УДК 528.33:528.28

А. Е. ФИЛИППОВ

К ВОПРОСУ О НАИВЫГОДНЕЙШЕЙ ФОРМЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Пусть в треугольнике $P_1P_2P_3$ пространственной триангуляции известны астрономические координаты φ_1, λ_1 пункта P_1 и астрономический азимут α_{12} направления P_1P_2. Тогда по измеренным значениям горизонтальных углов a_1, a_2 и зенитных расстояний z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{23} можно получить значения астрономических координат φ_2, λ_2 пункта P_2 и обратного азимута α_{21}.

В работе [1] сделана попытка установить наивыгоднейшие геометрические условия для передачи астрономических координат и азимута. Автор показал, что при малых значениях горизонтальных углов ($a_1=a_2<30°$) ошибки измерений настолько искажают результаты, что они становятся практически неприемлемыми. Наилучшие данные получают, если значения углов a_1 и a_2 близки к 90°. Однако два угла в треугольнике одновременно не могут быть равны 90°. Поэтому вопрос о наивыгоднейшей форме треугольника, по существу, остался невыясненным.

Данная статья содержит материал, дополняющий изложенное в работе [1]. При условии, что значения горизонтальных углов a_1 и a_2 не выходят из границ $150° > a > 30°$, с достаточной для расчета точностью справедливы следующие зависимости между ошибками измеренных геометрических элементов треугольника и ошибками вычисленных астрономических координат пункта P_2 [2]:

$$\Delta\varphi_2 = -\cos\alpha_{21}(\Delta z_{12} + \Delta z_{21}) - \sin\alpha_{21}(\operatorname{ctg} a_1 \Delta z_{12} - \operatorname{ctg} a_2 \Delta z_{21} - \operatorname{cosec} a_1 \Delta z_{13} + \operatorname{cosec} a_2 \Delta z_{23});$$

$$\Delta\lambda_2 \cos\varphi_2 = -\sin\alpha_{21}(\Delta z_{12} + \Delta z_{21}) + \cos\alpha_{21}(\operatorname{ctg} a_1 \Delta z_{12} - \operatorname{ctg} a_2 \Delta z_{21} - \operatorname{cosec} a_1 \Delta z_{13} + \operatorname{cosec} a_2 \Delta z_{23}). \quad (1)$$

Относительная погрешность значений коэффициентов формул (1) при углах наклона линий к горизонту $\beta < 6°$ не превысит 10%. С влиянием ошибок Δa_1, Δa_2 горизонтальных углов по сравнению с влиянием ошибок зенитных расстояний при указанных условиях можно не считаться. Формулы (1) соответствуют расположению вершины P_3 справа от направления P_1P_2.

Обозначив через m_z среднюю квадратическую ошибку измеренных зенитных расстояний, получим, на основании формул (1), следующие выражения для средних квадратических ошибок координат пункта P_2:

$$m^2_{\varphi_2} = [2 + \sin 2\alpha_{21}(\operatorname{ctg} a_1 - \operatorname{ctg} a_2) + 2\sin^2\alpha_{21}(\operatorname{ctg}^2 a_1 + \operatorname{ctg}^2 a_2)]\, m^2_z;$$

$$m^2_{\lambda_2}\cos^2\varphi_2 = [2 - \sin 2\alpha_{21}(\operatorname{ctg} a_1 - \operatorname{ctg} a_2) + 2\cos^2\alpha_{21}(\operatorname{ctg}^2 a_1 + \operatorname{ctg}^2 a_2)]\, m^2_z. \quad (2)$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — соответственно составляющие вектора ошибки вычисленного для пункта P_2 направления отвесной линии в вертикальной плоскости пункта P_1 и в перпендикулярной к ней плоскости. Для средних квадратических значений m_{ψ_1}, m_{ψ_2} этих составляющих на основании формул (1) получим

$$m^2_{\psi_1} = 2m^2_z; \quad m^2_{\psi_2} = 2(1 + \operatorname{ctg}^2 a_1 + \operatorname{ctg}^2 a_2)\, m^2_z. \quad (3)$$

Из выражений (3) следует, что продольная ошибка m_{ψ_1} при сделанных выше предположениях о величинах углов наклона линий к горизонту и величинах горизонтальных углов a_1 и a_2 практически не зависит от формы треугольника.

