 + C_5 Y^2 + \\ + C_6 Z^2 + C_7 XY + C_8 XZ + C_9 YZ. \qquad (41)$$

Требуя затем на основании условий типа Коши-Римана (28), (29) равенства ряда коэффициентов формул (39)—(41) нулю или друг другу, он получил следующие формулы с десятью коэффициентами:

$$X' = a_0 + a_1 X + b_1 Y - c_1 Z + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2b_2 XY + 2c_2 XZ; \qquad (42)$$

$$Y' = b_0 + b_1 X + a_1 Y - d_1 Z + b_2 (-X^2 + Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 XY + 2c_2 YZ; \qquad (43)$$

$$Z' = c_0 + c_1 X + d_1 Y + a_1 Z + c_2 (-X^2 - Y^2 + Z^2) + \\ + 2a_2 XZ + 2b_2 YZ. \qquad (44)$$

П. Битсл в 1966 г. [10], используя инверсию, на основе теоремы Лиувилля * вывел аналогичные формулы с десятью коэффициентами:

$$X' = a_0 + (1+n) X - b_1 Y - c_1 Z + a_2 (X^2 - Y^2 - Z^2) + \\ + 2b_2 XY + 2c_2 XZ; \qquad (45)$$

$$Y' = b_0 + b_1 X + (1+n) Y - d_1 Z + b_2 (-X^2 + Y^2 - Z^2) + \\ + 2a_2 XY + 2c_2 YZ; \qquad (46)$$

---

* Она гласит [1]: «В евклидовом пространстве n измерений E_n при $n \geqslant 2$ конформные отображения исчерпываются суперпозициями четырех видов отображений: параллельного переноса, преобразования подобия, ортогонального преобразования и инверсии».

$$Z' = c_0 + c_1 X + d_1 Y + (1+n) Z + c_3 (-X^2 - Y^2 + Z^2) + \\ + 2c_2 XZ + 2b_2 YZ. \quad (47)$$

А. В. Буткевич получил формулы (42)—(44) в 1974 г. методом индукции, исходя из формул М. Схольса (3) и (4). Если их записать, изменив знак у b_2:

$$x' = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 (x^2 - y^2) + 2b_2 xy + \cdots; \quad (48)$$

$$y' = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 (y^2 - x^2) + 2a_2 xy + \cdots, \quad (49)$$

то можно видеть, что члены II порядка в них состоят из двух частей: а) скобок, в которых из квадрата данной координаты отнимаются квадраты других координат; б) удвоенных произведений данной координаты на все остальные. Этому же правилу (для трех координат) подчиняются формулы (42)—(44) и (45)—(47).

В 1975 г. В. Г. Кириллов [7], применяя метод индукции к производным формулам М. Схольса и условия (28)—(29), получил производные координат для пространства трех измерений и, интегрируя их, также вывел формулы (42)—(44).

В фотограмметрии применяют полиномы второго, а также более высокого порядка, что вполне оправдано большим числом пунктов ряда и значительными величинами элементов ориентирования снимков (порядка нескольких градусов) [2], [4]. В геодезии же углы перекоса (или поворотов) φ, ε, ω координатных осей разных систем между собой и относительно осей единой мировой системы координат, как правило, меньше 10″, и в этом случае учет членов второго порядка излишен. Докажем это.

Если записать формулы преобразования координат в матричной форме

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix} = mA \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{vmatrix}, \quad (50)$$

где $A = [\psi][\varepsilon][\omega]$ — матрица трех поворотов вокруг осей X, Y, Z на углы ψ, ε, ω, то получится выражение [3]

$$A = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\varepsilon; & \sin\psi\cos\varepsilon; & -\sin\varepsilon \\ (-\sin\psi\cos\omega + \cos\psi\sin\omega\sin\varepsilon); & (\cos\psi\cos\omega + \sin\psi\sin\omega\sin\varepsilon); & \sin\omega\cos\varepsilon \\ (\sin\psi\sin\omega + \cos\psi\cos\omega\sin\varepsilon); & (-\cos\psi\sin\omega + \sin\psi\cos\omega\sin\varepsilon); & \cos\omega\cos\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Разлагая синусы и косинусы малых углов в ряды с удержанием членов 2-го порядка, запишем

