

А. В. ГОЖИИ, канд. техн. наук
Полтавский инженерно-строительный институт

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ЗАСЕЧКИ ДЛЯ ДЕТАЛЬНОЙ РАЗБИВКИ КЛОТОИДЫ

Опыт показывает, что детальное построение круговой кривой способом угловой засечки не уступает по точности детальной разбивке ее любым другим способам, и его можно осуществить вполне надежно даже в тех случаях, когда угол при точке засечки близок к 180° . Последнее можно легко понять, если учесть следующие обстоятельства:

1. Качество построения собственно круговой кривой в основном зависит от погрешностей, искажающих положение точек в направлении радиусов кривой (т. е. от погрешностей построения радиусов), и почти не зависит от погрешностей, искажающих положение точек вдоль кривой и нарушающих лишь равномерное расположение выносимых точек на кривой.

2. Погрешность угловой засечки точки круговой кривой в направлении радиуса кривой в этой точке (погрешность радиуса) невелика, когда угол при точке засечки близок к 180° . Данная погрешность небольшая даже в самом крайнем случае, когда угол при точке засечки равен 180° , т. е. засекаемая точка принадлежит базису засечки, а «засекаемый» радиус (радиус прямой) равен, соответственно, бесконечности.

Наряду с высокой точностью способ угловой засечки обладает еще одним важным достоинством — он позволяет выполнить разбивку кривой, минуя линейные измерения, а следовательно, его выгодно применять в тех случаях, когда на местности неудобно или же просто невозможно производить линейные измерения.

Отмеченные достоинства детальное построения круговой кривой способом угловой засечки указывают на целесообразность распространения этого способа и на случай детальной разбивки клотоиды, используемой обычно в качестве переходной кривой для сопряжения прямолинейных участков трасс дорог с участками в виде круговой кривой.

Для практического осуществления детальное построение клотоиды способом угловой засечки необходимо, естественно, заранее знать углы засечки точек клотоиды с базиса засечки. В настоящей работе показано, каким образом можно определить эти углы.

Как известно, клотоида — кривая, радиус кривизны которой плавно изменяется от бесконечности до какого-то конечного значения. Если посредством клотоиды сопрягается прямая с круговой кривой радиуса R , то начальное значение радиуса клотоиды должно быть равным бесконечности, а конечное — R . Обычно клотоиду описывают формулой следующего вида [1]:

$$\rho_i = \frac{C}{s_i} = \frac{R \cdot L}{s_i}, \quad (1)$$

где L — длина клотоиды; s_i — расстояние от начала клотоиды до текущей точки i на ней; R — радиус кривизны в конечной точке клотоиды; ρ_i — радиус кривизны в текущей точке i клотоиды; $C = R \cdot L$ — параметр клотоиды.

Для угловой засечки точек клотоиды в качестве базиса за сечки удобнее всего взять линию «начало клотоиды (НК) — конец клотоиды (КК)» (рис. 1).

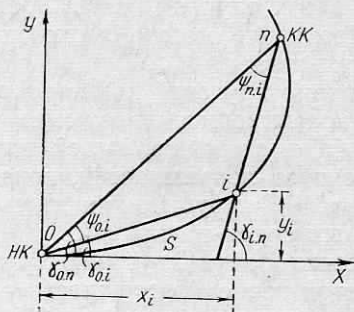


Рис. 1. Схема угловой засечки точки на клотоиде.

Соответствующие углы засечки ψ точек клотоиды с концов указанного базиса можно определять по-разному.

Первый способ. Из рис. 1 видно, что углы засечки точки i с точек 0 (НК) и n (КК), т. е. углы ψ_{0i} и ψ_{ni} , можно определить на основе простых соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{0i} &= \gamma_{0n} - \gamma_{0i}; \\ \psi_{ni} &= \gamma_{ni} - \gamma_{0n}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в которых γ_{0n} , γ_{0i} и γ_{ni} — направляющие углы линий, соединяющих указанные индексом точки 0 и n , 0 и i , n и i . При этом углы γ могут быть вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{0n} &= \operatorname{arctg} \frac{y_n}{x_n}; \\ \gamma_{0i} &= \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}; \\ \gamma_{ni} &= \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_n}{x_i - x_n}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где x_0 , y_0 , x_n , y_n , x_i , y_i — прямоугольные координаты точек 0 , n и i соответственно.

