

Г. А. МЕШЕРЯКОВ

О МУЛЬТИПОЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Лежандр и Лаплас создали и разработали теорию шаровых и сферических функций применительно к главным задачам теории потенциала, и с тех пор она является основным математическим аппаратом и теории потенциала, и теории фигуры планет, в частности, теории фигуры Земли. Однако еще Гаусс высказывал идею задавать любую сферическую функцию при помощи ее полюсов. Эту идею развил Максвелл в своем знаменитом трактате [6]. Заметим, что эквивалентная аналитическая теория была создана Клебшом, а алгебраические дополнения к теории Максвелла были сделаны Сильвестром. В настоящее время максвеллово представление сферических и шаровых функций излагается во многих математических сочинениях и руководствах, например [1—3].

Максвелл применил разработанную им теорию сферических функций при исследовании некоторых вопросов электростатики. В начале XX в. Умов [5] воспользовался этой теорией при изучении земного магнетизма, дав тем самым «геометрическую» интерпретацию гауссова потенциала магнитного поля Земли. Ниже описывается опыт применения максвелловой теории сферических функций с ее физическим истолкованием к описанию гравитационного поля и намечается путь к исследованию структуры создающих его тел.

§ 2. Внешний гравитационный потенциал V Земли и других планет сейчас принято [4] представлять в виде

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f \frac{M}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right], \quad (1)$$

где r, ϑ, λ — геоцентрические координаты внешней точки: r — расстояние от «центра» Земли; ϑ — полярное расстояние, $0 \leq \vartheta \leq \pi$; λ — долгота, $0 \leq \lambda < 2\pi$; a — экваториальный радиус; fM, C_{nm}, S_{nm} — стоксовые постоянные планеты, определяемые из спутниковых, гравиметрических и некоторых других наблюдений (M — масса планеты, f — гравитационная постоянная, $f = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3 \text{т}^{-1} \text{сек}^{-2}$).

Запишем потенциал (1) более компактно:

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot Y_n, \quad (2)$$

(Кстати, (1) обычно получают как раз из (2), раскрывая в нем значение Y_n). В формуле (2) Y_n обозначает (с точностью до постоянного множителя) «игрек» Лапласа, то есть сферическую функцию порядка n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = f M a^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta), \quad (3)$$

а каждое слагаемое суммы (2), представляющей общее выражение ньютона потенциала *, а именно

$$V_n = \frac{1}{r^{n+1}} Y_{nn} \quad (4)$$

выражает потенциал n -го порядка. Последний (при любом n) имеет определенный физический смысл: V_n — это потенциал некоторого мультиполя n -го порядка.

§ 3. Понятие мультиполя возникло в электростатике.

Рассмотрим в точке Q потенциал $V^{(1)}$ сил, создаваемых системой двух точечных электрических зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 1), помещенных в точках оси \vec{h}_1 на расстоянии $\vec{h}_1 < r$ один от другого. Пусть затем заряды стремятся совпасть друг с другом ($\vec{h}_1 \rightarrow 0$), оставаясь все время на оси \vec{h}_1 , причем в процессе сближения зарядов

$$qh_1 = \text{const} = M_1. \quad (5a)$$

Предельное положение зарядов дает точечный объект — диполь — мультиполь 1-го порядка, потенциал которого

$$V_1 = \lim_{h_1 \rightarrow 0} V^{(1)} = -M_1 \frac{\partial}{\partial h_1} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (5)$$

Величину M_1 называют моментом диполя, а постоянное направление \vec{h}_1 — его осью.

Вычислим теперь в точке Q потенциал $V^{(2)}$ сил, развиваемых двумя диполями (рис. 2) с одинаковыми моментами M_1 , но ориентированными антипараллельно и расположенными на расстоянии $\vec{h}_2 < r$ друг от друга. Осуществим предельный переход, при котором оба диполя стремятся совпасть ($\vec{h}_2 \rightarrow 0$), перемещаясь вдоль оси \vec{h}_2 навстречу друг другу и оставаясь при сближении все время антипараллельными, причем при уменьшении \vec{h}_2 так возрастает величина момента диполя M_2 , что

$$2! M_1 h_2 = \text{const} = M_2. \quad (6a)$$

В пределе получим новый точечный объект — квадриполь (мультитиполь 2-го порядка), потенциал которого

$$V_r = \lim_{h_2 \rightarrow 0} V^{(2)} = \frac{M_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial h_1 \partial h_2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6)$$

Квадриполь характеризуется моментом M_2 и направлениями своих осей \vec{h}_1 и \vec{h}_2 .

