

О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ НАКОПЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ В СПЛОШНЫХ СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В качестве приближений к сплошным сетям трилатерации в работе рассмотрены сети из H рядов ($H=2, 7$, т. е. $H=2, 3, \dots, 7$) геодезических ромбов с углами $\beta^\circ=15^\circ, 20^\circ, \dots, 75^\circ$ (рисунок) и геодезических прямоугольников с продвигами $l=0, 2, 0, 4, \dots, 3, 0$.

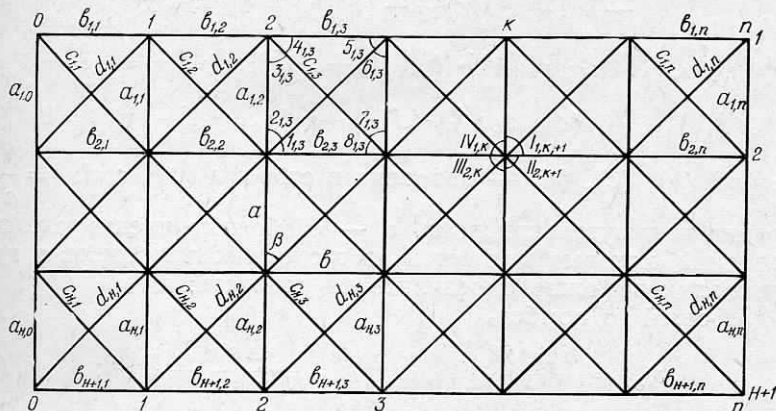


Схема сплошных сетей трилатерации.

Цель работы — исследовать закономерности накопления обратных весов продольного сдвига $\frac{1}{P_{i,k}}$ k -го пункта i -й диагонали ряда и обратных весов дирекционных углов $\frac{1}{P_{\alpha_{i,k}}}$ k -й связующей стороны i -го ряда. Нумерация диагоналей и нумерация пунктов показаны на рисунке.

При уравнивании свободной сети трилатерации (рисунок) возникает система из $r_1=H \times n$ условных уравнений фигур вида

$$(1)_{i,j} + (2)_{i,j} - (I)_{i,j} + W_{i,j} = 0, \quad i = \overline{1, H}; \quad j = \overline{1, n-1} \quad (1)$$

и $r_2=(H-1) \cdot (n-1)$ условных уравнений вида

$$(I)_{i,j+1} + (II)_{i+1,j+1} + (III)_{i+1,j} + (IV)_{i,j} + V_{i,j} = 0, \\ i = \overline{1, H-1}; \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2)$$

Здесь (1), (2), (I), (II), (III), (IV) — поправки в соответствующие углы; H — число рядов в сети; n — число фигур в ряду; $W_{i,j}$ и $V_{i,j}$ — свободные члены условных уравнений.

Переходя от поправок в углы к поправкам в стороны, для сетей из геодезических ромбов и прямоугольников получаем: для сети из ромбов

$$(a)_{i,j} + (a)_{i,j+1} + (b)_{i,j} + (b)_{i+1,j} - 2 \sin \beta (c)_{i,j} - 2 \cos \beta (d)_{i,j} + \omega_{i,j} = 0;$$

$$(a)_{i,j+1} + (a)_{i+1,j+1} + (b)_{i+1,j} + (b)_{i+1,j+1} - \sin \beta [(c)_{i+1,j} + (c)_{i,j+1}] - \cos \beta [(d)_{i,j} + (d)_{i+1,j+1}] + v_{i,j} = 0; \quad (3)$$