$$A'=\begin{bmatrix} 1-\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\psi^2}{2}+\cdots; & +\psi+\cdots; & -\varepsilon+\cdots \\ -\psi+\omega\varepsilon+\cdots; & 1-\frac{\psi^2}{2}-\frac{\omega^2}{2}+\cdots; & +\omega+\cdots \\ +\varepsilon+\psi\omega+\cdots; & -\omega+\psi\varepsilon+\cdots; & 1-\frac{\omega^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}+\cdots \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Матрица приближенного (линейного) преобразования получит вид (см. [3])

$$A''=\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\varepsilon \\ -\psi & 1 & \omega \\ \varepsilon & -\omega & 1 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Очевидно, погрешности линейного преобразования (при $m=1$) выразятся в худшем случае (при $\varepsilon=\psi=\omega=\Delta\alpha$) матрицей

$$\delta A = A'-A''=\begin{bmatrix} -\Delta\alpha^2 & 0 & 0 \\ +\Delta\alpha^2 & -\Delta\alpha^2 & 0 \\ +\Delta\alpha^2 & +\Delta\alpha^2 & -\Delta\alpha^2 \end{bmatrix}, \tag{54}$$

а их влияния на координаты — формулами:

$$\delta X=-\Delta\alpha^2 X;\quad \delta Y=\Delta\alpha^2 X-\Delta\alpha^2 Y;$$
$$\delta Z=\Delta\alpha^2 X+\Delta\alpha^2 Y-\Delta\alpha^2 Z. \tag{55}$$

Поставив требование $\delta X<1$ м, при X, Y, $Z<7\cdot10^6$ м получим $(\Delta\alpha)^2<1\cdot10^{-7}$, откуда $\Delta\alpha'<1'$. Значит, при преобразовании координат в геодезии вполне можно ограничиваться матрицей (53).

Для определения семи элементов линейного преобразования (φ, ε, ω, m, δX_0, δY_0, δZ_0 или a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, d_1) следует использовать линейные уравнения погрешностей, составленные для трех общих пунктов вида ($i=1, 2, 3$):

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1X-b_1Y-c_1Z-X_i'=v_i^X \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{56}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_0+b_1X+a_1Y-d_1Z-Y_i'=v_i^Y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{57}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_0+c_1X+d_1Y+a_1Z-Z_i'=v_i^Z \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{58}$$

где:

$$a_0=\delta X_0;\ b_0=\delta Y_0 \text{ и } c_0=\delta Z_0.$$

После этого образуем (по В. Струве) средние уравнения по каждой координате, например, для X

$$a_0 + a_1 X_m - b_1 Y_m - c_1 Z_m - X'_m = 0. \qquad (59)$$

Вычитая эти уравнения из каждого уравнения систем (56)—(58), получаем систему редуцированных уравнений погрешностей:

$$\left.\begin{array}{l} a'_1 \Delta X_i - b_1 \Delta Y_i - c_1 \Delta Z_i - \Delta X'_i = v_i^X \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \qquad (60)$$

$$\left.\begin{array}{l} a'_1 \Delta Y_i + b_1 \Delta X_i - d_1 \Delta Z_i - \Delta Y'_i = v_i^Y \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \qquad (61)$$

$$\left.\begin{array}{l} a'_1 \Delta Z_i + c_1 \Delta X_i + d_1 \Delta Y_i - \Delta Z'_i = v_i^Z \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}. \qquad (62)$$

Ей соответствует система нормальных уравнений:

$$a'_1 [\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2] + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \cdot 0 + \\ + [\Delta X l_i^X + \Delta Y l_i^Y + \Delta Z l_i^Z] = 0; \qquad (63)$$

$$a'_1 \cdot 0 + b_1 [\Delta X^2 + \Delta Y^2] + c_1 [\Delta Y \Delta Z] + d_1 [\Delta X \Delta Z] + \\ + [\Delta Y l_i^X - \Delta X l_i^Y] = 0; \qquad (64)$$

$$a'_1 \cdot 0 + b_1 [\Delta Y \Delta Z] + c_1 [\Delta Z^2 + \Delta X^2] + d_1 [\Delta X \Delta Y] + \\ + [+ \Delta Z l_i^X - \Delta X l_i^Z] = 0; \qquad (65)$$

$$a'_1 \cdot 0 - b_1 [\Delta X \Delta Z] + c_1 [\Delta X \Delta Y] + d_1 [\Delta Y^2 + \Delta Z^2] + \\ + [\Delta Z l_i^Y - \Delta X l_i^Z], \qquad (66)$$

из решения которых определяем неизвестные a_1, b_1, c_1, d_1, а затем из средних уравнений — сдвиги $a_0 = \delta X_0$, $b_0 = \delta Y_0$ и $c_0 = \delta Z_0$. Все эти вычисления запрограммированы нами на ЭВМ.

