

Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

### ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ, ПРОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ИСХОДНЫМИ ПУНКТАМИ

Распределение погрешностей в линейно-угловых рядах геодезических четырехугольников разной формы без избыточных исходных данных уже в основном изучено [1, 2, 3]. Что же касается несвободных сетей, то данные об их исследовании в литературе отсутствуют.

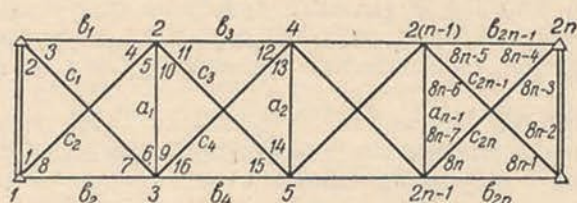


Схема линейно-углового ряда из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами.

Цель нашей работы — изучение распределения ошибок в несвободных рядах линейно-угловой триангуляции. В ходе исследований определяются формулы для подсчета обратных весов функций дирекционного угла и стороны в середине ряда, состоящего из геодезических квадратов и уравненного за условия фигур, сторон, координат и дирекционных углов.

В несвободном ряду линейно-угловой триангуляции (рисунок) при уравнивании по методу условных измерений возникает  $3n$  условных уравнений фигур вида:

$$(8i-7) + (8i-6) + (8i-5) + (8i-4) + w_{1i} = 0, \quad (1)$$

$$(8i-3) + (8i-2) + (8i-1) + (8i) + w_{2i} = 0, \quad (2)$$

$$(8i-5) + (8i-4) + (8i-2) + (8i-3) + w_{3i} = 0, \quad (3)$$

где  $i$  — порядковый номер квадрата,  $(8i)$ ,  $(8i-1)$ , ...,  $(8i-7)$  — вероятнейшие поправки к измеренным углам,  $6n$  условных уравнений сторон вида:

$$(\lg a_{i-1}) - (\lg b_{2i-1}) + \delta_{8i-7}(8i-7) - \delta_{8i-4}(8i-4) + w_{4i} = 0, \quad (4)$$

$$(\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i-1}) - \delta_{8i-7}(8i-7) + w_{5i} = 0, \quad (5)$$

$$(\lg a_i) - (\lg b_{2i}) + \delta_{8i-3}(8i-3) - \delta_{8i}(8i) + w_{6i} = 0, \quad (6)$$

$$(\lg b_{2i}) - (\lg c_{2i-1}) - \delta_{8i-3}(8i-2) + w_{7i} = 0, \quad (7)$$

$$(\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i}) - \delta_{8i-2}(8i-2) + w_{8i} = 0, \quad (8)$$

$$(\lg a_i) - (\lg c_{2i}) - \delta_{8i-5}(8i-5) + w_{9i} = 0, \quad (9)$$

где  $(\lg a_i)$ ,  $(\lg b_{2i})$ ,  $(\lg c_{2i})$  — вероятнейшие поправки к логарифмам длин сторон,  $\delta$  — изменение логарифма синуса при изменении угла на  $1''$ , условные уравнения дирекционных углов и координат вида:

$$\sum_{i=1}^n \{(8i - 7) - (8i - 3)\} + \omega_\alpha + 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta X_{2i-1, 2i} (\lg c_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta X_{2i, 2i+1} (\lg a_i) - r \sum_{i=1}^n (Y_{2n} - Y_{2i-1})(8i - 7) + \\ + r \sum_{i=1}^{n-1} (Y_{2n} - Y_{2i})(8i - 3) + \omega_x + 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta Y_{2i-1, 2i} (\lg c_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta Y_{2i, 2i+1} (\lg a_i) + r \sum_{i=1}^n (X_{2n} - X_{2n-1})(8i - 7) - \\ - r \sum_{i=1}^{n-1} (X_{2n} - X_{2i})(8i - 3) + \omega_y = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $r = 10^6 M \sin 1''$ .

