

## ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 528.181

В. И. ВАЛИЕВ

### К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

В статье В. А. Ладейниковой\* предлагается способ нахождения неизвестных, заключающийся в приведении матрицы коэффициентов нормальных уравнений, имеющей трехдиагональный вид, к диагональному виду путем ряда матричных преобразований. Для решения подобных систем мы используем другой метод, основанный на классическом методе Ганзена, состоящем в нахождении элементов обратной матрицы с помощью неопределенных коэффициентов.

Пусть в системе нормальных уравнений

$$AX + W = 0$$

матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Вектор неизвестных получается в виде:

$$X = -QW,$$

где

$$Q = A^{-1} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Используя указанный метод, элементы матрицы  $Q$  легко получить следующим образом.

Сначала вычислим  $n$  вспомогательных величин  $\tilde{a}_{i,i}$  по рекуррентным формулам:

$$\tilde{a}_{i,i} = a_{i,i} - a_{i,i-1} \tilde{a}_{i-1,i-1} a_{i-1,i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

причем  $a_{1,1} = \tilde{a}_{1,1}$ .

Вычисление элементов матрицы  $Q$  начинается с правого нижнего угла:

$$q_{n,n} = \tilde{a}_{n,n}.$$

Затем вычисляем элементы правого столбца  $q_{i,n}$  снизу вверх:

$$q_{i,n} = -\tilde{a}_{i,i} a_{i,i+1} q_{i+1,n} \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1).$$

Поскольку матрица  $Q$  симметрична,  $q_{i,n} = q_{n,i}$ . Потом вычисляется диагональный элемент  $q_{n-1,n-1}$

$$q_{n-1,n-1} = \tilde{a}_{n-1,n-1} (1 - a_{n-1,n} q_{n,n-1})$$

и элементы предпоследнего столбца

$$q_{i,n-1} = -\tilde{a}_{i,i} a_{i,i+1} q_{i+1,n-1} \quad (i=n-2, n-3, \dots, 1).$$

\* См. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 15. Изд-во Львовского ун-та, 1972.

Дальнейшее вычисление элементов обратной матрицы  $Q$  происходит по рекуррентным формулам:

$$q_{i,i} = \tilde{a}_{i,i}^{(n-1)} (1 - a_{i,i+1} q_{i+1,i}) \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1)$$

$$q_{j,i} = -\tilde{a}_{j,i}^{(n-1)} a_{i,i+1} q_{i+1,i} \quad (j=i-1, i-2, \dots, 1).$$

В числовом примере, рассмотренном В. А. Ладейщиковой, матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{a}_{1,1}^{(n)} = a_{1,1} = 15; \quad \tilde{a}_{2,2}^{(n)} = a_{2,2} - a_{2,1} \tilde{a}_{1,1} a_{1,2} = \frac{176}{15};$$

$$\tilde{a}_{3,3}^{(n)} = a_{3,3} - a_{3,2} a_{2,2} a_{2,3} = \frac{513}{44}; \quad \tilde{a}_{4,4}^{(n)} = a_{4,4} - a_{4,3} a_{3,3} a_{3,4} = \frac{7519}{513},$$

и далее легко получаем:

$$q_{4,4}^{(n-1)} = \tilde{a}_{4,4}^{(n)} = \frac{513}{7519}; \quad q_{3,4}^{(n-1)} = -a_{3,3} a_{3,4} q_{4,4}^{(n)} = \frac{88}{7519}; \quad q_{3,3}^{(n-1)} = a_{3,3} (1 - a_{3,4} q_{4,3}^{(n)}) = \frac{660}{7519};$$

$$q_{2,4}^{(n-1)} = -a_{2,2} a_{2,3} q_{3,4}^{(n)} = \frac{15}{7519}; \quad q_{2,3}^{(n-1)} = -a_{2,2} a_{2,3} q_{3,3}^{(n)} = \frac{112,5}{7519};$$

$$q_{2,2}^{(n-1)} = a_{2,2} (1 - a_{2,3} q_{3,2}^{(n)}) = \frac{660}{7519};$$

$$q_{1,4}^{(n-1)} = -a_{1,1} a_{1,2} q_{2,4}^{(n)} = \frac{2}{7519}; \quad q_{1,3}^{(n-1)} = -a_{1,1} a_{1,2} q_{2,3}^{(n)} = \frac{15}{7519};$$

$$q_{1,2}^{(n-1)} = -a_{1,1} a_{1,2} q_{2,2}^{(n)} = \frac{88}{7519}; \quad q_{1,1}^{(n-1)} = a_{1,1} (1 - a_{1,2} q_{2,1}^{(n)}) = \frac{513}{7519}.$$

Следовательно, матрица  $Q$  имеет вид

$$Q = \frac{1}{7519} \begin{bmatrix} 513 & 88 & 15 & 2 \\ 88 & 660 & 112,5 & 15 \\ 15 & 112,5 & 660 & 88 \\ 2 & 15 & 88 & 513 \end{bmatrix}.$$

Данный алгоритм применим и к квазитреугольным системам нормальных уравнений. Тогда вместо чисел  $a_{i,j}$  будут стоять квадратные матрицы  $A_{i,j}$ . Обратная матрица  $Q$  также будет состоять из квадратных подматриц  $Q_{i,j}$ . В этом случае необходимо учитывать, что

$$Q_{i,j} = Q_{j,i}^T,$$

где индекс «т» означает транспонирование.

Работа поступила 30 октября 1972 года.  
Рекомендована Ленинградским институтом  
теоретической астрономии АН СССР.