для сети из геодезических прямоугольников

$$(a)_{i,j} + a_{i,j+1} + l \cdot (b)_{i,j} + l \cdot (b)_{i+1,j} - \sqrt{1+l^2} [(c)_{i,j} + (d)_{i,j}] + \omega_{i,j} = 0;$$

$$(a)_{i,j+1} + (a)_{i+1,j+1} + l \cdot (b)_{i+1,j} + l \cdot (b)_{i+1,j+1} - \frac{\sqrt{1+l^2}}{2} \times \\ \times [(c)_{i+1,j} + (c)_{i,j+1} + (d)_{i,j} + (d)_{i+1,j+1}] + v_{i,j} = 0, \quad (4)$$

где (a) , (b) , (c) , (d) — поправки в стороны a , b , c , d ; $l = \frac{b}{a}$ —

продвиг прямоугольников; ω , v — свободные члены условных уравнений, которые для сетей из геодезических ромбов и прямоугольников можно определить из равенств:

для сетей из ромбов

$$\omega_{i,j} = \frac{a \sin 2\beta}{\rho''} \cdot W_{i,j}; \quad v_{i,j} = -\frac{a \sin 2\beta}{2\rho''} \cdot V_{i,j}; \quad (5)$$

для сетей из прямоугольников

$$\omega_{i,j} = \frac{al}{\rho''} W_{i,j}; \quad v_{i,j} = -\frac{al}{2\rho''} V_{i,j}. \quad (6)$$

Системам условных уравнений (3) и (4) соответствует блочная матрица коэффициентов нормальных уравнений N размерности $r \times r$, где $r = r_1 + r_2$. Верхняя часть матрицы

$$N = \left\| \begin{array}{cccccccc} T & E & & & P_1 & & & \\ & T & E & & P_2 & P_1 & & \\ & & T & E & & P_2 & & \\ \dots & & & & & & & \\ & & & T & E & & & P_1 \\ & & & & T & & & P_2 \\ & & & & & T_1 & E_1 & \\ & & & & & & T_1 & E_1 \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & T_1 & E_1 \\ & & & & & & & & T_1 \end{array} \right\|. \quad (7)$$

Здесь T , E , T_1 , E_1 , P_1 , P_2 — подматрицы размерности $n \times n$, $n \times n$, $(n-1) \times (n-1)$, $(n-1) \times (n-1)$, $(n-1) \times (n-1)$, $n \times (n-1)$,

$n \times (n-1)$. Число подматриц T и T_1 в матрице N соответственно равно H и $H-1$. Для сетей из ромбов эти подматрицы имеют вид

$$T = \begin{vmatrix} 8 & & & \\ & 8 & & \\ & & 8 & \\ \dots & & & \dots \\ & & & & 8 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \dots & & & \dots \\ & & & & 1 \end{vmatrix}, \quad T_1 = \begin{vmatrix} 6 & & & \\ & 6 & & \\ & & 6 & \\ \dots & & & \dots \\ & & & & 6 \end{vmatrix};$$

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & c & & \\ s & 1 & c & \\ & s & 1 & c \\ \dots & & & \dots \\ & & s & 1 & c \\ & & & s & 1 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} g_1 & & & \\ g_2 & g_1 & & \\ & g_2 & & \\ \dots & & & \dots \\ & & g_1 & \\ & & g_2 & g_1 \\ & & & g_2 \end{vmatrix},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} g_2 & & & \\ g_1 & g_1 & & \\ & g_2 & & \\ \dots & & & \dots \\ & & g_2 & \\ & & g_1 & g_2 \\ & & & g_1 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где $c = \cos^2 \beta$, $s = \sin^2 \beta$, $g_1 = 2 \times (1 + \cos^2 \beta)$, $g_2 = 2 \times (1 + \sin^2 \beta)$, эти же матрицы для сетей из прямоугольников соответственно равны