Весовые функции дирекционного угла и стороны запишем в виде:

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^k \{(8i - 7) - (8i - 3)\}, \quad (13)$$

$$f_{\lg s_k} = (\lg a_k) \quad (14)$$

для случая, когда  $n$  — четное, или

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^k \{(8i - 7) - (8i - 3)\} + (8k + 1), \quad (15)$$

$$f_{\lg s_k} = (\lg c_{2k}), \quad (16)$$

для случая, когда  $n$  — нечетное.

Уравнивание выполнялось по методу двух групп. В первую группу включались условные уравнения фигур вида (1) и (2), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычислялись по известным формулам [4]:

$$a_i = a_i' = \frac{[a_i']}{4} \quad (\text{при поправках в углы}),$$

$$a_i = a_i' \sqrt{q} \quad (\text{при поправках в стороны}),$$

$$\text{где } q = \frac{1}{P_{\lg s}} = \left( \frac{10^6 \mu \cdot m_s}{m_p \cdot S} \right)^2.$$

Обозначим преобразованные коэффициенты в уравнениях (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), соответственно через  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $e_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$ ,  $j$ ,  $l$ , и  $m$ , а коэффициенты в весовых функциях через  $f_\alpha$  и  $f_a$ .

На основании таблицы преобразованных коэффициентов условных уравнений второй группы, легко вычисляются соответствующие им коэффициенты нормальных уравнений, кроме коэффициентов  $[ll]$  и  $[lm]$ , которые получены следующим путем:

$$\begin{aligned} [ll] &= 0,75r^2[n^2 + 2(n-1)^2 + 2(n-2)^2 + \dots + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1] + (2n-1)q = \\ &= 0,75r^2n(2n^2 + 1) + q(2n-1), \end{aligned}$$

$$[lm] = 0,75r^2[n + (n-1)] + [(n-2) + \dots + 2 + 1] - nq = 0,375r^2n(n+1) - nq.$$

Из решения системы нормальных уравнений получим квадратичные коэффициенты соответствующей эквивалентной системы.

Уравнения вида (3) не зависят между собой, следовательно:

$$[a_1 a_1] = [a_2 a_2 \cdot 1] = \dots = [a_n a_n \cdot (n-1)] = +2.$$

Первый квадратичный коэффициент уравнений (4) равен  $[b_1 b_1 \cdot n] = +1,5\delta^2 + q$ , для остальных  $(n-1)$  уравнений будем иметь

$$[b_2 b_2 \cdot (n+1)] = [b_3 b_3 \cdot (n+2)] = \dots = [b_n b_n \cdot (2n-1)] = +1,5\delta^2 + 2q.$$

Квадратичные коэффициенты уравнений (5) будут равны

$$[c_1 c_1 \cdot 2n] = \frac{q^2 + 2,125\delta^2 q + 0,375\delta^4}{1,5\delta^2 + q}, [c_i c_i \cdot (2n+i-1)]_{i=2}^n = 0,25\delta^2 + 1,5q.$$

Упрощая дальнейшие вычисления, примем

$$\eta = 1,5\delta^2 + 2q, \nu = 0,25\delta^2 + 1,5q, Y = 4q^3 + 9,375\delta^2 q^2 + 4,5\delta^4 q + 0,5\delta^6. \quad (17)$$

Первый квадратичный коэффициент уравнений (6)

$$[d_1 d_1 \cdot 3n] = 1,5\delta^2 + 2q - \frac{0,25\delta^4}{1,5\delta^2 + q} - \frac{q^2}{1,5\delta^2 + 2q} - \frac{0,25q^2}{0,25\delta^2 + 1,5q} - \frac{0,0625\delta^4 q^2}{(1,5\delta^2 + q)(q^2 + 2,125\delta^2 q + 0,375\delta^4)}, \quad (18')$$

