

И. С. ТРЕВОГО, С. Г. ВЛАСЕНКО

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ВИДА ФУНКЦИИ ОШИБКИ ПРИ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ И РАДИОГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Совокупность влияния отдельных погрешностей на точность светодальномерных и радиодальномерных измерений выражается известной зависимостью

$$m_s = \pm \sqrt{\left(\frac{c}{4\pi f \cdot n}\right)^2 m_\varphi^2 + m_k^2 + m_u^2 + \left[\left(\frac{m_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_n}{n}\right)^2\right] \cdot S^2} \quad (1)$$

между средней квадратической ошибкой m_s расстояния S и средними квадратическими ошибками: измерения разности фаз φ — m_φ , определения постоянной дальномера k — m_k , установки приборов над концами измеряемой линии — m_u , частоты f — m_f , скорости распространения сигнала в вакууме c — m_c и показателя преломления n — m_n .

Введя обозначения

$$K^2 = \left(\frac{c}{4\pi f \cdot n}\right)^2 m_\varphi^2 + m_k^2 + m_u^2, \quad (2)$$

$$K_1^2 = \left(\frac{m_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_n}{n}\right)^2, \quad (3)$$

и подставляя K^2 и K_1^2 в (1), получим формулу

$$m_s^2 = K^2 + K_1^2 \cdot S^2, \quad (4)$$

выражающую криволинейную зависимость ошибки m_s от расстояния, измеряемого свето- или радиодальномером.

Кроме формулы (4) известны еще эмпирические зависимости средней квадратической ошибки от расстояния. В общем виде их можно записать так:

$$m_s = \pm (K + K_1 \cdot S^n). \quad (5)$$

Ранее предполагалось, что корреляция между ошибкой измерения и длиной линии такова, что n принимает значения 0,5; 1; 2. Однако, как показал проф. В. В. Величко [4], оптимальным является случай, когда $n=1$, то есть

$$m_s = \pm (K + K_1 \cdot S). \quad (6)$$

Выражение (6) широко применяется при электрооптических и радиогеодезических измерениях. Оно выражает прямолинейную зависимость m_s от S . Значения коэффициентов K и K_1 определяют по результатам измерений, используя принцип наименьших квадратов. Числовые значения K и K_1 находят также из корреляционного анализа величин m_s и S при составлении уравнения регрессии [1]. Хотя формула (4) сложнее выра-

жения (6), она все же в настоящее время часто используется на практике [3, 6, 9].

Исследуем возможность наилучшего определения вида функции ошибки m_s линейных измерений для различных типов и экземпляров свето- и радиодальномеров.

Подойдем иначе к установлению вида функции, описывающей зависимость средней квадратической ошибки от расстояния. Поскольку в результате эксперимента обычно получают ряд значений m_s при различных расстояниях, то рассмотрим в более общем виде некоторую функцию $y=f(x)$. Для такой функции, используя интерполяционную формулу Лагранжа, можно построить полином n -й степени

$$L_n(x) = K_0x^0 + K_1x^1 + K_2x^2 + \dots + K_nx^n. \quad (7)$$

Полином Лагранжа хорошо представляет функцию, но вычисление его при больших n является трудоемким. Кроме того, часто удержание большого числа членов ряда (7) является излишним. Поэтому здесь для определения связи между переменными x и y целесообразно применить другой метод, а именно, простой и весьма точный способ интерполирования с помощью полиномов академика П. Л. Чебышева.

П. Л. Чебышев представил функцию $u=f(t)$, где $-1 \leq t \leq 1$, в виде следующего ряда:

$$u = K_0\psi_0(t) + K_1\psi_1(t) + K_2\psi_2(t) + \dots + K_\lambda\psi_\lambda(t) + \dots, \quad (8)$$

где K — числовые коэффициенты, зависящие от результатов измерений, а $\psi(t)$ — полиномы Чебышева.