Таким образом, для связи пространственных прямоугольных систем в геодезии следует применять линейное конформное или ортогональное преобразования. При углах перекоса (поворота) осей координат $\Delta\alpha < 1'$ можно ограничиваться линейным конформным преобразованием с матрицей (53) или линейными членами формул (42)—(44) (при этом масштаб m входит в коэффициенты).

Исследуя конформность в пространстве, можно использовать условия сохранения пространственных углов $\Theta' = \Theta$, где:

$$\cos\Theta' = m'_{12} m'_{13} + n'_{12} n'_{13} + p'_{12} p'_{13}; \qquad (67)$$

$$\cos\Theta = m_{12} m_{13} + n_{12} n_{13} + p_{12} p_{13}, \qquad (68)$$

а m_{ik}, n_{ik}, p_{ik} — направляющие косинусы сторон угла в соответствующей системе:

$$m_{ik} = \frac{\Delta X_{ik}}{d_{ik}}; \ n_{ik} = \frac{\Delta Y_{ik}}{d_{ik}}; \ p_{ik} = \frac{\Delta Z_{ik}}{d_{ik}}. \tag{69}$$

Алгебра кватернионов представляет мощный математический аппарат, однако дает возможность получить формулы преобразования, удовлетворяющие условиям конформности только линейными членами. Формулы для нелинейного конформного преобразования координат в пространстве для целей фотограмметрии удобно выводить методом индукции из формул Схольса.

Список литературы: 1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука, 1972. 2. *Булушев М. Н.* Применение интерполяционных полиномов при геодезическом ориентировании фотограмметрических сетей. — Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, № 4. 3. *Бурша М.* Основы космической геодезии, ч. 1. Пер. с чешского. М., Недра, 1970. 4. *Бурштынская Х. В.* Выбор полинома для уравнивания координат точек маршрута пространственной фототриангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 23. 5. *Буткевич А. В.* Некоторые специальные задачи сфероидической геодезии и методы их решения. /Тезисы докладов I научной сессии вузов и НИИ Зап. сиб. совета по координации и планированию научно-исследовательских работ (Томск, февраль 1963 г.). Томск, ТГУ, 1963. 6. *Буткевич А. В.* Некоторые вычислительные проблемы космической геодезии. — В кн.: 50 лет ленинского декрета об учреждении ВГУ. Львов, 1970. 7. *Кириллов В. Г.* К вопросу о конформных преобразованиях II порядка в трехмерном пространстве. — Вестник Львов. политехн. ин-та. Доклады и научные сообщения, 1975, № 4. 8. *Климишин І. А.* Астрономія вчора і сьогодні. Київ, Наукова думка, 1976. 9. Большая Советская энциклопедия, 2-е изд., т. 20. М., 1953. 10. *Baetsle P. L.* Conformal transformation in three dimensions. — Photogrammetric Engineering, 1966, № 5. 11. *Lauf G. B.* A new method for the adjustment of a network. — Empire survey Review, 1951, № 79. 12. *Michail E.* Simultaneous three dimensional transformation of higher degrees. — Photogrammetric Engineering, 1964, № 4. 13. *Schols M.* Ajdeening Naturkunde, 2 Reens, Deel XVI, Amsterdam, 1881. 14. *Schut G. H.* The Use of polinomials in the three-dimensional adjustment phototriangulations strips. — Canadian surveyor, 1962, № 3. 15. *Tewinkel G. C.* A trigonometric derivation of the formul for the three-dimensional rotation matrix, Photogrammetric Engineering, 1964, 30, № 4.

Работа поступила 3 апреля 1978 года. Рекомендована кафедрой геологии и разработки месторождений полезных ископаемых Кадиевского филиала Коммунарского горно-металлургического института.