РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1974 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 19

УДК 528.14

Л. Н. ПЕРОВИЧ

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПЕРЕДАЧИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТА

Пусть в начальной и конечной точках хода $1, 2, \ldots, n+1$ (рисунок) имеются точные значения астрономических координат и азимутов α_{1-A_1}, α_{n+1-A_n}. Используя формулы работы [1], можно получить значения астрономических координат φ_{k+1}, λ_{k+1} произвольного пункта $k+1$ хода, а также астрономического азимута $\alpha_{k+1,\,k+2}$. Получим формулы для приближенной оценки точности передачи координат φ_{k+1}, λ_{k+1} и азимута

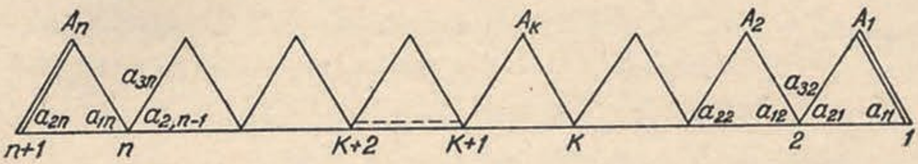

Схема хода поредачи астрономических координат и азимута.

$\alpha_{k+1,\,k+2}$ при условии, что ход уравнен за условия астрономических координат и азимута. Поскольку в реальных условиях зенитные расстояния близки к 90° (все пункты, участвующие в передаче, расположены на земной поверхности), можно положить $z_{12}=z_{21}=z_{1A_1}=\ldots=z_{ij}=90°$.

Учитывая, что ход передачи относительно небольшой протяженности (до 200 км), разность астрономических долгот любых пунктов хода можно принять равной нулю, а астрономическую широту φ_{k+1} равной средней широте хода. Рассчитываем, что подобные предположения приведут к ошибке, не превышающей примерно 10—20%. Астрономические определения на конечных пунктах хода считаем безошибочными.

С учетом наших предположений условные уравнения астрономической широты, долготы и азимута согласно [2] примут соответственно вид:

$$
\begin{gathered}
[(q_2 + q_1 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{12} + (q_2 - q_1 \operatorname{ctg} a_2)\,\delta z_{21} - q_1 \operatorname{cosec} a_1\,\delta z_{1A_1} + \\
+ q_1 \operatorname{cosec} a_2\,\delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + [(q_2 + q_1 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{n,\,n+1} + \\
+ (q_2 - q_1 \operatorname{ctg} a_2)\,\delta z_{n+1,\,n} - q_1 \operatorname{cosec} a_1\,\delta z_{n,\,A_n} + \\
+ q_1 \operatorname{cosec} a_2\,\delta z_{n+1,\,A_n}]_n + \omega_\varphi = 0, \\
p_1\,[(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{12} + (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\,\delta z_{21} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\,\delta z_{1A_1} - \\
- q_2 \operatorname{cosec} a_2\,\delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + p_1\,[(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{n,\,n+1} + \\
+ (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\,\delta z_{n+1,\,n} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\,\delta z_{n,\,A_n} - \\
- q_2 \operatorname{cosec} a_2\,\delta z_{n+1,\,A_n}]_n + \omega_\lambda = 0, \qquad (1) \\
p_2\,[(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{12} + (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\,\delta z_{21} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\,\delta z_{1A_1} - \\
- q_2 \operatorname{cosec} a_2\,\delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + p_2\,[q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\,\delta z_{n,\,n+1} +
\end{gathered}
$$

$$+ (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{n+1,\, n} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{n,\, A_n} - q_2 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{n+1,\, A_n}]_n -$$

$$- \delta a_{11} - \delta a_{21} - \delta a_{32} - \delta a_{12} - \cdots - \delta a_{2n} + \omega_a = 0,$$

где $\quad p_1 = \sec \varphi_{\text{ср}},\ q_1 = -\sin \alpha_{i+1,\, i},\ p_2 = \operatorname{tg} \varphi_{\text{ср}},\ q_2 = -\cos \alpha_{i+1,\, i}.$ (2)

Индекс $i=1, \ldots, k, \ldots, n$ в квадратных скобках указывает на номер треугольника, по элементам которого производятся вычисления.

