УДК 528.35:621.385

А. С. КОЛОС

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ РАСЧЕТЕ ЗАДАЧ В ДВУХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При разработке электронно-оптических систем электронно-лучевых приборов (ЭЛП), применяемых в геодезии, нужно знать траектории электронов, движущихся в электрических и магнитных полях. Для этого решаем систему дифференциальных уравнений. Для электрического поля уравнения движения электронов в декартовой системе координат (для нерелятивистских электронов) записываем следующим образом *:

$$m\ddot{x}=-eEx,\ m\ddot{y}=-eEy,\ mz=-eEz, \tag{1}$$

где m — масса электрона; Ex, Ey, Ez — составляющие напряженности электрического поля.

Решение (1) возможно, если напряженность электрического поля или потенциал заданы в виде функций координат $U=U(x, y, z)$, $Ex=-dU/dx$; $Ey=-dU/dy$, $Ez=-dU/dz$.

---

* Жигарев А. А. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы. — М.: Высш. шк., 1972.

В пространстве, свободном от заряда, электрический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$d^2U/dx^2+d^2U/dy^2+d^2U/dz^2=\Delta U=0. \tag{2}$$

Решение уравнения Лапласа с заданными граничными условиями позволяет найти потенциал U как функцию координат и, следовательно, составляющие напряженности поля. Точное аналитическое решение уравнения Лапласа возможно в некоторых простейших случаях, поэтому при решении электронно-оптических задач используются приближенные и экспериментальные методы нахождения распределения потенциала.

Рассмотрим численный метод интегрирования уравнения Лапласа на примере двухмерной (плоской) задачи. Пусть дана некоторая область G в плоскости $0xy$, имеющая кусочно-гладкую границу Г. Нужно решить уравнение

$$\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = 0; \quad (x, y) \in G, \tag{3}$$

если на некоторых участках границы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ заданы условия

$$\lambda_{ij}[U] = \varphi_{i,j}(x, y), \quad (x, y)(-\Gamma), \quad (i = 1,2,\cdots, n; \\ j = 1,2,\cdots,m), \tag{4}$$

где $\lambda_{i,j}$ — или дифференциальные операторы первого порядка по переменным x, y, или конечные соотношения; $\varphi_{i,j}(x, y)$ — заданные функции.

Представим (3) в конечных разностях. Для прямоугольной сетки размерами $\Delta x \times \Delta y$ на основании формулы Тейлора получим первую основную разностную схему

$$U(x, y) = \frac{1}{2(1+k)}[U(x-\Delta x, y) + U(x+\Delta x, y) + \\ + kU(x, y-\Delta y) + k(x, y+\Delta y)], \tag{5}$$

где

$$k = \Delta x^2/\Delta y^2. \tag{6}$$

Параметр k выбираем из условия ожидаемости значительного изменения рассчитываемого значения вдоль одного из координатных направлений по сравнению с другим. Для облегчения вычислительных операций и уменьшения машинного времени запишем (5) по-другому:

$$U(x+\Delta x, y) = -kU(x, y-\Delta y) + 2(1+k)U(x, y) - \\ - kU(x, y+\Delta y) - U(x-\Delta x, y), \tag{7}$$

т. е. получаем функцию U на $x+\Delta x$-м слое, используя значения U в двух предыдущих слоях: x-м и $x-\Delta x$-м. Поэтому на отрезке границы, примыкающем к первому слою сетки, и на участках расширения сетки по оси y располагаем значениями функции и ее нормальной производной. Если на отрезке Γ_i границы заданы

$$U(x, y) = \varphi_{i,1}(x, y); \; dU(x, y)/dn = \varphi_{i,2}(x, y), \; (x, y) \in \Gamma_i, \tag{8}$$

то определяем значения $U(x, y)$ на фиктивном $x-\Delta x$-м слое на основании выражения

$$U_i(-\Delta n) = \varphi_{i,1}(x, y) - \Delta n\, \varphi_{i,2}(x, y), \tag{9}$$

где Δn выбираем таким образом, чтобы искомые значения функции $U_i(-\Delta n)$ совпадали с граничными узлами.

	200	175	150	125	100	75	50	25	0
× 242,04	200	157,96	125,96	100,78	79,51	60,83	44,71	32,29	25
× 369,12	200	130,88	95,11	72,65	56,44	44,08	33,74	34,46	50
× 129,54	100	70,46	50,96	38,28	29,51	23,33	19,72	19,79	25
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Распределение потенциала в узлах сетки прямоугольной области.

Для иррегулярных точек сетки воспользуемся выражением

$$\varphi(x + \Delta x, y) = \varphi(x, y)\left[1 + \frac{\Delta x}{\delta x} + \frac{\Delta x(\Delta x + \delta x)}{\Delta y \cdot \delta y}\right] - \varphi(x - \delta x, y)\frac{\Delta x}{\delta x} -$$

$$- \frac{\Delta x(\Delta x + \delta x)}{\Delta y + \delta y}\left[\frac{\varphi(x, y + \delta y)}{\delta y} + \frac{\varphi(x, y - \Delta y)}{\Delta y}\right].$$

Выясняем устойчивость схемы (7). Пусть в точках начального слоя допущена ошибка ε_{pq}:

$$W(x_p, y_q) = \varepsilon_{pq}; \quad W(x_p, y_q) = 0, \quad (x_p, y_q) \in G, \quad (\bar{x}_p, \bar{y}_q) \in \Gamma. \tag{10}$$

Нас интересует, как изменится погрешность $W(x_p, y_q)$ при неограниченном возрастании x_p. Так как погрешность должна удовлетворять (7), то получаем

$$W(x_p, y_q) = \sum_s C_s\left[1 + 2k\sin^2\frac{s\pi}{2y_q}\Delta y \pm 2k\sin\frac{s\pi}{2y_q} \times \right.$$

$$\left. \times \Delta y\sqrt{\frac{1}{k} + \sin^2\frac{s\pi}{2y_q}\Delta y}^{\frac{x_p}{\Delta x}} \sin\frac{s\pi}{y_q} y_q\right], \tag{11}$$

где C_s выбираем из условия (10).

Для устойчивости необходимо, чтобы функция $W(x_p, y_q)$ оставалась ограниченной при $x_p \to \infty$. Достаточно, чобы для всех s было выполнено условие

$$\left|1 + 2k\sin^2\frac{s\pi}{2y_q}\Delta y \pm 2k\sin\frac{s\pi}{2y_q}\Delta y\sqrt{\frac{1}{k} + \sin^2\frac{s\pi}{2y_q}\Delta y}\right| \leqslant 1. \tag{12}$$

Этому неравенству удовлетворяет условие $k \geqslant 0$, т. е. схема (7) устойчива при любом соотношении размеров сетки.

В качестве примера на рисунке представлены результаты расчета на ЭВМ электрического потенциала в прямоугольной области G при заданных значениях потенциала на отдельных участках границы Γ и значениях нормальной производной на одном из них. Потенциалы узлов фиктивного слоя определены согласно (9).

Применение изложенного метода не ограничивается наличием открытых границ. Он применим в комбинации с другими методами, а также к интегрированию уравнения Пуассона.

Статья поступила в редколлегию 23. 12. 83