$$\begin{vmatrix} t & 1 & & \\ 1 & t & 1 & \\ \dots & & & \dots \\ & & 1 & t & 1 \\ & & & 1 & t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l^2 & & & \\ & l^2 & & \\ \dots & & & \dots \\ & & l^2 & \\ & & & l^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t & l^2 & & \\ l^2 & t & l^2 & \\ \dots & & & \dots \\ & & l^2 & t & l^2 \\ & & & l^2 & t \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & s & & \\ s & 1 & s & \\ \dots & & & \dots \\ & & s & 1 & s \\ & & & s & 1 \end{vmatrix}, \quad P_1 = P_2 = \begin{vmatrix} g & & & \\ g & g & & \\ & g & & \\ \dots & & & \dots \\ & & g & \\ & & & g \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где $t = 4 \times (1 + 1/l^2)$, $g = 1,5 \times (1 + 1/l^2)$, $t_1 = 3 \times (1 + 1/l^2)$, $s = 0,25 \times \left(1 + \frac{1}{l^2}\right)$.

Составим теперь выражения весовых функций оцениваемых элементов сети.

Весовая функция продольного сдвига k -го пункта i -й диагонали ряда $dF_{t, i, k}$ для сетей обоих видов может быть записана так:

$$dF_{t, i, k} = \sum_{j=1}^k (b)_{i, j}, \quad i = \overline{1, H+1}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}. \quad (10)$$

Весовая функция дирекционного угла k -й связующей стороны i -го ряда для сети из геодезических ромбов имеет вид

$$dF_{\alpha, i, k} = \sum_{j=1}^k [(8)_{i, j} - (4)_{i, j}] = \frac{\rho''}{a \sin \beta} \cdot \sum_{j=1}^k \times \\ \times \{ (b)_{i, j} - (b)_{i+1, j} + [(a)_{i, j} - (a)_{i, j+1}] \cdot \cos 2\beta \}. \quad (11)$$

Эта же весовая функция для сетей из геодезических прямоугольников

$$dF_{\alpha, i, k} = \sum_{j=1}^k [(8)_{i, j} - (4)_{i, j}] = \frac{\rho}{a} \sum_{j=1}^k [(b)_{i, j} - (b)_{i+1, j}]. \quad (12)$$

Квадратичные коэффициенты $[ff]$ весовых функций оцениваемых элементов сети можно определить из равенств: для сети из геодезических ромбов

$$[f_t f_t]_{i, k} = k, \quad [f_{\alpha} f_{\alpha}]_{i, k} = \frac{\rho^2}{a^2} \cdot 2 \cdot k; \quad (13)$$

для сети из геодезических прямоугольников

$$[f_t f_t]_{i, k} = kl^2, \quad [f_{\alpha} f_{\alpha}]_{i, k} = \frac{\rho^2}{a^2} \cdot 2k. \quad (14)$$

Далее закономерности формирования векторов нормальных коэффициентов весовых функций с учетом закономерностей образования матриц (выражения (7)–(9)) и квадратичных коэффициентов (выражения (13)–(14)) позволили составить программу для ЭЦВМ.

Проведенные расчеты показали, что для сплошных сетей трилатерации из геодезических прямоугольников и ромбов, как и для сетей трилатерации из геодезических квадратов*, накопление величин $1/P_{t, i, k}$ и $1/P_{\alpha, i, k}$ при любых i происходит по линейному закону. Однако из-за ограниченности объема статьи привести все полученные формулы для сетей из ромбов и прямоугольников при всех задаваемых параметрах H , β° , l для каждой конкретной диагонали или ряда сети не представляется возможным. Поэтому значения обратных весов $1/P_t$ и $1/P_{\alpha}$ мы представляли функцией от двух аргументов, т. е. в виде:

$$\text{для сетей из геодезических ромбов } 1/P = f(\beta^\circ, k); \quad (15)$$

$$\text{для сетей из геодезических прямоугольников } 1/P = f(l, k)$$

* Виленский В. А. Оценка точности сплошных сетей трилатерации.— Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27.