Весовые функции астрономических координат $F_{\varphi_{k+1}}$, $F_{\lambda_{k+1}}$ и азимута $F_{\alpha_{k+1,\, k+2}}$, обусловленные ошибками измерений, нетрудно получить из выражений (1):

$$F_{\varphi_{k+1}} = [(q_2 + q_1 \operatorname{ctg} a_1)\, \delta z_{12} + (q_2 - q_1 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{21} - q_1 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{1A_1} +$$
$$+ q_1 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + [(q_2 + q_1 \operatorname{ctg} a_1) \delta z_{k,\, k+1} +$$
$$+ (q_2 - q_1 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{k+1,\, k} - q_1 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{k,\, A_k} + q_1 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{k+1,\, A_k}]_k,$$

$$F_{\lambda_{k+1}} = p_1 [(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\, \delta z_{12} + (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{21} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{1A_1} -$$
$$- q_2 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + p_1 [(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\, \delta z_{k,\, k+1} + \qquad (3)$$
$$+ (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{k+1,\, k} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{k,\, A_k} - q_2 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{k+1,\, A_k}]_k,$$

$$F_{\alpha_{k+1,\, k+2}} = p_2 [(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\, \delta z_{12} + (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2) \delta z_{21} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{1A_1} -$$
$$- q_2 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{2A_1}]_1 + \cdots + p_2 [(q_1 - q_2 \operatorname{ctg} a_1)\, \delta z_{k,\, k+1} +$$
$$+ (q_1 + q_2 \operatorname{ctg} a_2)\, \delta z_{k+1,\, k} + q_2 \operatorname{cosec} a_1\, \delta z_{kA_k} -$$
$$- q_2 \operatorname{cosec} a_2\, \delta z_{k+1,\, A_k}]_k - \delta \alpha_{11} - \delta a_{21} - \delta a_{32} - \delta a_{12} - \cdots - \delta a_{1,\, k+1}.$$

Считая измерения равноточными, используем известную формулу

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \cdots \qquad (4)$$

для определения величин обратных весов весовых функций (3).

При этом обозначим в выражениях (1) все коэффициенты первого условного уравнения через a_i, второго — b_i, третьего — c_i и соответственно для (3) — f_{φ_i}, f_{λ_i}, f_{α_i}. Определяя каждый член уравнения (4), после несложных образований получим:

$$\frac{1}{P_{F_{\varphi_{k+1}}}} = 2 \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \left[1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} M_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_i} \right] - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \sum\limits_{i=1}^{n} M_i - \sum\limits_{i=1}^{n} N \sum\limits_{i=1}^{k} M_i \right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \left[4 \sum\limits_{i=1}^{n} P_i \sum\limits_{i=1}^{n} M_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} N_i \right)^2 \right]} \right\},$$

$$\frac{1}{P_{F_{\lambda k+1}}} = 2\, p_1^2 \left\{ \sum_{i=1}^{k} P_i \left[1 - \frac{4 \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \sum\limits_{i=1}^{k} P_i - \sum\limits_{i=1}^{n} N_i \sum\limits_{i=1}^{k} N_i}{4 \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \sum\limits_{i=1}^{n} P_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} N_i \right)^2} \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} N_i \left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \sum\limits_{i=1}^{k} N_i - \sum\limits_{i=1}^{n} N_i \sum\limits_{i=1}^{k} P_i \right)}{4 \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \sum\limits_{i=1}^{n} P_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} N_i \right)^2} \right\}, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{F_{F_{\alpha_{k+1,\,k+2}}}}=2p_2^2\left\{\sum_{i=1}^{k}P_i\left[1-\frac{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{k}P_i-\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\sum\limits_{i=1}^{k}N_i}{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{n}P_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\right)^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}N_i\left(\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\sum\limits_{i=1}^{k}N_i-\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\sum\limits_{i=1}^{k}P_i\right)}{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{n}P_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\right)^2}\right\}+(3k+1)\left(1-\frac{3k+1}{3n-1}\right),$$

где

$$M_i=[q_1^2(\operatorname{ctg}^2a_1+\operatorname{ctg}^2a_2)\pm q_1q_2(\operatorname{ctg}a_1-\operatorname{ctg}a_2)+1]_i,$$

$$N_i=[\pm(q_1^2-q_2^2)(\operatorname{ctg}a_1-\operatorname{ctg}a_2)-2q_1q_2(\operatorname{ctg}^2a_1+\operatorname{ctg}^2a_2)]_i,$$

$$P_i=[q_2^2(\operatorname{ctg}^2a_1+\operatorname{ctg}^2a_2)\mp q_1q_2(\operatorname{ctg}a_1-\operatorname{ctg}a_2)+1]_i, \tag{6}$$

k — количество передач с пункта 1 до пункта $k+1$; n — количество всех передач в ходе.

Верхний знак в выражениях (6) берется в случае, когда треугольники передачи расположены справа от линии передачи, нижний — слева.