если принять, что

$$\frac{0,25\delta^4}{1,5\delta^2 + q} + \frac{0,0625\delta^4 q^2}{(1,5\delta^2 + q)(q^2 + 2,125\delta^2 q + 0,375\delta^4)} = \frac{0,25\delta^4}{1,5\delta^2 + 2q}$$

(при этом ошибка в величине коэффициента не превысит 1—3%), с учетом (17), приводится к виду:

$$[d_1 d_1 \cdot 3n] = \frac{Y}{\eta\nu}. \quad (18)$$

Все последующие квадратичные коэффициенты уравнений (6), кроме последнего, можно определить из выражения:

$$[d_i d_i \cdot (3n+i-1)]_{i=2}^{n-1} = \frac{Y\beta_{i-1} - 0,25\delta^4 q^2 \nu^2 \beta_{i-2}}{\eta\nu\beta_{i-1}},$$

где  $\beta_{i-1}$  — числитель предыдущей дроби.

Последний квадратичный коэффициент уравнений (6) после ряда преобразований можно представить следующим образом:

$$[d_n d_n \cdot (4n-1)] = \frac{2(q^2 + 2,25\delta^2 q + \delta^4)}{\eta}.$$

Как при преобразовании формулы (18'), так и в дальнейшем, при разложении многочленов на множители, использовался метод Ньютона [5].

Для уравнений (7) получим:

$$[e_1 e_1 \cdot 4n] = 0,625\delta^2 + 2q - \frac{q^2(1,375\delta^2 + q)^2}{(1,5\delta^2 + q)(q^2 + 2,125\delta^2 q + 0,375\delta^4)} - \frac{0,0625\delta^4}{(1,5\delta^2 + q)} - \frac{(\delta^2 + q)^2(\delta^2 + 2q)\nu}{\eta Y},$$

или после ряда преобразований:

$$[e_1 e_1 \cdot 4n] = \frac{(0,528 \delta^2 + q)(6,081 \delta^2 + q)(0,125 \delta^2 + q)}{4(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)},$$

$$[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)]_{i=2}^{n-1} = \frac{(3,125 \delta^2 + q)(0,803 \delta^2 + q)(q - 0,045 \delta^2)}{\eta \nu}.$$

Последний квадратичный коэффициент, без существенной потери точности, можно принять равным коэффициенту  $[e_1 e_1 \cdot 4n]$ .

Уравнения вида (8) и (9) не влияют на точность определения дирекционного угла и длины стороны, поэтому соответствующие им коэффициенты эквивалентной системы не приводятся.

Квадратичный коэффициент уравнений (10) представим в виде:

$$[jj \cdot 7n] = n \left[ 1 - \frac{0,25 \delta^2}{\eta} - \frac{0,0625 \delta^2}{\nu} - \frac{4\delta^2 \eta \nu}{9Y} - \frac{(3,411 \delta^2 + q) \delta^2 \nu}{18(1,74 \delta^2 + q)^2 (q - 0,045 \delta^2)} \right] + \frac{0,25 \delta^2}{\eta} + \frac{0,0625 \delta^2}{\nu} - \frac{0,25 \delta^2}{1,5 \delta^2 + q} - \frac{0,140625 \delta^4}{(1,5 \delta^2 + q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}$$

или после преобразований, с ошибкой не более 1%, получим:

$$[jj \cdot 7n] = \frac{q}{0,5 \delta^2 + q} \cdot n. \quad (19)$$

В табл. 1 приведены значения коэффициентов  $[jj \cdot 7n]$ , полученных как по формуле (19), так и из решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса, для различных значений  $n$  и  $q$ .