Переход от функции $y=f(x)$ к функции $u=f(t)$ осуществляется по формулам

$$t_i = \frac{x_i - x_c}{0,5(x_n - x_0)}; \quad u_i = y_i - y_c, \quad (9)$$

где $x_c = 0,5(x_n + x_0)$; $y_c = 0,5(y_n + y_0)$; x_i и y_i — табличные значения аргумента и функции, x_0 и x_n — наибольшее и наименьшее значения аргумента, а y_0 и y_c — соответствующие им значения функции.

Выражение (8) — быстросходящийся ряд, члены которого П. Л. Чебышев предложил вычислять последовательно (не ограничиваясь заранее их числом) по формулам [5]. Ограничимся записью их в общем виде.

Для определения члена λ -го порядка $K_\lambda\psi_\lambda(t)$ будем иметь [5]:

$$K_\lambda\psi_\lambda(t) = K_\lambda(t - b_\lambda)\psi_{\lambda-1}(t) - a_\lambda\psi_{\lambda-2}(t); \quad M_\lambda = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta_\lambda^2}{n}}; \quad (10)$$

где

$$K_\lambda = [\Sigma t_i^\lambda U_i - (0,\lambda)K_0 - (1,\lambda)K_1 - \dots] : (\lambda\lambda); \quad \Sigma \delta_\lambda^2 = \Sigma_{\lambda-1} \delta_{\lambda-1}^2 - (\lambda\lambda) \cdot K_\lambda^2;$$

$$(\lambda\lambda) = (\lambda - 1, \lambda + 1) - b_\lambda(\lambda - 1, \lambda) - a_\lambda(\lambda - 2, \lambda), \quad \psi_0(t) = 1;$$

$$a_\lambda = \frac{(\lambda - 1, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)}; \quad b_\lambda = \frac{(\lambda - 1, \lambda)}{(\lambda - 1, \lambda - 1)} - \frac{(\lambda - 2, \lambda - 1)}{(\lambda - 2, \lambda - 2)};$$

$$(0,2\lambda - 1) = \Sigma x_i^{2\lambda-1} \quad (0,2\lambda) = \Sigma x_i^{2\lambda};$$

$$(1,2\lambda - 2) = (0,2\lambda - 1) - b_1(0,2\lambda - 2); \quad (1,2\lambda - 1) = (0,2\lambda) - b_1(0,2\lambda - 1);$$

$$(2,2\lambda - 3) = (1,2\lambda - 2) - b_2(1,2\lambda - 3) - a_2(0,2\lambda - 3);$$

$$(2,2\lambda - 2) = (1,2\lambda - 1) - b_2(1,2\lambda - 2) - a_2(0,2\lambda - 2);$$

$$(3,2\lambda - 2) = (2,2\lambda - 3) - b_3(2,2\lambda - 4) - a_3(1,2\lambda - 4);$$

$$(3,2\lambda - 3) = (2,2\lambda - 2) - b_3(2,2\lambda - 3) - a_3(1,2\lambda - 3);$$

Вычисление полиномов λ -го порядка существенно облегчается использованием результатов всех предыдущих вычислений. Это важное преимущество метода.

Таблица 1

Характеристики линейных измерений

Тип прибора	Физико-географический район	Число линий	Длина линий (км)			Ошибки измерений (см)		
			min	max	среднее	вид ошибки	min	max
СВВ-1*	—	20	2,0	8,7	4,9	истинная	2,0	7,0
РДГ	Западная Сибирь	21	6,9	22,8	12,3	вероятная	0,4	2,7
МА-100*	Южная Африка	21	0,2	1,2	0,6	„	0,02	0,11
МА-100*	„	43	0,2	1,9	0,7	„	0	0,3
СВВ-1*	„	9	3,0	10,2	5,6	„	2,0	8,0
СВВ-1*	—	16	4,8	11,2	7,5	истинная	1,0	19,0
ТД-2	Средняя Азия	40	0,2	2,1	0,8	вероятная	0,3	2,2
NASM-2A	Карпаты	18	6,0	25,1	13,9	„	0,3	0,8
РДГВ	Донбасс	31	1,0	5,2	3,0	„	0,5	2,2
ЛУЧ	Западная Сибирь	18	9,2	56,8	37,9	„	1,0	6,5
Σ		237						

* Материалы опубликованы в [1], [2], [9].

