РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1974 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 19

УДК 528.21;531.26

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ВНУТРЕННЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ

В [1] приведены числовые оценки некоторых характеристик внутреннего гравитационного поля Земли, в частности, среднее интегральное значение $V_{ср}=78\,322\,000$ м^{2}сек$^{-2}$ гравитационного потенциала V внутри Земли $V_{ср}=\frac{1}{\tau}\int\limits_{\tau} Vd\tau$, причем за τ принимался шар, объем которого равен объему Земли. Вывод $V_{ср}$ основан на теореме о среднем для решений уравнения Пуассона. Приведенный результат может быть улучшен.

Полагая известным полярный момент инерции Земли

$$C=\int\limits_{\tau}\delta r^2 d\tau,$$

где δ — плотность земных недр, а r — расстояние точки от оси вращения Земли, и пользуясь уравнением Пуассона $\Delta V=-4\pi f\delta$, запишем

$$-4\pi fC=S_{\tau}r^2\Delta Vd\tau.$$

Преобразовывая последний интеграл по «большой формуле Грина» и учитывая, что $\Delta(r^2)=4$, получим

$$-4\pi fC=4\int\limits_{\tau}Vd\tau+\int\limits_{\sigma}r^2\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma-\int\limits_{\sigma}V\frac{\partial(r^2)}{\partial n}d\sigma,$$

где σ — поверхность, ограничивающая объем Земли τ, а n — направление внешней нормали к δ. Вводя потенциал силы тяжести

$$W=V+\frac{\omega^2}{2}r^2,$$

в котором второе слагаемое — потенциал центробежной силы (ω — угловая скорость вращения Земли), имеем окончательно

$$4\tau V_{ср}=-\int\limits_{\sigma}r^2\frac{\partial W}{\partial n}d\sigma+\int\limits_{\sigma}W\frac{\partial(r^2)}{\partial n}d\sigma-4\pi fC. \qquad (*)$$

Формула (*) позволяет вычислить среднее значение внутреннего гравитационного потенциала планеты, форма которой σ известна по величинам, выводимым из результатов наблюдений, выполняемых на ее поверхности. Заметим, что главные моменты инерции Земли, в том числе и C, входящее в формулу (*), могут быть определены по формулам

$$A=Ma^2\left(\frac{1-H}{H}J_2-2C_{22}\right);\ B=Ma^2\left(\frac{1-H}{H}J_2+2C_{22}\right);\ C=Ma^2\frac{J_2}{H},$$

следуемым из системы трех линейных (относительно A, B, C) уравнений, два из которых выражают гармоники второго порядка I_2 и C_{22}, а третье — динамическое сжатие H через главные моменты инерции Земли.

В формуле (*) под σ может пониматься либо поверхность геоида (или квазигеоида), либо даже физическая поверхность Земли.

Выполненное численное интегрирование по (*) для геоида[1] Стандартной Земли [2] привело к следующим результатам:

$$V_{\text{ср}} = 78352300 \text{ м}^2\text{сек}^{-2} \text{ и } W_{\text{ср}} = 78424300 \text{ м}^2\text{сек}^{-2},$$

погрешности последних значащих цифр которых вызваны, главным образом, неточностью снятия с карты [2] аномалий силы тяжести и ошибками их представительства.

Безразмерные главные моменты инерции Земли суть

$$\frac{A}{Ma^2} = 0{,}329430\ \frac{B}{Ma^2} = 0{,}329437;\quad \frac{C}{Ma^2} = 0{,}330516;$$

здесь может быть ошибочным пятый десятичный знак, что обусловлено, в основном, неточностью принятого значения динамического сжатия Земли $H = 0{,}0032756$ [3].

Заметим, что, если под σ понимается физическая поверхность Земли, то второй интеграл в формуле (*) легко приводится к виду, более удобному для использования:

$$\int\limits_{\sigma} W \frac{\partial (r^2)}{\partial n} d\sigma = W_0 \int\limits_{\sigma} \frac{\partial (r^2)}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{\sigma} \gamma_m H^{\gamma} \frac{\partial (r^2)}{\partial n} d\sigma,$$

где H^{γ} — нормальная высота точки физической поверхности Земли, γ_m — нормальная сила тяжести на середине H^{γ}, W_0 — потенциал силы тяжести в нуле футштока, от которого высоты передаются на всю поверхность σ. В первом же интеграле (*) следует положить $\frac{\partial W}{\partial n} = -g \cos \alpha$ (α — угол наклона физической поверхности Земли к уровенной поверхности $W = \text{const}$). Использование (*) в данном случае дает $V_{\text{ср}} = 78\,239\,900$ м^{2}сек$^{-2}$.

Автор выражает благодарность инженерам Л. Н. Ивановой, П. Г. Черняге и С. Н. Ходорову за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков Г. А. Об оценке некоторых величин, характеризующих внутреннее гравитационное поле Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1973, вып. 17.

2. Стандартная Земля; геодезические параметры Земли на 1966 г. Перевод с английского. М., «Мир», 1969.

3. Фундаментальные постоянные астрономии (XXI симпозиум МАС, Париж, 27—31. V 1963) М., «Мир», 1967.

[1] В этом случае $\frac{\partial W}{\partial n} = -g$.

Работа поступила 18 января 1973 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.