УДК 528.930

А. В. БУТКЕВИЧ

ПЕРЕХОД ОТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ БЕЗ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В последнее время в связи с развитием спутниковой геодезии было предложено несколько способов перехода от пространственных прямоугольных координат X, Y, Z к геодезическим B, L, H.

В отличие от простых формул для прямого перехода [1, 4, 5] формулы для обратного перехода основаны на последовательных приближениях [1, 5] или на введении дифференциальных поправок [2, 3], либо на обращении рядов [4, 7, 9].

В настоящей работе мы путем улучшения формул болгарского геодезиста К. Павлова получили более простые формулы, практически не требующие приближений.

Из формул Ф. А. Слудского для прямого перехода от B, L, H к X, Y, Z

$$X = (N + H) \cos B \cos L; \quad (1) \qquad Y = (N + H) \cos B \sin L; \quad (2)$$

$$Z = [N (1 - e^2) + H] \sin B \quad (3)$$

следует

$$\operatorname{tg} L = Y : X; \quad (4) \qquad D = \sqrt{X^2 + Y^2} = X \sec L = Y \operatorname{cosec} L. \quad (5)$$

Формулы К. Павлова имеют вид [8]

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2 b}{b + HV}\right) = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2}{1 + \dfrac{HV}{a\sqrt{1 - e^2}}}\right), \quad (6)$$

где для значения H он использует приближенные формулы С. П. Николаева [6]

$$H = (\bar{a} - a) W; \quad (7)$$

$$\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 (1 - e'^2)} = a + \Delta a. \quad (8)$$

Здесь $\bar{a}$ — большая полуось «воздушного эллипсоида», т. е. эллипсоида, проходящего через точку с координатами X, Y, Z и имеющего такое же сжатие и ориентировку, как референц-эллипсоид.

В более точной формуле К. Павлов использует выражение *

$$H=\Delta aW\left(1-\frac{\Delta ae^2 e'^2 \sin^2 2B}{8a}\right)=\Delta aW-\frac{\Delta a^2 e^2 e'^2 \sin 2BW}{8a}. \quad (9)$$

После подстановки в (6) значения $H=\Delta aW$ получаем

$$\operatorname{tg} B=\frac{Z}{D}\left(1+\frac{e'^2}{1+\frac{\Delta aWV}{a\sqrt{1-e^2}}}\right)=\frac{Z}{D}\left(1+\frac{e'^2}{1+\frac{\Delta aV^2}{a}}\right), \quad (10)$$

или приближенно —

$$\operatorname{tg} B^0\simeq\frac{Z}{D}\left(1+\frac{e'^2 a}{a+\Delta a}\right)\simeq\frac{Z}{D}\left(1+\frac{e'^2 a}{\bar{a}}\right). \quad (11)$$

Если формула (1) приближения К. Лапинга [5]

$$\operatorname{tg} B^0=\frac{Z(1+e'^2)}{D}, \quad (12)$$

дает погрешность с плюсом в несколько десятков секунд, то формула К. Павлова (11) дает погрешность с плюсом около 1—2″. Докажем это.

Взяв разность формул (11) и (10), получим

$$\frac{\sin(B^0-B)}{\cos B^0 \cos B}=\frac{Ze'^2\, a\Delta a\eta^2}{Da\bar{a}}\simeq\frac{\sin B^0\cos B^0 e'^4\, a\Delta a}{\cos B\bar{a}^2},$$

или

$$(B^0-B'')\leqslant\frac{\sin B\cos^3 Be'^4\, a\Delta a\rho''}{\bar{a}^2}\simeq\frac{3{,}0''\, a\Delta a}{\cos B\bar{a}^2}. \quad (13)$$

При $\Delta a\simeq H\leqslant 1000$ км ошибка в (11) меньше 0,5″, а при $H\leqslant$ 2000 км — меньше 1″.

Отметим, что однажды при исследовании (11) мы вместо $\lg e'^2$ ошибочно использовали при вычислениях значение $\lg e^2$. В этом случае ошибка приближенной широты получилась —2,09″, тогда как с использованием $\lg e'^2$ она была +2,01″. Возникла мысль, если использовать в вычислениях $\lg ee'$ (взять цель «в вилку»), то ошибка широты B^0 будет значительно меньше. Такое предположение подтвердилось при логарифмических вычислениях.

Объяснить преимущества логарифмической формулы можно следующим образом. Формулу (11) нетрудно привести к виду

$$\operatorname{tg} B^0=\frac{Z}{D}\left(1+\frac{ee'\sqrt{1+e'^2}\, a}{\bar{a}}\right)=\frac{Z}{D}\left(1+\frac{ee'a\left(1+\frac{e'^2}{2}\right)}{\bar{a}}\right). \quad (14)$$

* Заметим, что у С. П. Николаева [6] эта формула дана в более строгом виде с поправкой $-\frac{\Delta ae^2 e'^2 \sin^2 2B}{8\bar{a}}$. (9′).