Если при составлении многочлена (8) достаточно ограничиться членом 1-го или 2-го порядков, то объем вычислений по выражениям (10) примерно такой же, как при получении коэффициентов K и K_1 для выражений (4) и (6). Однако, аппроксимируя зависимость ошибки m_s от расстояния при помощи полиномов П. Л. Чебышева можно достичь, как будет показано ниже, большей точности, чем другими методами. Кроме того, в каждом конкретном случае вид функции ошибки устанавливается без ограничения числа членов ряда (8). Вычисления сводят в простую таблицу [8] и заканчивают их, если при учете очередного члена средняя квадратическая ошибка M не уменьшилась или уменьшилась незначительно.

Для 237 линий (длиной около 1500 км), взятых из производственных, экспериментальных и опубликованных материалов, измеренных десятью свето- и радиодальномерами в различных физико-географических районах, нами составлены функции ошибок в виде выражений (4), (6), (8) и приведена оценка точности.

Необходимые характеристики линейных измерений помещены в табл. 1. Полученные формулы ошибки m_s для всех десяти случаев и их ошибки M приведены в табл. 2, 3. В обработку включены материалы измерения линий (с большими колебаниями длин, вероятнейшими и истинными ошибками измерений), выполненные приборами разной точности.

Проанализируем полученные результаты. По оценке точности видно (табл. 2 и 3), что наилучшее приближение функции ошибки получено при использовании полиномов Чебышева. Только в четырех случаях (строки 1; 3; 7; 8) ошибки M оказались равными для всех видов функции, а в остальных зависимости, установленные с помощью полиномов, имеют наименьшие значения M . Например, в строке 6 — на 19%, в строке 5 — на 15% и т. д. В четырех случаях оказалось целесообразным учитывать член 2-го порядка. Например, в строке 6 он уменьшает ошибку M на 14%, а в строке 2 — на 10%. Таким образом, имеет смысл при небольшом объеме линейных измерений прибегать к параболиче-

скому интерполированию функции ошибки, особенно при испытаниях свето- и радиодальномеров.

Особо остановимся на анализе формулы (4), выражающей криволинейную зависимость ошибки m_S от расстояния. Из анализа табл. 2 и 3

Таблица 2

Виды зависимости ошибки m_S от расстояния*

Тип прибора	Нелинейная зависимость на основе формулы (4)	M	Коэффициент корреляции
СВВ-1	$m_S^2 = 2,61 + 0,51S^2$	0,87	0,79
РДГ	$m_S^2 = -0,89 + 0,014S^2$	—	0,70
МА-100	$m_S^2 = 0,026 + 0,055S^2$	0,023	0,46
МА-100	$m_S^2 = 0,146 - 0,031S^2$	0,069	-0,09
СВВ-1	$m_S^2 = 3,78 + 0,47S^2$	1,30	0,68
СВВ-1	$m_S^2 = -21,44 + 1,92S^2$	5,10	0,79
ТД-2	$m_S^2 = 0,63 + 0,70S^2$	0,50	0,32
NASM-2A	$m_S^2 = 1,52 + 0,005S^2$	0,096	0,58
РДГВ	$m_S^2 = 1,75 + 0,03S^2$	0,54	0,17
ЛУЧ	$m_S^2 = 7,33 + 0,004S^2$	1,50	0,40

* В табл. 2 и 3 S принято в км, а m_S в см.

видно, что она дает более точные результаты, чем в случае прямолинейной зависимости, а для примера 2 (радиодальномер РДГ) неожиданно оказалось, что выражение $m_S = -0,89 + 0,014S^2$ невозможно использовать для расчета ошибок m_S из-за знака минус, возникающего в подкоренном выражении. Например, при $S = 7$ км $m_S = \pm \sqrt{-0,20}$.