Прямоугольные координаты (x, y) любой точки клотоиды можно вычислить, пользуясь известными формулами [1]:

$$\left. \begin{aligned} x &= l - \frac{l^5}{40} + \frac{l^9}{3456} - \dots; \\ y &= \frac{l^3}{6} - \frac{l^7}{336} + \frac{l^{11}}{42240} - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

в которых величина l определяется из соотношения

$$l = \frac{s}{A}. \quad (5)$$

Здесь s — дуга клотоиды от ее начала до той точки, прямоугольные координаты x , y которой определяются на основе формул (4); A — параметр клотоиды, определяемый равенством

$$A = \sqrt{C} = \sqrt{L \cdot R}, \quad (6)$$

где L — длина клотоиды; R — ее радиус в конечной точке.

Ввиду сложности большинства приведенных выше формул вычисление углов засечки точек клотоиды по ним удобнее всего осуществлять на ЭВМ.

Второй способ. Как отмечено выше и как видно из рис. 1 и 2, исходные зависимости для определения углов засечки точек клотоиды 1, 2, 3..., n из точки 0 имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{01} &= \gamma_n - \gamma_1; \\ \psi_{02} &= \gamma_n - \gamma_2; \\ \psi_{03} &= \gamma_n - \gamma_3; \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{0i} &= \gamma_n - \gamma_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На рис. 2 0 — начало клотоиды (НК); n — конец клотоиды (КК); γ_i — угол между направлением оси X и направлением с точки 0 на текущую точку клотоиды i ($i=1, 2, 3, \dots, n$); β_i — угол между осью X и касательной к клотоиде в точке i ; δ_i — угол между касательной к клотоиде в точке i и продолжением хорды, соединяющей две предыдущие точки ($i-2$) и ($i-1$); φ_i — угол между хордой $i(i-1)$ и продолжением хорды ($i-2$)($i-1$); ϵ_i — угол между касательной к клотоиде в точке i и хордой $i(i-1)$; ψ_{01} — угол засечки текущей точки 1 с точки 0; ψ_{n1} — угол засечки точки 1 с точки n .

В теории клотоиды известны [1] следующие зависимости между углами γ , β , длиной дуги s клотоиды от ее начала до текущей точки i , радиусом R в конечной точке клотоиды и длиной клотоиды L :

$$\gamma_i = \frac{1}{3} \beta_i; \quad (8) \quad \beta_i = \frac{s_i^2}{2RL}. \quad (9)$$

Принимая во внимание зависимость (9), а также имея в виду, что точки клотоиды 1, 2, 3, ..., n находятся на одинаковом удалении $\Delta L = \frac{L}{n}$ друг от друга, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\Delta L^2}{2RL}; \\ \beta_2 &= \frac{(2\Delta L)^2}{2RL} = \frac{4\Delta L^2}{2RL} = 4\beta_1; \\ \beta_3 &= \frac{(3\Delta L)^2}{2RL} = \frac{9\Delta L^2}{2RL} = 9\beta_1; \\ \dots & \\ \beta_n &= \frac{(n\Delta L)^2}{2RL} = \frac{n^2\Delta L^2}{2RL} = n^2\beta_1. \end{aligned} \right\}$$

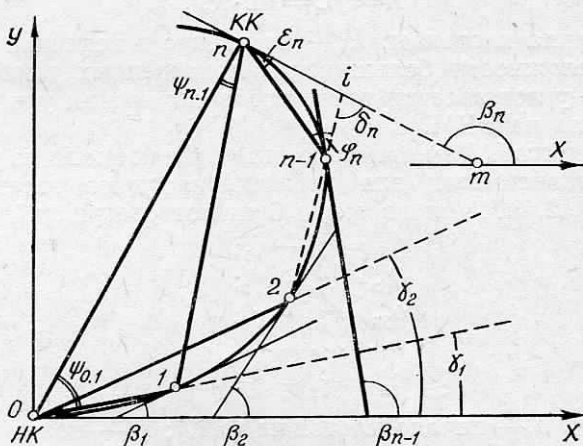


Рис. 2. К определению углов засечки равноотстоящих точек клотоиды с базиса «начало клотоиды-конец клотоиды».