Аналогично конструируются октаполи (мультитиполи 3-го порядка), тетраполи (мультитиполи 4-го порядка) и др.

В общем случае мультитиполь n -го порядка — это точечный объект, получаемый в результате предельного перехода, которому подвергаются два мультиполи $(n-1)$ -го порядка по описанной выше схеме и потенциал которого суть

$$V_n = \lim V^{(n)} = (-1)^n \frac{M_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (7)$$

* Под ньютоновым потенциалом понимают потенциал сил, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния, в частности, потенциалы электростатических и гравитационных сил.

При этом основное свойство V_n , вытекающее из его вывода, заключается в том, что потенциал мультиполя V_n убывает обратно пропорционально r^{n+1} .

Мультиполь порядка n характеризуется $(2n+1)$ элементами: моментом M_n и $2n$ параметрами, определяющими направления n его осей. Зная все элементы мультиполя, по формуле (7) можно построить поле этого мультиполя.

Однако больший интерес представляет обратная задача: восстановить мультиполь по заданному (создаваемому им) полю. Эта задача имеет однозначное решение, и далее мы остановимся на ней. В резуль-

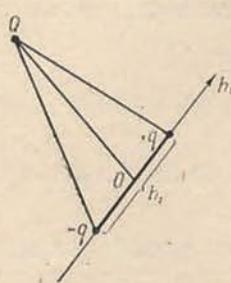


Рис. 1. Приближенная схема диполя.

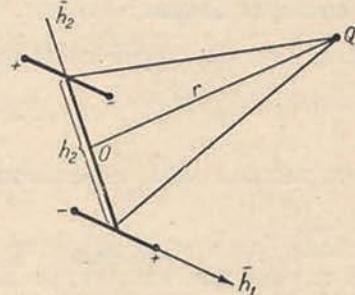


Рис. 2. Приближенная схема квадриполя.

тате решения ее могут быть найдены все $(2n+1)$ параметра, характеризующие мультиполь. Однако, так как мультиполь — точечный объект, получаемый по определению в процессе предельного перехода, представить его наглядно не удается, поэтому приходится довольствоваться приближенной конструкцией мультиполя n -го порядка в виде системы 2^n точечных зарядов с определенным образом чередующимися знаками. При этом направления осей будут получены строго, а приближенность и даже неоднозначность построения системы зарядов обусловливается истолкованием момента мультиполя, который мы будем представлять так:

$$M_n = n! q \prod_{i=1}^n h_i, \quad (7a)$$

где все $h_i = \text{const} \neq 0$.

Указанное приближенное построение мультиполя приводит к тому, что потенциал \tilde{V}_n мультиполя n -го порядка мы аппроксимируем потенциалом $V^{(n)}$ системы точечных зарядов

$$V_n = V^{(n)} + R_n, \quad (8)$$

где R_n — погрешность такой аппроксимации, которая, как легко показать, убывает обратно пропорционально r^{n+2} . Вспоминая основное свойство мультиполя n -го порядка, констатируем, во-первых, высокую степень аппроксимации мультиполя системой точечных зарядов: V_n и $V^{(n)}$ имеют один и тот же порядок малости относительно $\frac{1}{r}$; и, во-вторых, характер влияния погрешности такой аппроксимации: R_n суммируется с потенциалом мультиполей $(n+1)$ -го порядка и более высоких.

§ 4. Разноименные электрические заряды, создающие электростатические поля и входящие в мультиполи, реальны. Для излагаемой ниже мультипольной трактовки гравитационного поля имеет смысл уточнить понятие отрицательных масс, которые наряду с положительными, то есть обычными массами, выполняют при такой трактовке роль зарядов электростатического поля.

Закон всемирного тяготения предполагает только положительные массы. В связи с этим сила притяжения \vec{F}_+ пробной массы $m'=1\text{г}$, помещенной в произвольной точке B , массой $m>0$, создающей поле и расположенной в точке A , коллинеарна вектору $\vec{r}=\vec{AB}$ и всегда направлена в противоположную сторону, то есть к притягивающей точке A .

Теперь скажем, что в точке A помещена отрицательная масса $m<0$, создающая свое поле притяжения и обладающая по определению тем свойством, что (при замене знака у этой массы) новое поле, создаваемое массой $-m$, соответствует обычной ситуации поля тяготения, в котором действует закон Ньютона. В случае поля отрицательной массы мы полагаем, что вектор \vec{F} силы «притяжения»

$$\vec{F}_- = -\vec{F}_+, \quad (9)$$

то есть, он также коллинеарен вектору $\vec{r}=\vec{AB}$, но направлен в ту же сторону, что и \vec{r} .