Таблица 1

Значения коэффициентов  $[jj \cdot 7n]$

$\frac{ms}{s}$	3		5		8	
	по формуле (19)	по схеме Гаусса	по формуле (19)	по схеме Гаусса	по формуле (19)	по схеме Гаусса
1 : 500 000	0,7593	0,7599	1,2655	1,2654	2,0243	2,0253
1 : 300 000	1,4547	1,4547	2,4247	2,4245	3,8792	3,8791
1 : 100 000	2,6832	2,6847	4,4720	4,4723	7,1552	7,1557

Выражение для квадратичного коэффициента уравнения (11) очень громоздкое, поэтому приведем его в окончательном виде

$$[ll \cdot (7n + 1)] = \frac{0,5 \delta^2 (0,421 \delta^2 + q)(q - 0,125 \delta^2)}{q \eta} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{\delta^2 (2,11 \delta^2 + q)(q - 0,075 \delta^2)}{5 \nu (1,5 \delta^2 + q)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{0,75 \delta^2 q (\delta^2 + q)}{\eta \nu} \cdot (2n-1).$$

Последний квадратичный коэффициент эквивалентной системы с достаточной степенью точности определяется из выражения:

$$[mm \cdot (7n + 2)] = \frac{(0,3 \delta^2 + q)(0,05 \delta^2 + q)(2,25 \delta^2 + q)}{3 \eta (1,5 \delta^2 + q)} n + \frac{(q - 1,28 \delta^2)(q - 0,095 \delta^2)}{4(2\delta^2 + q)}.$$

### Вес функции дирекционного угла стороны в середине ряда

Так как уравнения вида (3), (4) и (5) частично независимы, будем иметь:

$$\begin{aligned} [a_1 f_\alpha] &= [a_2 f_\alpha \cdot 1] = [a_3 f_\alpha \cdot 2] = \dots = [a_k f_\alpha \cdot (k-1)] = -1, \\ [b_1 f_\alpha \cdot n] &= [b_2 f_\alpha \cdot (n+1)] = \dots = [b_k f_\alpha \cdot (n+k-1)] = +0,5\delta, \\ [c_1 f_\alpha \cdot 2n] &= -\frac{0,375\delta^3}{1,5\delta^2 + q}, \quad [c_2 f_\alpha \cdot (2n+1)] = [c_3 f_\alpha \cdot (2n+2)] = \\ &= \dots = [c_k f_\alpha \cdot (2n+k-1)] = -0,25\delta. \end{aligned}$$

Суммарное влияние этих уравнений на величину обратного веса функции дирекционного угла будет равно:

$$\sum_{i=1}^k \frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = -0,5k, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{[b_i f_\alpha \cdot (n+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (n+i-1)]} = -\frac{0,25\delta^2}{1,5\delta^2 + q} - \frac{0,25\delta^2}{\eta} \cdot (k-1), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k \frac{[c_i f_\alpha \cdot (2n+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2n+i-1)]} = \\ &= -\frac{0,140625\delta^6}{(1,5\delta^2 + q)(q^2 + 2,125\delta^2 q + 0,375\delta^4)} - \frac{0,0625\delta^2}{\nu} \cdot (k-1). \quad (22) \end{aligned}$$

Для уравнений (6) и весовой функции дирекционного угла имеем:

$$[d_1 f_\alpha \cdot (3n)] = -0,5\delta - \frac{0,25\delta^3}{\eta} - \frac{0,5\delta q}{\eta} + \frac{0,125\delta q}{\nu} = -\frac{2}{3}\delta,$$

$$[d_i f_\alpha \cdot (3n+i-1)]_{i=2}^k = [d_{i-1} f_\alpha \cdot (3n+i-2)] \cdot \left(1 + \frac{0,5\delta^2 q \nu}{Y}\right).$$

Практически неквадратичные коэффициенты уравнений (6) и весовой функции дирекционного угла равны между собой, поэтому суммарное влияние этих уравнений на обратный вес функции будет равно:

$$\sum_{i=1}^k \frac{[d_i f_\alpha \cdot (3n+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3n+i-1)]} = -\frac{4\delta^2 \eta \nu}{9Y} k. \quad (23)$$