Анализ полученных результатов показал, что накопление величин $1/P_{t_{i, \beta, k}}$ и $1/P_{\alpha_{i, \beta, k}}$ в сетях из геодезических ромбов для элементов сети, удаленных от ее краев на две-три фигуры с ошибкой менее 5%, можно описать полиномами, которые имеют следующий вид:

$$1/P_{t_{i, \beta, k}} = A_t k + B_t \beta^{02} + C_t \beta^0 + D_t; \quad (16)$$

$$1/P_{\alpha_{i, \beta, k}} = [(A_\alpha \beta^{02} + B_\alpha \beta^0 + C_\alpha) k + D_\alpha \beta^{02} + E_\alpha \beta^0 + F_\alpha] \cdot \frac{\rho^2}{a^2}. \quad (16a)$$

Кроме того, для обратных весов $1/P_t$ и $1/P_\alpha$ наблюдаются равенства

$$1/P_{t_{H+2-i, \beta, k}} = 1/P_{t_{i, 90-\beta, k}}; \quad (17)$$

$$1/P_{\alpha_{H+1-i, \beta, k}} = 1/P_{\alpha_{i, 90-\beta, k}}. \quad (17a)$$

Например, если при $H=2$ значения $1/P_{t_{1, \beta, k}}$ для первой диагонали вычисляем по формуле

$$1/P_{t_{1, \beta, k}} = A_t k + B_t \beta^2 + C_t \beta^0 + D_t, \quad (18)$$

то для 3-й диагонали значения $1/P_{t_{3, \beta, k}}$ определяем по формуле

$$1/P_{t_{3, \beta, k}} = A_t k + B_t (90^\circ - \beta)^2 + C_t \cdot (90^\circ - \beta) + D_t. \quad (19)$$

Поэтому в табл. 1 и 2 для $H=2,7$ приведены значения коэффициентов полиномов для вычисления обратных весов $1/P_{t_{1, \beta, k}}$ и $1/P_{\alpha_{1, \beta, k}}$ для $i=1, z$. Причем для продольного сдвига

$$z = \begin{cases} H/2 + 1 & \text{при } H \text{ четном} \\ (H+1)/2 & \text{при } H \text{ нечетном,} \end{cases} \quad (20).$$

а для дирекционных углов

$$z = \begin{cases} \frac{H}{2} & \text{при } H \text{ четном} \\ \frac{(H+1)}{2} & \text{при } H \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (21)$$

Анализ результатов, полученных при оценке точности сетей трилатерации из геодезических прямоугольников, показал, что накопление величин $1/P_{t_{i, l, k}}$ и $1/P_{\alpha_{i, l, k}}$ для элементов сети, удаленных от ее краев на две-три фигуры с ошибкой менее 5%, можно описать полиномами, которые имеют следующий вид:

$$1/P_{t_{i, l, k}} = (A_t - 1) l^2 + B_t l + C_t + 1) k + D_t l^2 + F_t l + E_t; \quad (22)$$

$$1/P_{\alpha_{i,l,k}} = [(A_{\alpha}l^2 + B_{\alpha}l + C_{\alpha}) \cdot k + D_{\alpha}l^2 + E_{\alpha}l + E_{\alpha}] \frac{\rho^2}{\alpha^2} \cdot (22a)$$

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты полиномов (16) для вычисления величин $\frac{1}{P_t}$
в сетях из геодезических ромбов

Количество в сети H	Номер диагонали i	A_t	B_t	C_t	D_t
2	1	0,6944	-0,00005148	0,00624	-0,0429
	2	0,2500	-0,00008924	0,00803	0,4168
3	1	0,5573	-0,00010096	0,01224	-0,0159
	2	0,2235	-0,00012840	0,01238	0,3505
4	1	0,4612	-0,00015124	0,01848	0,0185
	2	0,2222	-0,00013752	0,01352	0,3098
	3	0,1396	-0,00018992	0,01710	0,4939
5	1	0,3880	-0,00017668	0,02302	0,0929
	2	0,2177	-0,00015192	0,01504	0,2663
	3	0,1130	-0,00019296	0,01784	0,5288
6	1	0,3313	-0,00017480	0,02474	0,2239
	2	0,2085	-0,00016628	0,01690	0,2367
	3	0,1248	-0,00020048	0,01884	0,4840
	4	0,0940	-0,00019112	0,01720	0,6721
7	1	0,2913	-0,00021052	0,02380	0,4368
	2	0,1969	-0,00017388	0,01774	0,2529
	3	0,1265	-0,00016416	0,01670	0,4786
	4	0,0911	-0,00014836	0,01317	0,7606