Наиболее отчетливо характер действия отрицательных масс проявляется в случае притяжения, развиваемого телом произвольного строения, когда это притяжение представляется в виде суперпозиции притяжения однородного тела и притяжений, вызываемых вкрапленными в тело неоднородностями. Так, в теории изостазии в этом случае говорят об избытке масс ($m>0$) и о дефекте масс ($m<0$); последнее как раз и соответствует обсуждаемым здесь отрицательным массам.

§ 5. По Максвеллу сферическая функция n -го порядка $Y_n=Y_n(\vartheta, \lambda)$ представляется выражением

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (10)$$

где r — расстояние от центра сферы O до любой внешней точки $Q(r, \vartheta, \lambda)$; h_1, h_2, \dots, h_n — суть n исходящих из O осей, по направлениям которых в (10) должно выполняться дифференцирование;

M_n — постоянная, называемая моментом сферической функции.

Оси \vec{h}_i ($i=1, 2, \dots, n$) называются осями, а точки $P_n^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) пересечения их со сферой — полюсами функции Y_n . Таким образом, (10) содержит $(2n+1)$ параметр и поэтому дает общее выражение сферической функции n -го порядка; частный вид сферических функций порядка n обусловлен численными значениями момента M_n и выбором направлений их осей, или заданием полюсов.

Вводя сферическую функцию Y_n по (10), замечаем, что потенциал мультиполя (7) принимает вид (4) потенциала n -го порядка V_n . Значит, можно сказать, что сферическая функция порождается мультиполем n -го порядка. На основании этого оси и моменты последнего приобретают смысл таковых и для порождаемой им сферической функции.

Обозначая косинус углов, образуемого лучом OQ с j -ой осью функции, буквой μ_j , а косинусы углов между осями, имеющими индексы j и i , символом λ_{ij} и, выполняя дифференцирование по осям, предписываемые формулой (10), из последней можно получить общую формулу Максвеля

$$\{Y_n\} = M_n S \left[(-1) \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!} \Sigma (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right]. \quad (10a)$$

В этой формуле λ^s означает число косинусов λ_{ij} , содержащихся в каком-либо слагаемом сферической функции, в котором число подстрочных

индексов в произведении различных μ_j и λ_{ij} всегда равно n ; μ^{n-2s} — число косинусов μ_j в том же члене; а символ $\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s)$ — сумму всех членов, содержащих каждый одинаковое число μ_i и λ_{ij} ; S — символ суммирования по s от $s=0$ до $s=\frac{1}{2}n$ при четном n и до $s=\frac{1}{2}(n-1)$ при нечетном. Фигурные скобки, обрамляющие Y_n , означают, что формула (10а) представляет не саму сферическую функцию, а выражает алгоритм образования ее в виде суммы S , в которой указаны коэффициенты перед суммами Σ произведений определенного числа косинусов μ_j и λ_{ij} ; последние суммы Σ должны быть раскрыты в соответствии с заложенным в них смыслом. Так, например, при $n=4$ имеем по (10а)

$$Y_4 = M_4 \left[\frac{35}{8} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 - \frac{5}{8} (\mu_1 \mu_2 \lambda_{34} + \mu_1 \mu_3 \lambda_{24} + \mu_1 \mu_4 \lambda_{23} + \mu_2 \mu_3 \lambda_{14} + \mu_2 \mu_4 \lambda_{13} + \mu_3 \mu_4 \lambda_{12}) + \frac{1}{8} (\lambda_{12} \lambda_{34} + \lambda_{13} \lambda_{24} + \lambda_{14} \lambda_{23}) \right]. \quad (11a)$$

А сферические функции первых порядков имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= M_0; & Y_1 &= M_1 \mu_1; & Y_2 &= M_2 \left(\frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 - \frac{1}{2} \lambda_{12} \right); \\ Y_3 &= M_3 \left[\frac{5}{2} \mu_1 \mu_2 \mu_3 - \frac{1}{2} (\mu_1 \lambda_{23} + \mu_2 \lambda_{31} + \mu_3 \lambda_{12}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В развернутом виде Y_2 , например, записывается так:

$$Y_2 = M_2 \left(\frac{3}{2} \cos Q \Pi_2^{(1)} \cos Q \Pi_2^{(2)} - \frac{1}{2} \cos \Pi_2^{(1)} \Pi_2^{(2)} \right), \quad (11b)$$

где Q — переменная точка сферы, $\Pi_1^{(1)}$ и $\Pi_2^{(2)}$ — полюсы Y_2 .