Наивыгоднейшую форму треугольника для передачи астрономических координат по одной его стороне P_1P_2 найдем из условия минимума величины

$$M^2_2 = m^2_{\varphi_2} + \cos^2\varphi_2 m^2_{\lambda_2} = m^2_{\psi_1} + m^2_{\psi_2} = 2(2 + \operatorname{ctg}^2 a_1 + \operatorname{ctg}^2 a_2)\, m^2_z, \quad (4)$$

рассматривая ее как функцию углов a_1 и a_2. Очевидно, M_2 есть средняя квадратическая ошибка вычисленного направления отвесной линии в пункте P_2. Величины m_{φ_2} и $\cos\varphi_2\, m_{\lambda_2}$ являются составляющими этой ошибки в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала.

Поскольку углы треугольника связаны условием

$$a_1+a_2+a_3-180°=0, \qquad (5)$$

решение сводится к отысканию условного минимума функции

$$\Sigma=2(2+\mathrm{ctg}^2\, a_1+\mathrm{ctg}^2\, a_2).$$

Приравняв к нулю частные производные по переменным a_1 и a_2 от функции

$$\Sigma'=\Sigma+k(a_1+a_2+a_3-180°),$$

где k — множитель Лагранжа, и приняв во внимание (5), получим систему уравнений

$$\sin^3 a_1 \cos a_2-\sin^3 a_2 \cos a_1=0; \quad a_1+a_2+a_3-180°=0. \qquad (6)$$

Решением системы (6) являются следующие значения величин a_1 и a_2:

$$a_1=a_2=90°-\frac{a_3}{2}.$$

Таким образом, при конкретном значении горизонтального угла a_3 в вершине P_3 минимум ошибки M_2 достигается при равенстве углов a_1 и a_2. В этом случае имеем

$$M_2=2\sec\frac{a_3}{2}\, m_z.$$

Как видим, уже при $a_3=50°$ значение $M_2=2{,}2\ m_z$ незначительно отличается от предельного минимального значения $2m_z=\lim\ (M_2)_{a_3\to 0}$.

Ошибка M_2 при различных значениях углов a_1, a_2 $a_3=180°-a_1-a_3$ и $m_z=1'',0$

a_1	a_3: 20°	40°	60°	80°	100°	120°
30°	3″,4	3″,2	3″,2	3″,2	3″,4	4″,0
50	2 ,4	2 ,3	2 ,4	2 ,6	3 ,4	
70	2 ,1	2 ,1	2 ,4	3 ,2		
90	2 ,1	2 ,3	3 ,1			
110	2 ,4	3 ,2				
130	3 ,4					

В таблице даны значения ошибки M_2, рассчитанные по формулам (3) и (4).

Пусть в треугольнике $P_1P_2P_3$ измерены горизонтальные углы и взаимные зенитные расстояния во всех вершинах, а астрономические координаты передаются с пункта P_1 как на пункт P_2, так и на пункт P_3. Для пункта P_3 по аналогии с выражениями (2) и (4) получаем

$$m_{\varphi 3}^2=[2-\sin 2\alpha_{31}(\operatorname{ctg} a_1-\operatorname{ctg} a_3)+2\sin^2\alpha_{31}(\operatorname{ctg}^2 a_1+\operatorname{ctg}^2 a_3)]\,m_z^2;$$

$$\cos^2\varphi_3 m_{\lambda_3}^2=[2+\sin 2\alpha_{31}(\operatorname{ctg} a_1-\operatorname{ctg} a_3)+$$

$$+2\cos^2\alpha_{31}(\operatorname{ctg}^2 a_1+\operatorname{ctg}^2 a_3)]\,m_z^2;$$

$$M_3^2=m_{\varphi_3}^2+\cos^2\varphi_3 m_{\lambda_3}^2=2(2+\operatorname{ctg}^2 a_1+\operatorname{ctg}^2 a_3)\,m_z^2. \qquad (7)$$

Наивыгоднейшую форму треугольника в этом случае определим из условия минимума величины $M_2^2+M_3^2$ как функции горизонтальных углов треугольника. Теперь решение сводится к отысканию условного минимума функции

$$\Sigma=2(2+\operatorname{ctg}^2 a_1+\operatorname{ctg}^2 a_2)+2(2+\operatorname{ctg}^2 a_1+\operatorname{ctg}^2 a_3).$$

Приравняв к нулю частные производные от функции $\Sigma'=\Sigma+$ $+k(a_1+a_2+a_3-180°)$ по переменным a_1, a_2, a_3 и приняв во внимание (5), получим

$$2\sin^2 a_2\cos a_1-\cos a_2\sin^3 a_1=0;$$

$$2\sin^3 a_3\cos a_1-\cos a_3\sin^3 a_1=0;\quad a_1+a_2+a_3-180°=0. \qquad (8)$$

Решив систему (8), получим следующие значения горизонтальных углов: $a_1=67{,}6°$, $a_2=a_3=56{,}2°$. Как видим, треугольник по форме должен быть близок к равностороннему.