Введем обозначения:

$$T_1=\sum_{i=1}^{k}M_i\left[1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}M_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}M_i}\right],\quad t=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}N_i\sum\limits_{i=1}^{n}M_i-\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\sum\limits_{i=1}^{k}M_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\left[4\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\sum\limits_{i=1}^{n}M_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\right)^2\right]},$$

$$T_2=\sum_{i=1}^{k}P_i\left[1-\frac{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{k}P_i-\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\sum\limits_{i=1}^{k}N_i}{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{n}P_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\right)^2}\right], \tag{7}$$

$$t_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}N_i\left(\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\sum\limits_{i=1}^{k}N_i-\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\sum\limits_{i=1}^{k}P_i\right)}{4\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\sum\limits_{i=1}^{n}P_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\right)^2},\quad t_2=(3k+1)\left(1-\frac{3k+1}{3n-1}\right).$$

С учетом наших обозначений формулы (5) примут вид:

$$\frac{1}{P_{F_{\varphi_{k+1}}}}=2(T_1-t),\quad \frac{1}{P_{F_{\lambda_{k+1}}}}=2p_1^2(T_2-t_1),$$

$$\frac{1}{P_{F_{\alpha_{k+1,\,k+2}}}}=2p_2^2(T_2-t_1)+t_2. \tag{8}$$

Получим выражения для вычисления величин обратных весов строго вытянутых ходов, у которых $a_{1i}=a_{2i}=a$. В этом случае

$$q_{11}=q_{21}=\ldots=q_{1i}=q_1,\quad q_{21}=q_{22}=\ldots=q_{2i}=q_2 \tag{9}$$

$$M_i=M=2q_1\operatorname{ctg}^2a+1,\ N_i=N=-4q_1q_2\operatorname{ctg}^2a,\ P_i=P=2q_2^2\operatorname{ctg}^2a+1. \tag{10}$$

Тогда, из (5), с учетом (7) имеем

$$\frac{1}{P_{F_{\varphi_{k+1}}}} = 2k\left(1-\frac{k}{n}\right)M, \quad \frac{1}{P_{F_{\lambda_{k+1}}}} = 2kp_1^2\left(1-\frac{k}{n}\right)P,$$

$$\frac{1}{P_{F_{\alpha_{k+1,\,k+2}}}} = 2\,kp_2^2\left(1-\frac{k}{n}\right)P + t_2, \tag{11}$$

или в окончательном виде

$$\frac{1}{P_{F_{\varphi_{k+1}}}} = C_1 M, \quad \frac{1}{P_{F_{\lambda_{k+1}}}} = C_2\,p\ , \quad \frac{1}{P_{F_{\alpha_{k+1,\,k+2}}}} = C_2\,p_2^2, \tag{12}$$

где

$$C_1 = 2k\left(1-\frac{k}{n}\right), \; C_2 = C_1\,P. \tag{13}$$

Для строго вытянутого хода, состоящего из равносторонних треугольников передач, подсчитаем по известной формуле

$$m_F = \pm\, m\sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{14}$$

средние квадратические ошибки астрономических координат в средних, то есть самых слабых пунктах хода, и азимута $m_{\alpha_{k+1,\,k+2}}$. В таблице приведены результаты вычислений для ходов, состоящих из пяти передач. При выполнении подсчетов принято $n=5$, $k=2$, $m=m_z=m_a=\pm 1''$ и $a=60°$.

Средние квадратические ошибки астрономических координат и азимутов

$\varphi_{ср}$	$a_{i,\,i+1}$	$\pm m_\varphi''$	$\pm m_\lambda''$	$\pm m_\alpha''$
30°	0°	1,55	2,31	2,20
	30	1,67	2,19	2,17
	45	1,79	2,07	2,14
	60	1,90	1,93	2,10
	90	2,00	1,79	2,07
40°	0	1,55	2,61	2,51
	30	1,67	2,48	2,46
	45	1,79	2,33	2,40
	60	1,90	2,18	2,34
	90	2,00	2,02	2,28
50°	0	1,55	3,11	3,03
	30	1,67	2,95	2,93
	45	1,79	2,78	2,84
	60	1,90	2,60	2,74
	90	2,00	2,41	2,63
60°	0	1,55	4,00	3,94
	30	1,67	3,79	3,78
	45	1,79	3,58	3,62
	60	1,90	3,34	3,45
	90	2,00	3,10	3,27
70°	0	1,55	5,85	5,80
	30	1,67	5,55	5,54
	45	1,79	5,23	5,25
	60	1,90	4,89	4,96
	90	2,00	4,53	4,65

Анализ результатов, приведенных в таблице, показывает, что максимальные ошибки астрономической широты достигают величины $\pm 2'',00$. Ошибки астрономических долгот и азимутов значительно возрастают с увеличением широты хода передачи и достигают максимальной величины (при $\varphi = 70°$) $\pm 5'',8$.

Полученные в работе формулы (8) позволяют вычислять величины обратных весов астрономических координат и азимутов любых изогнутых ходов с произвольными горизонтальными углами при основании треугольников передач. Для строго вытянутых ходов надо использовать выражения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4.

2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6.

Работа поступила 17 января 1973 года.
Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского политехнического института.