Как показали расчеты, накопление величин $1/P_t$ и $1/P_{\alpha}$ соответственно для симметричных диагоналей и рядов происходит по одним и тем же законам. Так, при $H=2$ $1/P_{t_{1,l,k}} = 1/P_{t_{3,l,k}}$ и $1/P_{\alpha_{1,l,k}} = 1/P_{\alpha_{2,l,k}}$. Значения коэффициентов полиномов в выражениях (22) и (22а), необходимых для вычисления обратных весов $1/P_t$ и $1/P_{\alpha}$ для $H=2,7$, приведены в табл. 3 и 4.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Накопление величин $1/P_t$ и $1/P_{\alpha}$ для диагоналей и рядов сети при любых конкретных значениях H и i происходит по линейному закону.

2. Для сетей трилатерации из геодезических ромбов скорость накопления величин $1/P_t$ для одних и тех же H и i не зависит от β° , а скорость накопления величин $1/P_{\alpha}$ с увеличением раз-

Таблица 2

Коэффициенты полиномов (16а) для вычисления величин $\frac{1}{P_\alpha}$
в сетях из геодезических ромбов

H	i	A_α	B_α	C_α	D_α	E_α	F_α
2	1	0,0014132	-0,12720	3,1963	0,00642	-0,5337	11,967
3	1	0,005400	-0,04846	1,2134	0,00677	-0,5467	12,365
	2	0,005340	-0,04808	1,2066	0,00460	-0,4158	10,488
4	1	0,002548	-0,02306	0,5774	0,00708	-0,5636	12,759
	2	0,002608	-0,02350	0,5848	0,00448	-0,3918	9,771
5	1	0,001184	-0,01138	0,2986	0,00744	-0,5864	13,199
	2	0,001308	-0,01188	0,3046	0,00444	-0,3832	9,722
	3	0,001396	-0,01258	0,3162	0,00387	-0,3486	9,300
6	1	0,000524	-0,00552	0,1558	0,00764	-0,6008	13,472
	2	0,000620	-0,00606	0,1651	0,00460	-0,3928	9,896
	3	0,000728	-0,00674	0,1758	0,00384	-0,3400	9,058
7	1	0,000272	-0,00306	0,0905	0,00768	-0,6050	13,597
	2	0,000280	-0,00300	0,0916	0,00472	-0,4000	10,040
	3	0,000360	-0,00360	0,1025	0,00388	-0,3412	9,045
	4	0,000380	-0,00342	0,0893	0,00368	-0,3326	9,069

Таблица 3

Коэффициенты полиномов для вычисления величин $1/P_t$
в сетях из геодезических прямоугольников (формула (22))