§ 6. Возвращаясь к гравитационному потенциальному, скажем теперь, что он, наряду с представлением (1), может быть записан также в виде (2), где всякий потенциал n -го порядка V_n выражает собой потенциал мультиполя порядка n , а всякая сферическая функция Y_n дается выражением (10) или (10а).

Переход от потенциала, записанного в виде (1), к его мультипольному представлению осуществляется использованием именно формул (10) или (10а), в которых, однако, должны быть известными моменты и полюсы сферических функций. Для нахождения последних существует несколько методов. В случае задания исходных сферических функций в обычном виде игреков Лапласа наиболее простым по идеи является метод Умова [5]. Сущность его заключается в замене косинусов μ_j и λ_{ij} , входящих в формулы (11), их выражениями через географические координаты текущей точки $Q(\vartheta, \lambda)$ и полюсов сферической функции $\Pi_n^{(i)}(\vartheta_i, \lambda_i)$:

$$\left. \begin{aligned} \mu_j &= \cos \vartheta \cos \vartheta_j + \sin \vartheta \sin \vartheta_j \cos (\lambda - \lambda_j) \\ \lambda_{ij} &= \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j \cos (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

в сравнении правых частей выражений игреков Лапласа и (11) и, наконец, в нахождении из получающихся тригонометрических уравнений координат полюсов сферической функции и ее момента.

Обратный переход, т. е. переход от максвеллова вида сферической функции к ее игреку Лапласа, совершается элементарно путем тригонометрических преобразований формул типа (11) после внесения в них выражений μ_j и λ_{ij} по (12).

Представление гравитационного потенциала в соответствии с теорией Максвелла является полезным как с теоретической, так и с практической точки зрения при рассмотрении разнообразных задач, в которых в той или иной мере он используется. Ниже найдем три первых мультипола Земли и дадим геофизическую интерпретацию их.

§ 7. Будем пользоваться параметрами гравитационного поля Земли по [4]:

$$\left. \begin{aligned} fM = 398601 \cdot 10^9 \text{ м}^3 \text{ сек}^{-2}; \quad C_{20} = -1082,64 \cdot 10^{-6}; \quad C_{22} = 1,536 \cdot 10^{-6}; \\ S_{20} = -0,871 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

кроме того, $C_{10} = C_{11} = S_{11} = C_{21} = S_{21} = 0$.

Мультиполь Земли нулевого порядка. Потенциал Земли нулевого порядка

$$V_0 = \frac{M_0}{r} = \frac{1}{r} \int \delta d\tau = \frac{fM}{r}$$

выражает потенциал точечного «гравитационного заряда» (массы), расположенного в центре масс Земли. Принимая Землю за шар радиуса R , мы можем трактовать V_0 как потенциал шара $R = 6371$ км со средней плотностью Земли $\delta_{ср} = 5,514 \text{ г/см}^3$ или даже как потенциал шара, состоящего из концентрических слоев одинаковой плотности, меняющейся от слоя к слою (сферически симметричное распределение масс), и имеющего массу Земли M .

Мультиполь Земли первого порядка. В соответствии с (13) мы пользуемся здесь системой координат, начало которой совмещено с центром масс Земли ($C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$). За счет этого из формул Умова [5], выражающих положение полюса $P_1^{(1)}$ и момент M_1 , следует неопределенность положения оси диполя и исчезновение его момента ($M_1 = 0$). Таким образом, диполя Земли как такового нет, т. е. в приближении, доставляемом стоксовыми постоянными Земли первого порядка, общая масса земного шара любой плоскостью, проходящей через его центр, делится на две равные части.

Мультиполь Земли второго порядка, то есть предельное положение четырех точечных зарядов, создающих потенциал второго порядка V_2 , также будем искать, основываясь на методе Умова [5]. Однако окончательными формулами последнего не предусмотрен случай, который имеет место в нашей ситуации. Именно, в случае квадриполя гравитационного поля Земли $g_{21} = h_{21} = 0$, а это соответствует исключенному в [5] решению (31) уравнения (30).