Коэффициенты уравнений (7) и весовой функции, с ошибкой не более 1—2%, можно принять одинаковыми. Поэтому, опустив ряд преобразований, суммарное влияние этих уравнений на обратный вес функции дирекционного угла можно представить выражением:

$$\sum_{i=1}^k \frac{[e_i f_\alpha \cdot (4n+i-1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4n+i-1)]} = -\frac{(3,41\delta^2 + q)\delta^2 \nu}{18(1,74\delta^2 + q)^2 (q - 0,045\delta^2)} \cdot k. \quad (24)$$

Уравнения вида (8) и (9) не влияют на точность дирекционного угла стороны в середине ряда, так как

$$[g_i f_\alpha \cdot (5n+i-1)] = [h_i f_\alpha \cdot (6n+i-1)] = 0.$$

Для уравнения (10) и весовой функции получим:

$$[j f_\alpha \cdot 7n] = \frac{q}{0,5\delta^2 + q} \cdot k,$$

следовательно,

$$\frac{[jf_a \cdot 7n]^2}{[jj \cdot 7n]} = - \frac{q}{0,5 \delta^2 + q} \cdot \frac{k^2}{n} \quad (25)$$

Неквадратичный коэффициент уравнения (11) и весовой функции в виде (13) или (15) будет равен:

$$[lf_a \cdot (7n + 1)] = - \frac{0,5 \delta q}{0,5 \delta^2 + q} \cdot k^2.$$

Величина, вносимая этим уравнением в обратный вес дирекционного угла, определится из выражения:

$$\frac{[lf_a \cdot (7n + 1)]^2}{[ll \cdot (7n + 1)]} = - \frac{q^3 \eta}{3(0,5 \delta^2 + q)^3 (q - 0,10 \delta^2)} \times \frac{k^2}{n} \quad (26)$$

Влиянием уравнения (12) на величину обратного веса функции дирекционного угла можно пренебречь, погрешность при этом не будет превышать 1—2% величины обратного веса.

Зная величины  $[f_a f_a]$  и (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), можно получить приближенную формулу обратного веса функции дирекционного угла стороны в середине ряда, которая после ряда преобразований приводится к виду:

$$\frac{1}{P_a} = + \frac{0,0765 q (0,7 \delta^2 + q)^2}{(0,55 \delta^2 + q)^3} \times 2k. \quad (27)$$

Значения величин  $\frac{1}{P_a}$ , для различных значений  $n$  и  $q$ , вычисленные по формуле (27) и полученные из решения систем нормальных уравнений, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения обратных весов  $1/P_a$  и  $1/P_{lgs}$  при  $m_B = 1''$

n	$\frac{m_s}{S}$	$\frac{1}{P_a}$			$\frac{1}{P_{lgs}}$		
		по схеме Гаусса	по формуле (27)	погрешность, %	по схеме Гаусса	по формуле (33)	погрешность, %
3	1 : 500 000	0,087	0,078	11,5	0,284	0,316	10,1
	1 : 300 000	0,152	0,138	10,1	0,516	0,486	6,2
	1 : 100 000	0,246	0,216	13,9	1,050	1,108	5,2
5	1 : 500 000	0,120	0,130	7,7	0,314	0,321	2,2
	1 : 300 000	0,211	0,230	8,2	0,563	0,517	8,9
	1 : 100 000	0,343	0,360	4,7	1,310	1,435	8,7
8	1 : 500 000	0,200	0,208	3,8	0,318	0,324	1,8
	1 : 300 000	0,353	0,368	4,1	0,590	0,535	10,3
	1 : 100 000	0,564	0,576	2,1	1,478	1,619	8,7

### Обратный вес стороны

Для уравнений вида (3), (4) и весовой функции стороны все неквадратичные коэффициенты эквивалентной системы будут равны нулю, за исключением одного:

$$[b_{n+1} f_a \cdot (n+k)] = q,$$

следовательно, величина, вносимая этими уравнениями в обратный вес функции стороны, будет равна:

$$\frac{[b_{k+1} f_a \cdot (n+k)]^2}{[b_{k+1} b_{k+1} \cdot (n+k)]} = -\frac{q^2}{\eta} \quad (28)$$