Ниже приведены средние квадратические ошибки m_φ, $\cos\varphi\, m_\lambda$ для вершин P_2 и P_3, рассчитанные по формулам (2) и (7) для треугольника наивыгоднейшей формы при $m_z=1'',0$ и при различных значениях азимута α_{12} направления P_1P_2:

α_{12}	m_{φ_2}	$\cos\varphi_3 m_{\lambda_3}$	m_{φ_3}	$\cos\varphi_2 m_{\lambda_2}$
	$''$	$''$	$''$	$''$
0°,180°	1,4	1,8	1,8	1,4
30 ,210	1,4	1,8	1,8	1,4
60 ,240	1,6	1,6	1,6	1,6
90 ,270	1,8	1,4	1,4	1,8
120 ,300	1,8	1,4	1,4	1,8
150 ,330	1,6	1,6	1,6	1,6

Рассмотрим, наконец, случай, когда в пунктах P_1 и P_2 известны жесткие значения астрономических координат φ_1, φ_2, λ_1, λ_2 и азимутов α_{12}, α_{21}, а во всех вершинах измерены горизонтальные углы и зенитные расстояния. Астрономические координаты пункта P_3 тогда можно получить дважды: передачей по стороне P_1P_3 и по стороне P_2P_3. На основании формул, приведенных в работе [2], для ошибок средних значений координат φ_3, λ_3 найдем

$$\Delta\varphi_3=\frac{1}{2}(-\cos\alpha_{31}+\sin\alpha_{31}\operatorname{ctg}a_1)\Delta z_{13}-$$

$$-\frac{1}{2}(\cos\alpha_{31}+\sin\alpha_{31}\operatorname{ctg}a_3+\sin\alpha_{32}\operatorname{cosec}a_3)\Delta z_{31}+$$

$$+\frac{1}{2}(-\cos\alpha_{32}+\sin\alpha_{32}\operatorname{ctg}a_3+\sin\alpha_{31}\operatorname{cosec}a_3)\Delta z_{32}-$$

$$-\frac{1}{2}\sin\alpha_{31}\operatorname{cosec}a_1\Delta z_{12}+\frac{1}{2}\sin\alpha_{32}\operatorname{cosec}a_2\Delta z_{21}-$$

$$-\frac{1}{2}(\cos\alpha_{32}+\sin\alpha_{32}\operatorname{ctg}a_2)\Delta z_{23};$$

$$\cos\varphi_3\Delta\lambda_3=-\frac{1}{2}(\sin\alpha_{31}+\cos\alpha_{31}\operatorname{ctg}a_1)\Delta z_{13}+$$

$$+\frac{1}{2}(-\sin\alpha_{31}+\cos\alpha_{31}\operatorname{ctg}a_3+\cos\alpha_{32}\operatorname{cosec}a_3)\Delta z_{31}-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin\alpha_{32}+\cos\alpha_{32}\operatorname{ctg}a_3+\cos\alpha_{31}\operatorname{cosec}a_3)\Delta z_{32}+$$

$$+\frac{1}{2}\cos\alpha_{31}\operatorname{cosec}a_1\Delta z_{12}-\frac{1}{2}\cos\alpha_{32}\operatorname{cosec}a_2\Delta z_{21}+$$

$$+\frac{1}{2}(-\sin\alpha_{32}+\cos\alpha_{32}\operatorname{ctg}a_2)\Delta z_{23}, \tag{9}$$

откуда

$$M_3^2=m_{\varphi_3}^2+\cos^2\varphi_3 m_{\lambda_3}^2=$$

$$=\left(2+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 a_1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 a_2+2\operatorname{ctg}^2 a_3\right)m_z^2.$$

Нетрудно показать, что минимум функции M_3^2, если $a_1+a_2+a_3=180°$, достигается при $a_1=a_2=52{,}7°$ и $a_3=74{,}6°$. Как видим, и в этом случае форма треугольника должна быть близка к равносторонней.

Заметим, что ошибка передачи астрономического азимута по какой-либо стороне треугольника зависит от формы треугольника (при малых углах наклона линий к горизонту) практически в той же мере, что и величина $\Delta\lambda\sin\varphi$, то есть $\Delta\alpha\approx\approx\Delta\lambda\sin\varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перович Л. Н. О выгоднейшей форме треугольника в звене пространственной триангуляции для передачи астрономических координат и азимута. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.

2. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6.

Работа поступила в редколлегию 14 января 1975 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.