Таблица 3

Виды зависимости ошибки от расстояния при использовании полиномов П. Л. Чебышева

Тип прибора	При учете члена первого порядка*	M	При учете члена второго порядка	M
СВВ-1	$m_S = 0,74 + 0,63S$	0,87	$m_S = 1,47 + 0,31S + 0,03S^2$	0,86
РДГ	$m_S = -0,32 + 0,10S$	0,45	$m_S = 1,26 - 0,16S + 0,01S^2$	0,40
МА-100	$m_S = 0,035 + 0,050S$	0,022	$m_S = 0,029 + 0,072S - 0,017S^2$	0,022
МА-100	$m_S = 0,102 - 0,015S$	0,066	$m_S = 0,034 - 0,008S - 0,004S^2$	0,065
СВВ-1	$m_S = 1,10 + 0,56S$	1,28	$m_S = 4,69 - 0,69S + 0,09S^2$	1,21
СВВ-1	$m_S = -1,25 + 1,24S$	4,78	$m_S = 34,52 - 8,57S + 0,62S^2$	4,15
ТД-2	$m_S = 0,70 + 0,44S$	0,50	$m_S = 0,78 + 0,44S - 0,016S^2$	0,50
NASM-2A	$m_S = 0,288 + 0,14S$	0,095	$m_S = 0,332 + 0,008S + 0,0002S^2$	0,095
РДГВ	$m_S = 0,99 + 0,11S$	0,51	$m_S = -0,094 + 0,79S - 0,11S^2$	0,49
ЛУЧ	$m_S = 1,52 + 0,05S$	1,45	$m_S = -0,062 + 0,155S - 0,002S^2$	1,42

* Установление функции ошибки в виде линейной зависимости нами выполнено также другими способами, однако результаты оказались идентичными к приведенным в табл. 3.

Важным является апробирование полученных результатов на большом материале. Поэтому мы обработали 116 линий (1276 км) радиополигонометрии II класса, проложенной в Западной Сибири. Зависимость ошибки m_S от S установлена дважды: по формулам (4) и (8), и получены следующие выражения:

$$m_S^2 = 0,448 + 0,0063 S^2; \quad M = \pm \sqrt{\frac{45,63}{116}} = \pm 0,63 \text{ см};$$

$$m_S = 0,333 + 0,051 \cdot S; \quad M = \pm \sqrt{\frac{44,46}{116}} = \pm 0,62 \text{ см};$$

$$m_S = 1,002 - 0,064 S + 0,004 S^2; \quad M = \pm \sqrt{\frac{43,60}{116}} = \pm 0,61 \text{ см}.$$

Как видим, и в этом примере результат, полученный по формуле (4), не оказался более точным. Таким образом, нет веских оснований широко применять криволинейную зависимость (4).

В литературе содержатся противоречивые сведения о степени корреляционной связи между ошибками расстояний, измеренных свето- и радиодальномерами, и самими расстояниями. Например, в [3], [7] и др. коэффициенты корреляции, полученные на основе большого производственного материала, колеблются от 0,2 до 0,8. Это подтверждается также и результатами, приведенными в табл. 2. Поэтому, очевидно, нет оснований утверждать о достаточно тесной связи между средней квадратической ошибкой и расстоянием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В. Д. Применение метода корреляции при оценке свето-дальномерных измерений. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1958, вып. 1.
2. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений, М., «Недра», 1965.
3. Бондаренко В. Н. Уравнение результирующей ошибки радиодальномерных измерений. XXII научно-техн. конференция НИИГАиК и НОВАГО. Тезисы докладов. Новосибирск, 1972.
4. Величко В. В. Определение вида функции ошибки и анализ точности свето-дальномерных измерений. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1963, вып. 4.
5. Глазенап С. П. Математические и астрономические таблицы. АН СССР, 1932.
6. Иордан В., Эггерт О., Кнейсль М. Руководство по геодезии, т. 6, М., «Недра», 1971.
7. Паншин Е. И. Анализ погрешностей измерения расстояния свето-дальномером СВВ-1 с применением нулевого метода. — В сб.: Геодезия. Новосибирск, 1970.
8. Тревого И. С. О предвычислении ошибки расстояния, измеряемого свето-дальномером. — «Геодезия и картография», № 1, 1973.
9. Hölscher H. D. An electro-optical distance measuring system of high accuracy for short ranges — «Survey Review», 1970, 20, N 158.

Работа поступила 8 декабря 1972 г. Рекомендована кафедрой геодезии Львовского политехнического института.