Учитывая зависимости (8) и (10), систему формул (7) для определения углов засечки точек клотоиды с точки 0 можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{01} &= \frac{1}{3} n^2 \beta_1 - \frac{1}{3} \beta_1 = \frac{1}{3} \beta_1 (n^2 - 1); \\ \psi_{02} &= \frac{1}{3} n^2 \beta_1 - \frac{1}{3} 4\beta_1 = \frac{1}{3} \beta_1 (n^2 - 4); \\ \psi_{03} &= \frac{1}{3} n^2 \beta_1 - \frac{1}{3} 9\beta_1 = \frac{1}{3} \beta_1 (n^2 - 9); \\ \dots & \\ \psi_{0i} &= \frac{1}{3} n^2 \beta_1 - \frac{1}{3} i^2 \beta_1 = \frac{1}{3} \beta_1 (n^2 - i^2). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, при угловой засечке равноотстоящих точек клотоиды угол засечки i -й точки клотоиды с точки 0 (угол ψ_{0i}) можно определить на основе зависимости

$$\psi_{0i} = \frac{1}{3} \beta_1 (n^2 - i^2), \quad (12)$$

где $n = \frac{L}{\Delta L}$ — порядковый номер конечной точки клотоиды,

если ее начальная точка имеет порядковый номер 0 ; i — порядковый номер текущей точки клотоиды, угол засечки которой определяется; β_1 — угол между направлением касательной к клотоиде в точке 1 и направлением оси X , определяемый по первой формуле системы формул (10).

Рассмотрим теперь порядок определения углов засечки точек клотоиды с ее конечной точки n (углов ψ_{ni}). Из рис. 2 видно, что

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n1} &= \angle 0 nm - \angle 1 nm; \\ \psi_{n2} &= \angle 0 nm - \angle 2 nm; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \psi_{n(n-1)} &= \angle 0 nm - \angle (n-1) nm. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Чтобы привести эти формулы к более удобному для практического использования виду, воспользуемся тем же рис. 2 и примем во внимание следующее:

1) угол $0nm$ — это угол, под которым пересекаются линии $0n$ и mn . Поскольку по отношению к оси X линия $0n$ расположена под углом $\gamma_n = \frac{1}{3} \beta_n$, а линия mn — под углом β_n , то

$$\angle 0 nm = \beta_n - \frac{1}{3} \beta_n = \frac{2}{3} \beta_n; \quad (14)$$

2) угол $(n-1)nm$ можно определить из треугольника $(n-1)nl$, а именно:

$$\angle (n-1) nm = \varepsilon_n = 180^\circ - (180^\circ - \delta_n) - \varphi_n = \delta_n - \varphi_n. \quad (15)$$

В последнем равенстве угол δ_n — это угол между линиями $(n-2)(n-1)$ и mn . Так как линии $(n-2)(n-1)$ и mn образуют с осью X углы, равные $(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1})$ и β_n соответственно, то

$$\delta_n = \beta_n - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}), \quad (16)$$

тогда

$$\angle (n-1) nm = \varepsilon_n = \beta_n - (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), \quad (17)$$

3) отношения углов ψ_i к углу γ_i дают арифметическую прогрессию с разностью $d = 6(i-1)$, т. е.

$$\frac{\Psi_1}{\gamma_1} = 1; \quad \frac{\Psi_2}{\gamma_1} = 6; \quad \frac{\Psi_3}{\gamma_1} = 12; \quad \dots; \quad \frac{\Psi_n}{\varphi_1} = 6(n-1);$$

что показано в работе [1].

С учетом зависимостей (14), (17), (18), (8) и (10) полную из формул (13) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_{n(n-1)} &= \frac{2}{3} \beta_n - \beta_n + (\Psi_1 + \varphi_2 + \dots + \Psi_n) = \\ &= \frac{2}{3} n^2 \beta_1 - n^2 \beta_1 + [\gamma_1 + 6\gamma_1 + \dots + 6(n-1)\gamma_1] = \\ &= -\frac{1}{3} n^2 \beta_1 + \frac{1}{3} \beta_1 + 2\beta_1 + \dots + 2(n-1)\beta_1 = \\ &= \frac{1}{3} \beta_1 \{-n^2 + 1 + 6 + 12 + \dots + 6(n-1)\} = \\ &= \frac{1}{3} \beta_1 \{-n^2 + 1 + [6 + 12 + \dots + 6(n-1)]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом равенстве выражение в квадратных скобках (обозначим его через S_{n-1}) представляет собой сумму членов арифметической прогрессии с разностью 6, числом членов $(n-1)$, первым членом, равным 6, и последним членом, равным $6(n-1)$. Поэтому, воспользовавшись известной формулой для определения суммы членов арифметической прогрессии

$$S_m = \frac{m(a_1 + a_m)}{2} E, \quad (2)$$

где a_1 — первый член E ; a_m — последний член E ; m — число всех членов прогрессии, можно представить указанное выражение в такой форме:

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)[6 + 6(n-1)]}{2} = \frac{(n-1)6n}{2} = 3n^2 - 3n. \quad (2)$$

Подставив формулу (21) в (19) и сделав простые преобразования, получим формулу для определения угла засечки

$$\psi_{n(n-1)} = \frac{1}{3} \beta_1 (2n^2 - 3n + 1). \quad (2)$$

Чтобы получить подобную формулу для определения угла $\psi_{n(n-2)}$, предположим, что детальная разбивка клотоиды осуществляется через интервал $2\Delta L$, причем число всех интервалов $k = \frac{n}{2}$. Тогда точка $(n-2)$ окажется предпоследней точкой клотоиды, и вывод формулы для вычисления угла $\psi_{n(n-2)}$ можн

осуществить точно таким же путем, как и при определении угла $\psi_{n(n-1)}$. В результате получим

$$\psi_{n(n-2)} = \frac{1}{3} \beta'_1 (2k^2 - 3k + 1). \quad (23)$$

Если принять во внимание, что в рассматриваемом случае $k = \frac{n}{2}$ и

$$\beta'_1 = \frac{(2\Delta L)^2}{2RL} = 4 \frac{\Delta L^2}{2RL} = 4\beta_1, \quad (24)$$

то зависимость (23) можно выразить так:

$$\psi_{n(n-2)} = \frac{1}{3} \beta_1 (2n^2 - 6n + 4). \quad (25)$$

Далее предположим, что детальная разбивка клотоиды проводится через интервал $3\Delta L$, число всех интервалов $p = \frac{n}{3}$ и, соответственно, точка $(n-3)$ является предпоследней точкой клотоиды, и точно таким же путем определим, что

$$\psi_{n(n-3)} = \frac{1}{3} \beta_1 (2n^2 - 9n + 9). \quad (26)$$

Анализируя совокупность формул (22), (25) и (26) для определения углов засечки точек клотоиды с ее точки n , легко установить, что соответствующая формула для определения угла засечки i -й точки клотоиды с точки n имеет следующий вид:

$$\psi_{n[n-(n-i)]} = \frac{1}{3} \beta_1 [2n^2 - 3n(n-i) + (n+i)^2]. \quad (27)$$

После несложных преобразований зависимость (27) можно представить в более простой и удобной для практического использования форме

$$\psi_{ni} = \frac{1}{3} \beta_1 i(n+i). \quad (28)$$

Таким образом, кроме формул (2) — (6) при детальном разбивке клотоиды угловой засечкой ее точек с базиса «начало клотоиды (0) — конец клотоиды (n)» значения углов засечки отдельных точек можно рассчитывать по выведенным выше формулам (12) и (28), в которых β_1 определяется на основе первой формулы (10). Простота этих формул обеспечивает удобство вычислений по ним углов засечки как вручную, так и с использованием вычислительных машин.

Поскольку формулы (12) и (28) получены на основе формул, заимствованных из работы [1], при выводе которых малые дуги были заменены хордами, их стягивающими, то это обстоятельство должно учитываться при практическом использовании формул (12) и (28), точнее, при выборе степени детальности разбивки (величин ΔL). Расчет допустимых значений величин ΔL в этом случае можно выполнить по соответствующим формулам, приведенным в работе [1].

Рабочие формулы обоих рассмотренных способов проверены в процессе контрольных вычислений углов засечки точек клотоиды. При проверке формул вычисления углов засечки первым способом велась на ЭВМ «НАИРИ», а вторым — с использованием малых вычислительных средств.

Таким образом, для практического применения более удобен второй способ, позволяющий просто определять углы засечки непосредственно в процессе разбивки при наличии простейших вычислительных средств.

Оперативное вычисление углов засечки первым способом практически можно осуществить лишь при наличии ЭВМ. Поэтому его с успехом можно применять при заблаговременной подготовке на ЭВМ исходных данных для разбивки клотоиды или при составлении на ЭВМ специальных таблиц для разбивки клотоиды.

Отметим, что первый способ позволяет определять углы засечки любых точек на клотоиде, тогда как вторым способом можно вычислять углы засечки заранее известного числа равноотстоящих друг от друга точек клотоиды.

Список литературы: 1. Ксенодохов В. И. Таблицы для проектирования и разбивки клотоидной трассы автомобильных дорог. М., Транспорт, 1969.

Работа поступила 21 апреля 1978 года.
Рекомендована кафедрой геодезии Полтавского инженерно-строительного института.