Логарифмирование (14) дает

$$\lg \operatorname{tg} B = \lg \frac{Z}{D} + \frac{\mu e e' a}{\bar{a}} + \frac{\mu e e'^3 a}{2\bar{a}} - \frac{\mu e^2 e'^2 a^2}{2\bar{a}^2} + \cdots \tag{15}$$

Как видно, здесь члены порядка μe^4 практически при $a \approx \bar{a}$ компенсируются и погрешность выражается лишь членами порядка μe^6.

Займемся уточнением (11), для чего приведем к явному виду (10). Нам нужно уточнить коэффициент при $e'^2=0{,}0067385$, чтобы обеспечить семизначные вычисления. Это значит, что поправочный член достаточно определять с относительной погрешностью 1 : 1 000 000. С такой же точностью надо определить и $V^2=1+e'^2 \cos^2 B$. Определим допустимую погрешность широты B^0 при вычислении V^2:

$$dV^2 = -\frac{e'^2\, 2 \sin B \cos B dB''}{\rho''} < 1 \cdot 10^{-5}. \tag{16}$$

Отсюда

$$dB'' \leqslant \frac{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 150}{10^5 \sin 2B} \simeq 309'' \simeq 5'. \tag{17}$$

А такую точность вполне обеспечивает формула К. Лапинга (12).

Если $V_0^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B^0 = 1 + \dfrac{e'^2}{\sec^2 B^0}$, или

$$V_0^2 = 1 + \frac{e'^2}{1+\operatorname{tg}^2 B^0} = 1 + \frac{e'^2}{1+\dfrac{Z^2(1+e'^2)^2}{D^2}}, \tag{18}$$

то

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{D}\left(1 + \frac{e'^2}{1+\dfrac{\Delta a V_0^2}{a}}\right). \tag{19}$$

В учете члена δH (9) при вычислении широты нет необходимости. Что касается поправочных членов к (9), то они приведены ниже (высота H, км):

$B°$	500	1000	1500	2000	2500	3000
15; 75	0,0	0,0	0,3	0,5	0,8	1,0
30; 60	0,1	0,4	1,0	1,6	2,4	3,2
45; 45	0,2	0,6	1,3	2,1	3,1	4,3

Дальнейшее вычисление H несложно. Поправки δH (9) <0.

Вычислим широту по (19):

$(Z/D)^2$	2,4042	$e'^2/1+P)$	0,001 9608	$Q=e'^2 a(a+\Delta a V_0^2)$	0,006 5291
$(1+e'^2)^2$	1,0135	V_0^2	1,001 9608	$Q(Z/D)$	101 235
$P=(Z/D)^2\times$ $\times(1+e'^2)^2$	2,4366	$e'^2 a$	42 980	Z/D	1,550 5304
$1+P$	3,4366	$\Delta a\ V_0^2$	204 610	$\operatorname{tg} B$	1,560 6539
Δa	204 210	a	6 378 245	B	57°20′59,98″
e'^2	0,006 7385	$a+\Delta a V_0^2$	6 582 855	δB	−0,02″

Таким образом, если нужно получить широту с точностью до 0,03...0,05″, следует применять в логарифмическом виде (11) или (15) с $\lg ee'$. Нелогарифмическая формула (11) дает ошибку $<0{,}5''$ при $H<1000$ км и $<1''$ при $H<2000$ км. Если требуется точность 0,01″, то следует применять нелогарифмическую формулу (19). Высоту H при этом желательно вычислять по формуле (9), учитывая в случае необходимости поправку δH, или по формуле

$$H = Z \operatorname{cosec} B - N(1-e^2). \tag{20}$$

Список литературы: 1. *Андреев М.* Преобразование прямоугольных пространственных координат в геодезические. — Геодезия и картография, 1966, № 9. 2. *Буткевич А. В., Радьо Т. В.* О переходе от пространственных прямоугольных координат к геодезическим без приближений. — Геодезия и картография, 1982, № 5. 3. *Буткевич А. В.* О переходе от пространственных координат к геодезическим. — Геодезия и картография, 1967, № 6. 4. *Изотов А. А.* Преобразование пространственных прямоугольных координат в геодезические. — Геодезия и картография, 1969, № 5. 5. *Лапинг К. А.* Вычисление координат и высот точек по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона на двух исходных пунктах. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 1. 6. *Николаев С. П.* Связь между различными системами геодезических координат. — Вест. ВИКА, 1961, № 174. 7. *Пенев П.* Трансформация прямоугольных пространственных координат в геодезические с применением замкнутых формул. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, вып. 3. 8. *Павлов К.* Две неитеративни формули за определяне на географската широчина B. — Известия на главного управление по геодезия и картография, 1977, № 1. 9. *Bowring B. K.* Transformation from spatial to geographical coordinates. — Surv. Rev., 1976, v. 23, № 181.

Статья поступила в редколлегию 11. 05. 83