H	i	A_t	B_t	C_t	D_t	E_t	F_t
2	1,3	0,40376	0,40598	-0,1145	0,1714	-0,1196	0,0813
	2	0,10292	0,19771	0,0507	0,1100	-0,1200	0,0900
3	1,4	0,27300	0,39487	-0,1101	0,4000	0,3570	0,0900
	2,3	0,09161	0,17761	-0,0461	0,2313	0,3662	0,0509
4	1,5	0,20716	0,35174	-0,0971	0,4252	-0,0477	0,1596
	2,4	0,09151	0,17514	-0,0445	0,2322	0,3573	0,0497
	3	0,05352	0,11557	-0,0294	0,2920	0,5287	0,0531
5	1,6	0,17439	0,28866	-0,0746	0,4349	0,2445	0,0861
	2,5	0,08651	0,17517	-0,0442	0,2511	0,3215	0,0623
	3,4	0,05326	0,08680	-0,0157	0,2714	0,6869	-0,0213
6	1,7	0,15377	0,22937	-0,0501	0,4317	0,5813	-0,0344
	2,6	0,08113	0,16965	-0,0426	0,2686	0,3161	0,0715
	3,5	0,05081	0,08980	-0,0149	0,2893	0,6562	-0,0244
	4	0,0441	0,05012	-0,0033	0,2813	0,8923	-0,1254
7	1,8	0,13570	0,18878	-0,0305	0,4522	0,8395	-0,1452
	2,7	0,07702	0,15786	-0,0381	0,2758	0,3638	0,0576
	3,6	0,04761	0,09925	-0,0194	0,3151	0,5725	0,0116
	4,5	0,03629	0,05550	-0,0045	0,3261	0,8456	-0,1299

Коэффициенты полиномов (22а) для вычисления величин $1/P_\alpha$
в сетях из геодезических прямоугольников

H	l	A_α	B_α	C_α	D_α	E_α	F_α
2	1,2	0,16237	-0,10419	0,5320	0,5810	-2,1231	3,0195
3	1,3	0,00512	-0,04396	0,2045	0,8166	-2,9732	4,1712
	2	0,01138	-0,06324	0,2183	0,6516	-2,3803	3,2366
4	1,4	-0,16071	-0,00766	0,0846	0,92813	-3,4048	4,7529
	2,3	0,00605	-0,03367	0,1066	0,7383	-2,6935	3,6601
5	1,5	0,00441	-0,01607	0,0482	0,9152	-3,4351	4,9460
	2,4	0,00890	-0,03402	0,0666	0,7515	-2,7800	3,8678
	3	0,00275	-0,01809	0,0596	0,7718	-2,7996	3,7799
6	1,6	0,01038	-0,03137	0,0406	0,88714	-3,3733	4,9850
	2,5	0,01505	-0,04979	0,0599	0,7251	-2,7188	3,9016
	3,4	0,00378	-0,01694	0,0395	0,77592	-2,8276	3,8625
7	1,7	0,01230	-0,03807	0,0385	0,8770	-3,3421	4,9944
	2,6	0,01839	-0,00550	0,0611	0,7045	-2,6555	3,8862
	3,5	0,00722	-0,02644	0,0378	0,7634	-2,8024	3,8883
	4	0,02468	0,07131	-0,0230	0,7993	-2,9170	3,9666

ности $|\beta^\circ - 45^\circ|$ возрастает. Сами же значения $1/P_t$ и $1/P_\alpha$ с увеличением разности $|\beta^\circ - 45^\circ|$ также возрастают.

3. Накопление величин $1/P_t$ и $1/P_\alpha$ для сетей из прямоугольников для симметричных диагоналей и рядов сети происходит одинаково.

4. Скорость накопления величин $1/P_t$ и $1/P_\alpha$ с увеличением l при постоянном n для сетей из прямоугольников возрастает по квадратичной параболе. Значения $1/P$ и $1/P_\alpha$ также растут.

5. Для величин $1/P_t$ и $1/P_\alpha$ в сетях из геодезических ромбов наблюдается другая симметрия, т. е. равенства (17) — (17а).

6. С удалением от середины сети скорость накопления величин $1/P_t$ падает, а величин $1/P_\alpha$ практически не меняется, хотя сами значения обратных весов возрастают.

7. Семикратный ряд трилатерации может быть принят за эквивалент сплошной сети. Это видно из того, что при переходе от пятикратного к семикратному ряду значения обратных весов исследуемых весовых функций для одних и тех же элементов среднего ряда меняются менее чем на 5%.