Для уравнений (5) и весовой функции стороны получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{[c_i f_a \cdot (2n+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2n+i-1)]} = -\frac{0,25 q^2}{\nu} \quad (29)$$

Неквадратичные коэффициенты уравнений (6) и весовой функции стороны будут иметь вид:

$$[d_k f_a \cdot (3n+k-1)] = q - \frac{q^2}{\eta} - \frac{0,25 q^2}{\nu}, \quad [d_{k+1} f_a \cdot (3n+k)] = -\frac{0,5 \delta^2 q}{\eta},$$

а суммарное влияние уравнений (6) на обратный вес функции стороны, с ошибкой не более 1—3%, определится из выражения:

$$\frac{[d_i f_a \cdot (3n+i-1)]^2}{[d_i d_i \cdot (3n+i-1)]} = -\frac{q^2 (q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}{\eta \nu Y} \quad (30)$$

Величину, вносимую в обратный вес функции стороны уравнениями (7), получим следующим образом:

$$[e_k f_a \cdot (4n+k-1)] = \frac{(\delta^2 + q)(\delta^2 + 2q)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}{\eta Y},$$

$$[e_{k+1} f_a \cdot (4n+k)] = \frac{q^2 (0,5 \gamma^2 + q)(q - 0,125 \delta^2)(q^2 + 2,125 \delta^2 q + 0,375 \delta^4)}{\eta Y} -$$

$$- \frac{0,5 \delta^2 q \nu (\delta^2 + q)(\delta^2 + 2q)}{\eta Y},$$

следовательно, после ряда преобразований получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{[e_i f_a \cdot (4n+i-1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4n+i-1)]} = -\frac{0,75 \delta^2 q^2 (0,195 \delta^2 + q)}{3(1,74 \delta^2 + q)(q - 0,04 \delta^2)} \quad (31)$$

Уравнения вида (8), (9), (10) и (11) незначительно влияют на обратный вес стороны. Этим влиянием можно пренебрегать, при этом ошибка не превысит 4—5% величины обратного веса.

Для уравнений (12) и весовой функции стороны будем иметь:

$$\frac{[m f_a \cdot (7n+2)]^2}{[m m \cdot (7n+2)]} = -\frac{q^3 (2,25 \delta^2 + q)}{3 \eta \nu (0,3 \delta^2 + q)} \times \frac{1}{n} \quad (32)$$

Зная величины (28), (29), (30), (31), (32) и  $[f_a f_a]$ , получим приближенную формулу обратного веса функции стороны в середине ряда

$$\frac{1}{P_{1g} s_k} = \frac{q \eta (q^2 - 1,828 \delta^2 q + 7,3155 \delta^4)}{8,889 (1,74 \delta^2 + q)^2 (0,44 \delta^2 + q)} - \frac{q^3 (2,25 \delta^2 + q)}{3 \eta \nu (0,3 \delta^2 + q)} \times \frac{1}{n} \quad (33)$$

Значения величин  $\frac{1}{P_{1g} s}$ , для различных значений  $n$  и  $q$ , вычисленные по формуле (33) и полученные из решения систем нормальных

уравнений по схеме Гаусса, приведены в табл. 2. Как видно из таблицы, обратные веса  $\frac{1}{P_{1gs}}$  и  $\frac{1}{P_a}$  определяются по формулам (27) и (33) с достаточной степенью точности, следовательно, этими формулами можно пользоваться при предварительной оценке точности несвободных рядов линейно-угловой триангуляции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1964, вып. 1.
2. Новосельская В. П. Оценка точности элементов линейно-углового ряда из геодезических прямоугольников. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1965, вып. 3.
3. Новосельская В. П. Оценка точности элементов линейно-углового ряда, состоящего из ромбов. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 10.
4. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.
5. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М., «Наука», 1972.

Работа поступила в редакцию 10 января 1973 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского ордена Ленина политехнического института.