Будем поэтому продолжать решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3m} g_{21} &= y \cos \lambda_1 + x \cos \lambda_2; & \frac{2}{3m} h_{21} &= y \sin \lambda_1 + x \sin \lambda_2; \\ \frac{2}{3m} g_{20} &= xy - \frac{1}{2} \cos \Delta; & \frac{4}{3m} g_{22} &= \cos \sigma; & \frac{4}{3m} h_{22} &= \sin \sigma; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

из [5], полагая в ней

$$g_{21} = h_{21} = 0. \quad (15)$$

Вспомним, что здесь

$$\left. \begin{aligned} m &= M_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2; & x &= \operatorname{ctg} \vartheta_1; & y &= \operatorname{ctg} \vartheta_2; \\ \Delta &= \lambda_2 - \lambda_1; & \sigma &= \lambda_2 + \lambda_1; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

символами g_{nm} и h_{nm} обозначены — по Гауссу — коэффициенты сферической функции. Y_2 , а ϑ_1, λ_1 и ϑ_2, λ_2 — суть координаты ее полюсов, определяющих ее оси и оси искомого квадриполя Земли.

Из двух последних формул (14) имеем [5]

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{h_{22}}{g_{22}}; \quad m = \frac{4}{3} \sqrt{g_{22}^2 + h_{22}^2}. \quad (17)$$

Располагая теперь найденным значением σ и бея $\lambda_2 = \sigma - \lambda_1$, скажем, что первые три уравнения (14) образуют систему относительно трех независимых искомых величин x , y и λ_1 . Решение этой системы может существовать только при

$$D = \cos \lambda_1 \sin \lambda_2 - \sin \lambda_1 \cos \lambda_2 = \sin \Delta = 0.$$

(В противном случае однородная система, состоящая из первых двух уравнений (14), имеет лишь нулевые решения $x=y=0$, при которых третье уравнение — (ввиду того, что для Земли $C_{20}^2 > 4(C_{22}^2 + S_{22}^2)$) приводит к $\cos \Delta > 1$). Следовательно,

$$\Delta = 0 \text{ и } \lambda_2 = \lambda_1 = \frac{\sigma}{2}. \quad (18)$$

Значит, любое из первых двух уравнений (14) дает

$$x+y=0, \text{ поэтому } \vartheta_1=\pi-\vartheta_2.$$

Из третьего уравнения (14) имеем затем

$$\operatorname{ctg} \vartheta_{1,2} = \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3m} g_{20}\right)}. \quad (19)$$

По первой формуле из (16) теперь, как и в [5], может быть найден момент квадриполя M_2 .

Таким образом, формулы (16) — (19) доставляют все параметры квадриполя в рассматриваемом случае (15).

Возвращаясь от обозначений Гаусса g_{nm} и h_{nm} к общепринятым теперь обозначениям C_{nm} и S_{nm} , учтем, что

$$\left. \begin{array}{l} g_{20} = \frac{3}{2} k C_{20}; \quad \text{где } k = f Ma^2; \\ g_{21} = 3k C_{21}; \quad h_{21} = 3k S_{21}; \\ g_{22} = 3k C_{22}; \quad h_{22} = 3k S_{22}. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Долготу меридиана, в котором лежат оси квадриполя Земли обозначим как $\bar{\lambda}$, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$. Углы отклонения осей квадриполя от географических полюсов обозначим через $\bar{\vartheta}$, то есть $\vartheta_1 = \bar{\vartheta}$ и $\vartheta_2 = \pi - \bar{\vartheta}$.

За счет смены обозначений из формул (16) — (19) получим для определения параметров гравитационного квадриполя Земли, в случае, когда

$$C_{21} = S_{21} = 0, \quad (21)$$

следующие окончательные формулы:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\bar{\lambda} = \frac{S_{22}}{C_{22}}; \quad 4 \operatorname{ctg}^2 \bar{\vartheta} = - \left(2 + \frac{C_{20}}{\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}} \right); \\ M_2 = 2k (\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2} - 2C_{20}); \end{array} \right\} \quad (22)$$

из которых видно, что множитель $k = f Ma^2$, фигурирующий в формулах (20), не влияет на направления осей квадриполя, а определяет лишь

своим численным значением — его момент, а, значит, и величину его гравитационных зарядов.

Вычисления по последним формулам при принятых значениях (13) параметров Земли приводят к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= 4^\circ 37' 5''; \quad \vartheta_2 = 175^\circ 22' 5''; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 165^\circ 13' 3''; \\ M_2 &= 7,0279 \cdot 10^{25} \text{ м}^5 \text{сек}^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Итак, обе оси гравитационного квадриполя Земли лежат в плоскости меридиана $\bar{\lambda} = 165^\circ 13' 3''$, отклоняясь от географических полюсов на угол $\bar{\vartheta} = 4^\circ 37' 5''$ (рис. 3).

§ 8. Рассмотрим качественную картину гравитационного поля, создаваемого квадриполем Земли, развивающим потенциал $V_2 = Y_2/r^3$. Это поле накладывается на сферически симметричное поле $V_0 = fM/r$ точечной массы M .

Помня, что r — расстояние от центра масс Земли, и полагая $r = \rho = \text{const} > a$, видим, что на сфере радиуса ρ величина силы притяжения квадриполем внешней точки (также как и его потенциала) пропорциональны значениям Y_2 . Найдем поэтому последние в точках пересечения сферы $\rho = \text{const}$ осью вращения Земли, когда $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, и на экваторе этой сферы, то есть при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Так как

$$Y_2 = \frac{M_2}{2} (3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}),$$

где теперь $\lambda_{12} = \cos(\pi - 2\bar{\vartheta}) = -\cos 2\bar{\vartheta}$, то в первом случае

$$Y_2^{\text{пол.}} = -\frac{M_2}{2} (3 \cos^2 \bar{\vartheta} + \cos 2\bar{\vartheta}) < 0,$$

и во втором

$$Y_2^{\text{экв.}} = \frac{M_2}{2} (3 \sin^2 \bar{\vartheta} \cos^2 (\lambda - \bar{\lambda}) + \cos 2\bar{\vartheta}) > 0.$$

Отсюда заключаем, что распределение силы притяжения квадрипольем внешней точки таково, что при одинаковых удалениях от центра планеты она всегда меньше на оси вращения, нежели в точках экваториальной плоскости. (Кроме того, и это важно для последующего, в плоскости экватора она является наибольшей при $\lambda = \bar{\lambda}$ и $\lambda = \bar{\lambda} + \pi$ и наименьшей при $\lambda = \bar{\lambda} \pm \pi/2$). Значит, если мы хотим представить квадриполь (точечный объект, расположенный в центре Земли) приближенно в виде системы четырех точечных зарядов, то необходимо отрицательные заряды (недостаток масс) поместить на оси вращения Земли, а положительные (избыток масс) — в плоскости экватора под долготами $\bar{\lambda}$ и $\bar{\lambda} + \pi$, то есть так, как это показано на рис. 3.

Так как оси квадриполя лежат в плоскости $\lambda = \text{const}$, то и заряды, его образующие, в любой момент стремления их к предельному положению также расположены в этой плоскости на прямых NS и EQ . Причем сугубо ориентировочно может быть оценено и расстояние этих зарядов от центра Земли.

Действительно, если мультиполю нулевого порядка соответствует точечная масса в центре Земли с массой, равной массе всей планеты, то наличие квадриполя объясняется отличием реальной Земли от ее идеальной сферически симметричной модели. А основное видимое различие их в том, что во втором приближении Земля является эллипсоидом.

области положительных аномалий силы тяжести. А это и понятно, ибо этот меридиан идет в среднем вдоль Срединно-Атлантического хребта, рифтовая долина которого предполагается сейчас трещиной земной коры. Меридиан $\bar{\lambda}=165^{\circ}13',3$ Ost рассекает области Восточно-Тихоокеанского поднятия, но хорошего согласия с картами высот геоида и аномалий силы тяжести здесь не отмечается.

Последнее обусловлено, в основном, тем, что мы рассматриваем здесь только V_2 , пренебрегая потенциалами более высоких порядков. Однако не меньшую роль играет, очевидно, и недостаточная гравиметрическая изученность океанических областей, которую еще не могут восполнить данные спутниковых наблюдений.

В заключение отметим, что приведенные результаты относительно расположения эллипсоида инерции Земли можно получить из непосредственного рассмотрения комплекта стоксовых постоянных второго порядка. Однако мы намеренно избрали обрисованный здесь метод, позволивший проиллюстрировать еще нераскрытые возможности мультипольного представления гравитационного потенциала Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Перевод с англ., М., «Иностранная литература», 1952.
2. Кошляков Н. С., Глиннер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики, М., Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Перевод с немецк., М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
4. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли. Перевод с англ., М., «Мир», 1969.
5. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма. — В кн.: Избранные сочинения, М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
6. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism, vol. I, 2nd edition, Oxford, 1881.

Работа поступила 31 января 1973 года.
Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.